Jouer avec les bougies

Année 2014- 2015

Noms et Prénoms des élèves, niveaux :

MARIN Lola 6ème, DUBLETERNAY-TRON Hana 6ème, SAEZ Amélie 6ème, CARFAGNO Chloé 6ème, LAURENDON Alice 4ème, GUECH Cécilia 4ème, DUCLOSSON Emilie 4ème, FREZZA-BUET Juliette 4ème, DIDIER Romane 4ème, THURNE Léo 3ème

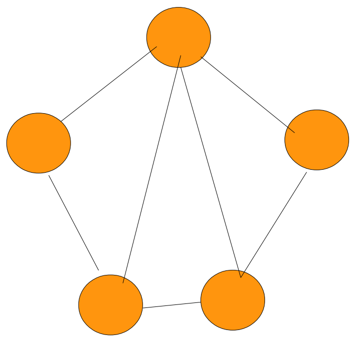
Établissement :
Collège des Gratte-Ciel Môrice Leroux, Villeurbanne

Enseignantes :
Anne Delolme, Christel Bouvier

Chercheurs :
Daniel Hirschkoff, Sebastian Barbieri, Sebastien Maulat, ENS Lyon

Présentation du sujet

Un certain nombre de bougies sont reliées par des arêtes comme sur le schéma ci-contre :



Elles sont au départ toutes allumées.

Le but est de toutes les éteindre.

<u>Définition :</u> On appelle voisines d'une bougie les bougies qui lui sont reliées par une arête.

Quand on souffle sur une bougie son état change ainsi que celui de ses voisines c'est-à-dire que si elle est allumée, elle s'éteint et si elle est éteinte, elle s'allume.

Nos recherches ont porté sur la meilleure stratégie à avoir pour éteindre toutes les bougies en un minimum de coups.

Ces stratégies dépendent du nombre de bougies et de la manière dont elles sont reliées entre elles.

Conjectures et résultats obtenus

<u>1. Lignes de n bougies :</u> si n = 3xk : il faut et il suffit de k coups
si n = 3xk + 1 ou si n = 3xk + 2 : il faut et il suffit de (k+1) coups

<u>2. Colliers de n bougies:</u> si n = 3xk : il faut et il suffit de k coups
sinon : il suffit de n coups

<u>3 - Rectangles 2xn avec n impair</u> : pour un rectangle 2xn, avec n=2 x k+1, il suffit de k+1 coups
(résultat non démontré)

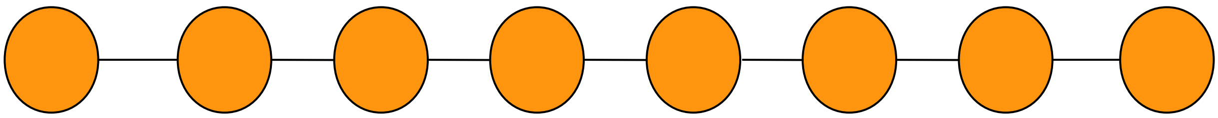
<u>4 - Rectangles 2xn avec n pair :</u> si n = 4xk , il suffit de 4xk coups
si n = 4xk + 2, il suffit de 4x(k+1) coups

<u>5 – Assemblages :</u> pour un assemblage de k carrés 2x2 il suffit de 4+ k -1 coups
pour un assemblage de k carrés 2x3 il suffit de 2xk coups

1. Les bougies en ligne

Définition : Une ligne est un graphe dont 2 sommets ont exactement 1 voisin et les autres sommets en ont exactement 2.

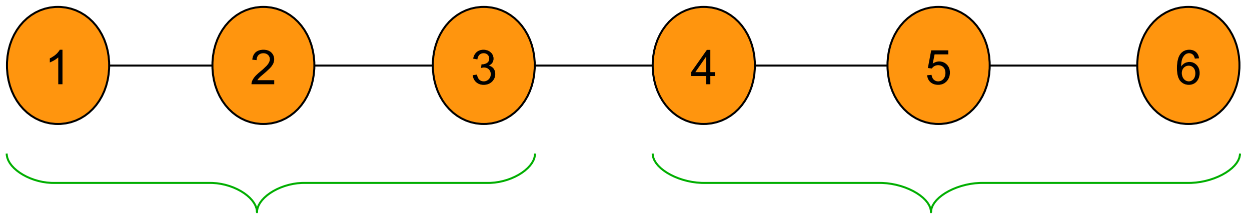
Exemple :



Idée de la recherche :

Nous avons fait des essais en changeant le nombre de bougies de la ligne.
Nous avons eu l'idée de former des paquets de 3 bougies.

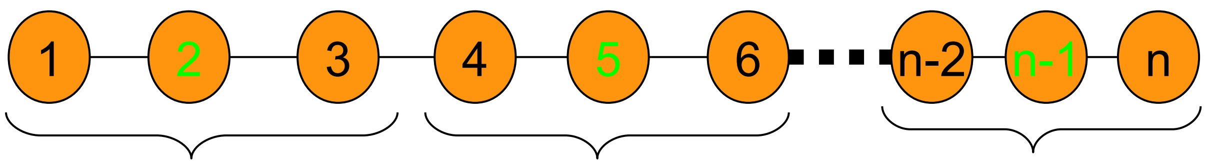
Exemple : Dans cet exemple , n = 6 = 3x2



Il suffit de souffler sur les bougies 2 et 5.

Nous avons compris qu'il fallait envisager 3 cas :

1er cas : quand n=3xk :

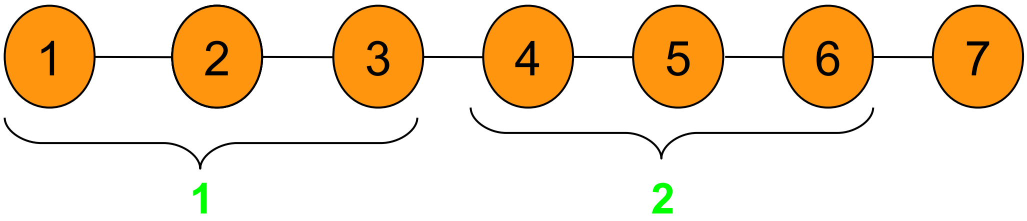


Théorème : Quand n = 3k, il faut et il suffit de k coups.

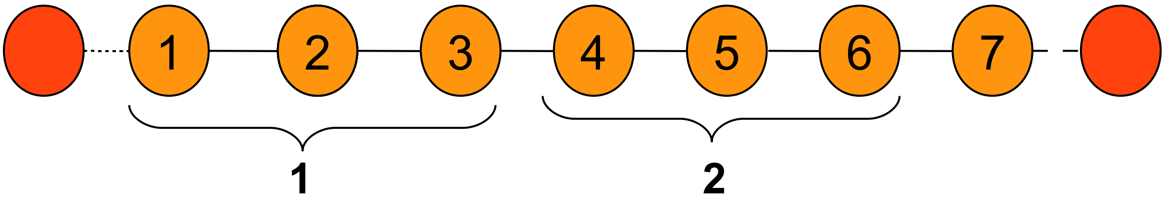
Preuve : Nous avons k paquets de 3 bougies. Pour chaque paquet on souffle sur la bougie « centrale » ce qui allume ses voisines, k coups sont donc suffisants.
Quand on souffle sur une bougie, on change l'état de 3 bougies au maximum, donc si on souffle sur k-1 bougies, on ne peut éteindre que 3(k-1) bougies, k coups sont donc nécessaires.

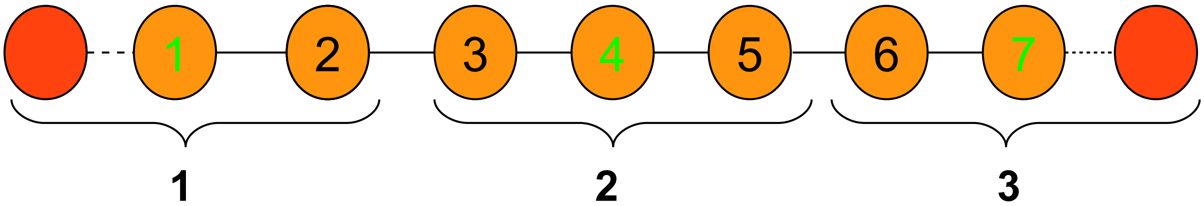
2ème cas : quand n=3xk+1 :

exemple : n=7



Pour résoudre le problème nous avons ajouté des bougies imaginaires, représentées en rouge dans le schéma, qui vont nous permettre de retrouver un nombre de bougies multiple de 3 :



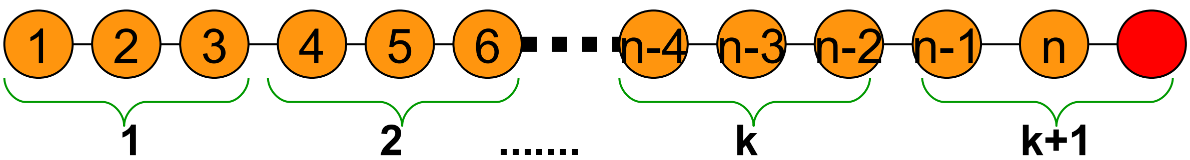


3 coups suffisent pour gagner. Solution:[1;4;7]

Théorème : Quand n = 3xk + 1, il faut et il suffit de k+1 coups.

Preuve : En ajoutant une bougie imaginaire à chaque extrémité, on peut former k+1 paquets, et on utilise le 1^{er} cas en soufflant sur chaque bougie centrale (qui n'est pas imaginaire), donc k+1 coups suffisent et sont nécessaires puisque k coups éteignent 3k bougies au maximum.

3ème cas : quand n=3xk+2 :



Théorème : Quand n = 3xk + 2, il faut et il suffit de k+1 coups.

Preuve : En ajoutant une bougie imaginaire à une extrémité, on peut former k+1 paquets, et on utilise à nouveau le 1^{er} cas.

2. Colliers de n bougies:

Définition : Un collier est un graphe dont chaque bougie a exactement deux voisins ; il faut au minimum trois bougies pour faire un collier.

Conjecture : Quand nous avons commencé à travailler sur les colliers, nous avons tout de suite remarqué que le chiffre trois avait de l'importance dans la résolution de certains colliers.

1er cas : quand n = 3xk

Théorème : Si n = 3xk alors il faut et il suffit de k coups pour gagner.

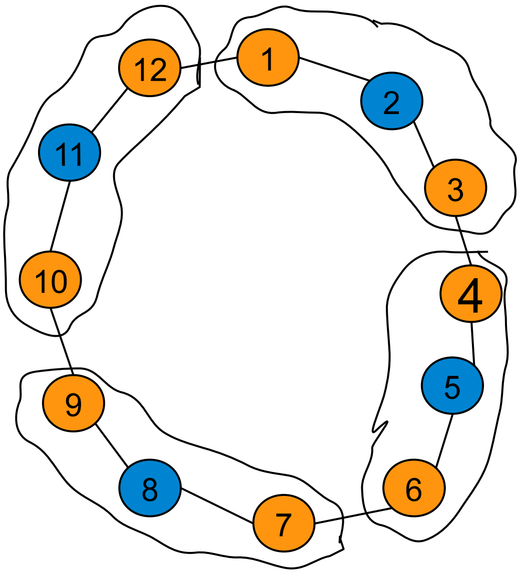
Preuve: Les k paquets de trois fonctionnent indépendamment les uns des autres, on souffle donc sur la bougie centrale de chaque paquet. Le choix des bougies et l'ordre quand lequel on les souffle n'ont pas d'importance tant que l'on respecte cette règle : on souffle sur une bougie toutes les trois bougies.

C'est suffisant puisque ça marche, et nécessaire car en un coup on change l'état de trois bougies exactement, donc si on fait un coup en moins il resterait au moins trois bougies dans leur état d'origine.

Exemple : n=12

On peut former 4 paquets de 3 bougies :

On souffle sur les bougies 2,5,8 et 11.



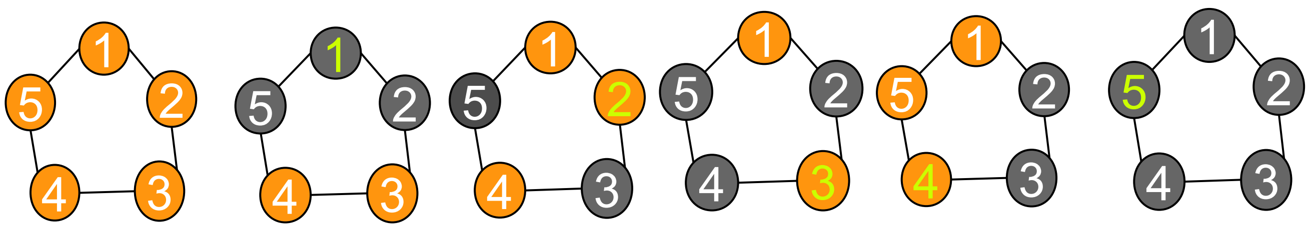
2ème cas : quand n n'est pas un multiple de trois

Théorème: Si n n'est pas un multiple de trois il suffit de souffler sur chaque bougie.

Preuve: Il faut souffler sur chaque bougie, l'ordre n'a pas d'importance.

En effet, chaque bougie est éteinte une fois quand on souffle sur sa voisine de gauche, rallumée quand elle est soufflée puis éteinte une seconde fois quand on souffle sur sa voisine de droite. C'est suffisant puisque ça marche mais pas forcément nécessaire (nous n'avons pas trouvé le moyen de le démontrer).

Exemple : n=5



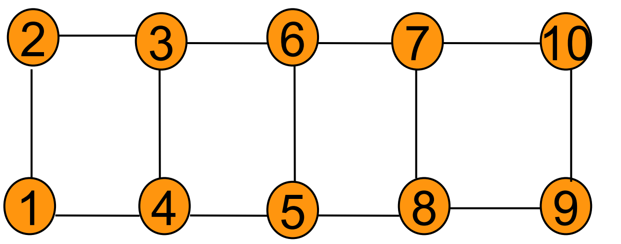
3 - Rectangles 2xn avec n impair

Attention : n désigne à présent le nombre de bougies dans la longueur

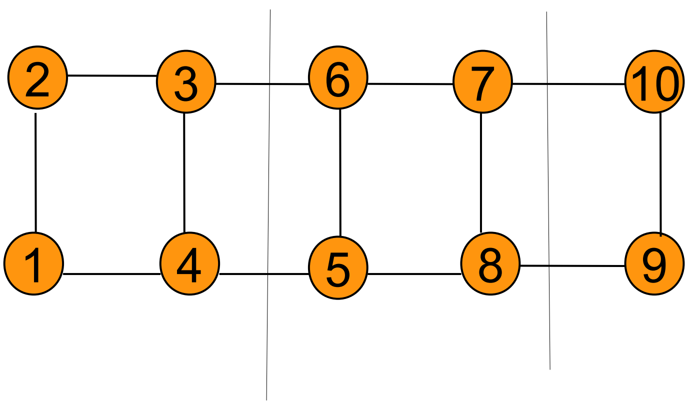
Définition : Un rectangle 2xn est un graphe dont 4 sommets ont exactement 2 voisins et (2xn-4) sommets ont exactement 3 voisins.

Définition:
Les rectangles 2xn impair sont des rectangles ayant une largeur de deux sommets et une longueur ayant un nombre de sommets impair.

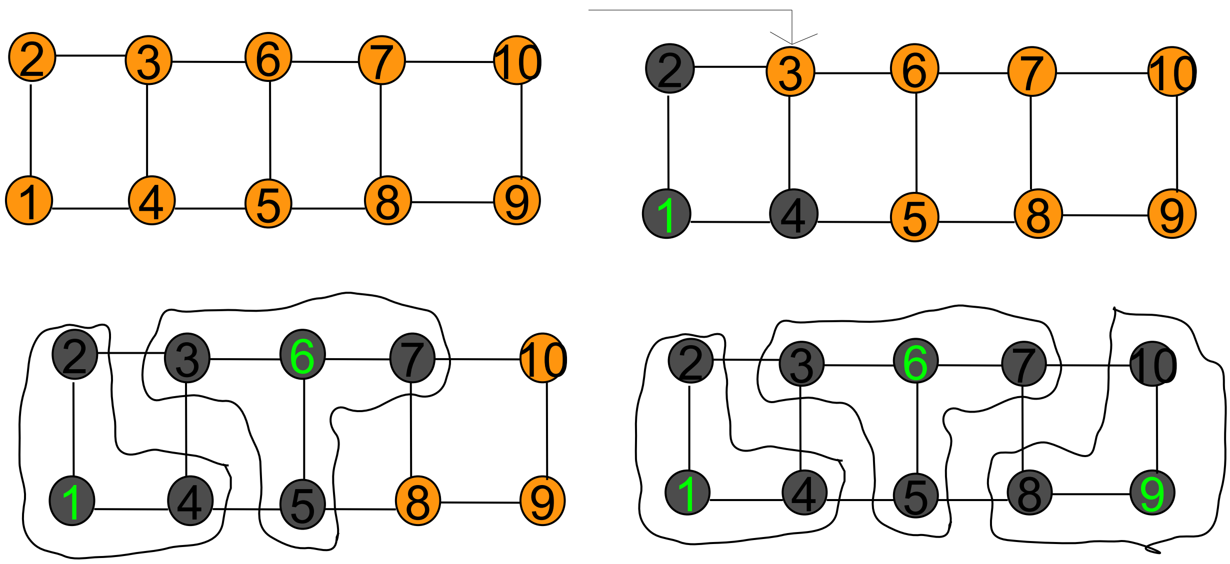
Exemple :



Idée :

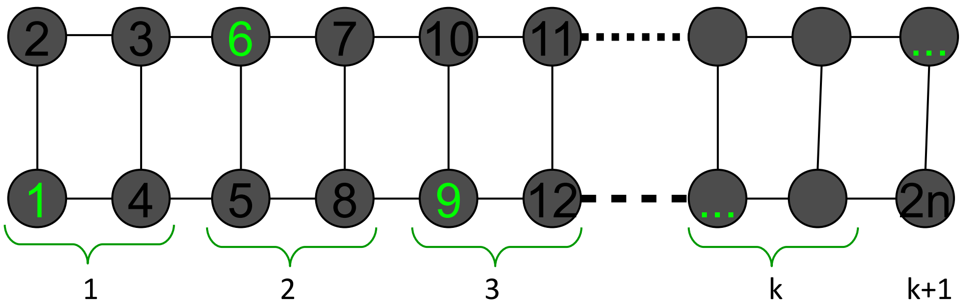


En ayant découpé notre rectangle en carré de 2x2, on essaye un coup par carré (sur notre exemple, on souffle sur la 1, la 6, la 9). Mais il semblerait qu'une bougie ne puisse pas s'éteindre dans notre paquet. Elle va s'éteindre avec le coup du paquet suivant.



Les paquets représentent l'influence qu'a chaque bougie soufflée sur les autres.
Pour résoudre nos graphes nous avons soufflé sur la bougie 1, la bougie 6 et la 9.
Nous avons remarqué qu'il y a un lien méthodique entre les nombres: +5, +3 etc...
1+5=6 et 6+3=9 etc.... N'y aurait-il pas une suite logique?

Après avoir essayé sur plusieurs rectangles différents, sans avoir pu le démontrer nous sommes persuadés que cette suite fonctionne avec n'importe quel rectangle de longueur impair.

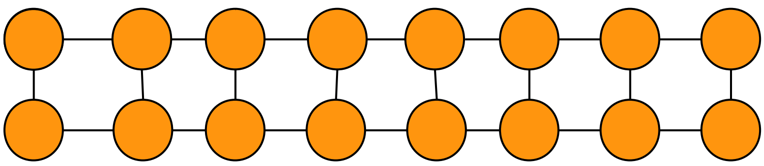


Conjecture : (non démontrée)
Pour le cas général : pour un rectangle 2xn avec n=2xk+1, il suffit de k+1 coups.

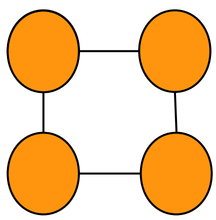
4 - Rectangles 2xn avec n pair

Définition:
Les rectangles 2xn pair sont des rectangles ayant une largeur de deux sommets et une longueur ayant un nombre de sommets pair.

Exemple : n=8

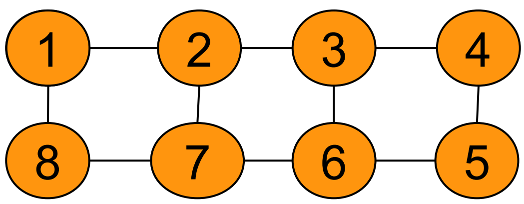


Conjecture : Nous allons utiliser « le carré 2x2 » :



Le carré 2x2 est un cas particulier de collier dont le nombre de bougies n'est pas un multiple de 3, il suffit donc de souffler sur les 4 bougies.

a - Cas où n est multiple de 4 : n= 4 x k .



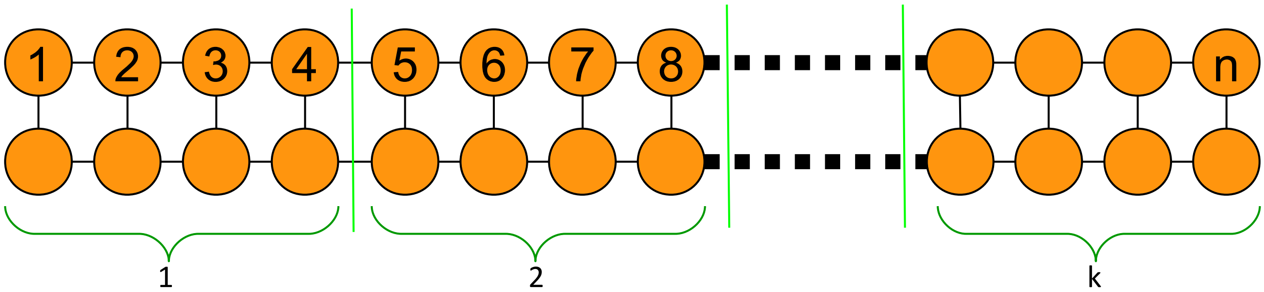
Sur le schéma ci-dessus il faudra souffler sur les bougies 2,3,7et 6 dans n'importe quel ordre.

Théorème : 4 coups suffisent pour un rectangle de longueur 4 et de largeur 2.

Preuve : Il suffit d'utiliser la technique du carré 2x2 (les 4 bougies centrales) avec quatre bougies imaginaires qui sont la 4, la 5, la 1 et la 8. Chaque bougie imaginaire a une et une seule voisine du carré 2x2. Les 4 bougies imaginaires seront donc éteintes quand on soufflera sur les bougies du carré 2x2.

Idée pour le cas général où n= 4x k :

Pour le 2x8 , 2x12 ... il faut regrouper les bougies par groupe de longueur 4 et utiliser la technique précédente.



Sur le schéma ci-dessus il faudra souffler sur les bougies 2,3,6,7,10,11,14,15 .L'ordre n'importe toujours pas .

Théorème : Si n= 4x k alors on peut éteindre les bougies en 4xk coups.

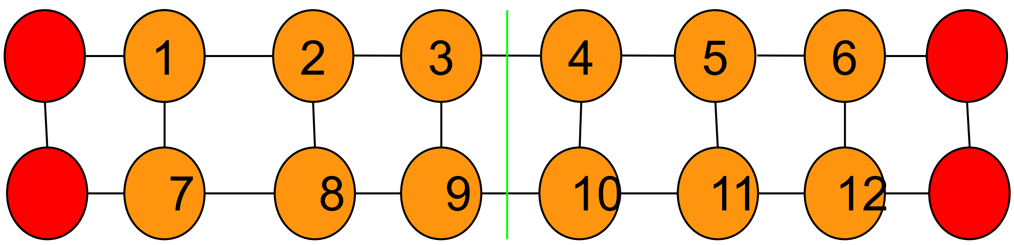
Preuve: Puisque n= 4xk ,on peut former k paquets de longueur 4.
Chaque paquet se résout en quatre coups d'après le théorème précédent.

Nous allons maintenant étudier le cas ou n est pair non multiple de 4 .

b - Cas où n n'est pas multiple de 4 : n = 4x k +2

Exemple : le 2x6 (c'est à dire k=1)

Solution : Le 2x6 auquel on ajoute des bougies imaginaires se décompose alors en deux 2x4.
Il faut 8 coups dans cet exemple :

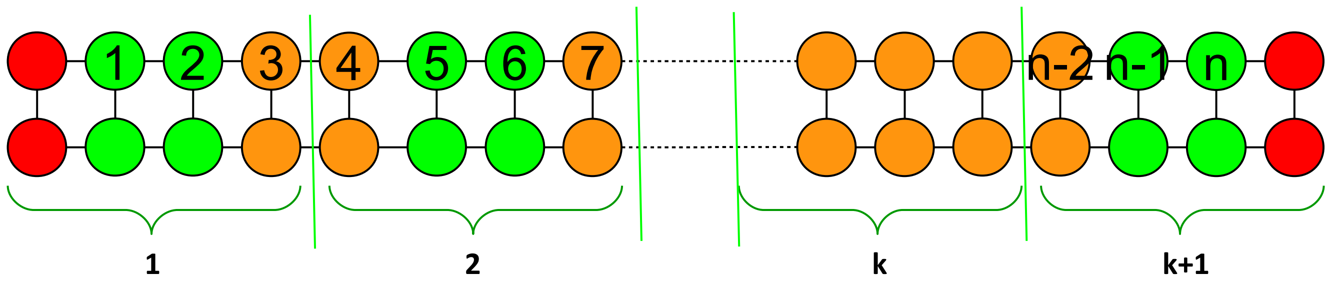


Il faut souffler sur la 1 ,2 ,7 ,8 ,5 ,6 ,12 et la 11. Il faut donc 8 coups.

Cas général :

Théorème : Si n = 4xk + 2, alors on peut éteindre les bougies en 4x(k+1) coups.

Preuve : En ajoutant 2 bougies imaginaires de chaque côté, on obtient (4xk+2+2) bougies dans la longueur, on peut donc former (k+1) paquets de 2x4. Chaque 2x4 peut se résoudre en 4 coups, il suffit donc de 4x(k+1) coups pour tout éteindre.

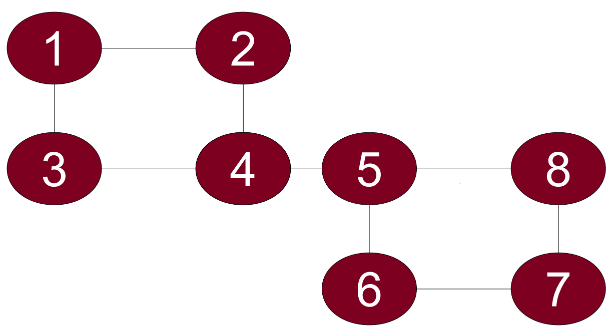


5. Assemblages

Définition : un assemblage est la réunion de deux graphes qu'on relie par une arrête.

a- premier exemple : assemblage de 2x2

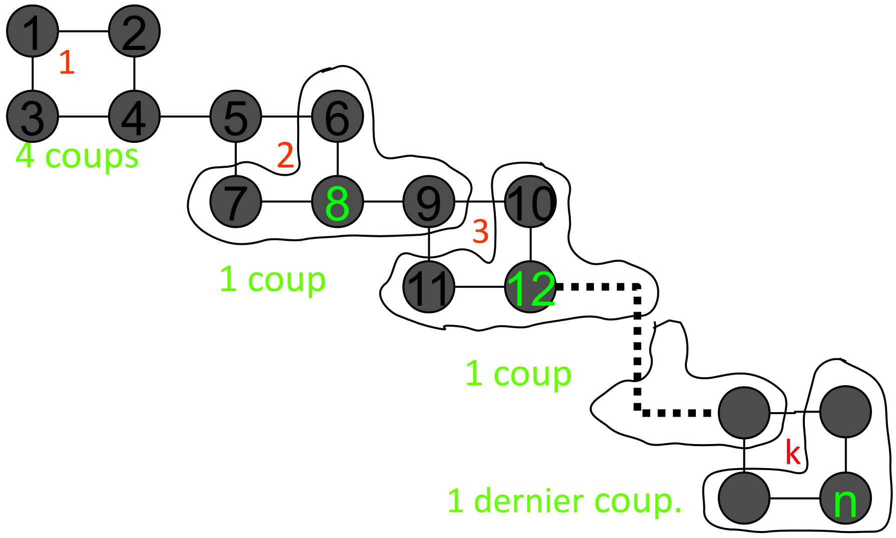
Conjecture :
il faut :
- toucher toutes les bougies du premier graphe
- ensuite, vu que le premier graphe est relié au deuxième on aura éteint cinq bougies (la cinquième étant la première du second graphe) il suffira d'éteindre celle qui a deux voisins allumés



Solution:1,2,3,4,7

Théorème : pour résoudre un assemblage de k carrés 2x2 il faut appliquer 4+ k -1 coups.

Voici un schéma pour expliquer la formule :



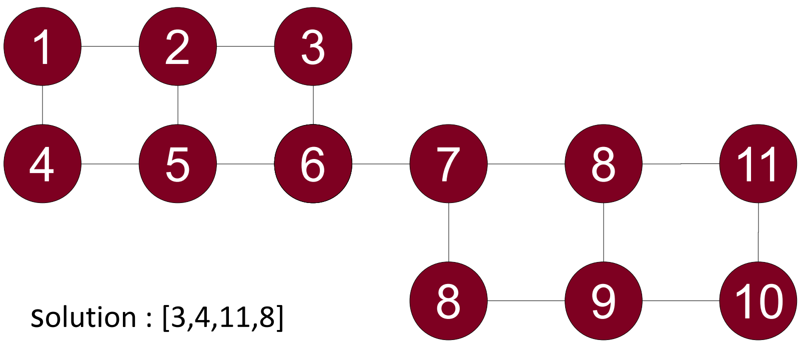
Preuve : Avec 4 coups, on éteint le premier 2x2 et une bougie du deuxième 2x2. Il reste alors (k-1) 2x2, chacun s'éteint en 1 coup, ce qui fait 4+k-1 coups en tout. C'est suffisant parce que ça marche. **(1)**

Remarque : k coups sont nécessaires car quand on souffle sur une bougie, on éteint 4 bougies au maximum, mais on n'a pas prouvé que les 3 coups supplémentaires sont nécessaires.

b- deuxième exemple : assemblage de 2x3

Conjecture :

Il faut toucher les bougies telles que quand on les touche, les coups sont indépendants entre le premier graphe et le second graphe



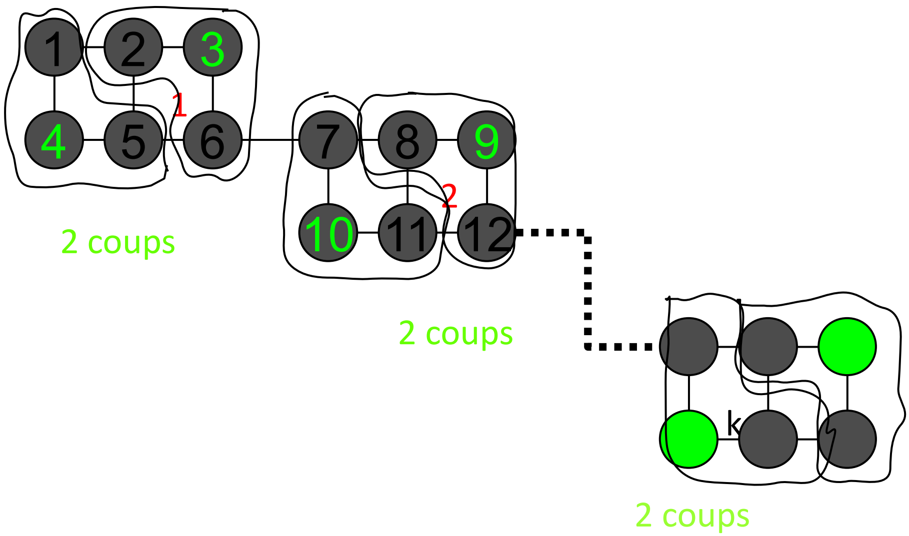
solution : [3,4,11,8]

Cas général :

<u>Conjecture :</u> Pour un assemblage de k rectangles 2x3, il suffit de 2xk coups.

<u>Explication :</u> Chaque rectangle 2x3 s'éteint en 2 coups (d'après la conjecture du paragraphe 3-b).
En soufflant sur des bougies qui n'ont pas d'influence sur les autres 2x3, on peut réussir en 2xk coups.

Schéma pour expliquer la formule :



Conclusion :

Nous sommes persuadés que l'ordre n'a pas d'importance, mais nous n'avons pas réussi à le prouver.
Nous avons aussi travaillé sur les carrés 3x3, 4x4, 5x5, mais les solutions sont difficiles à expliquer.

Il reste plein de graphes à étudier, et nous espérons que nos recherches vous auront intéressés et donné envie de trouver des solutions.

Merci de votre lecture.

Note d'édition :
(1) Notons que les carrés sont reliés entre eux par les coins opposés (la démonstration ne marcherait pas sinon). De plus, les auteurs ont montré qu'il fallait « au plus » 4+k-1 coups et pas « exactement ».