Math en Jeans 2006-2007

Jeu des points et des demi-plans

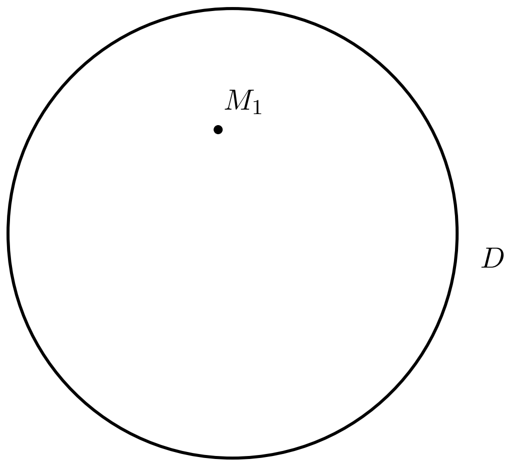
Lycée Sud-Medoc / Lycée Montaigne

Robert Baptiste, Guillouet Mathieu
Vincent Lartaud, Alexandre Longuet

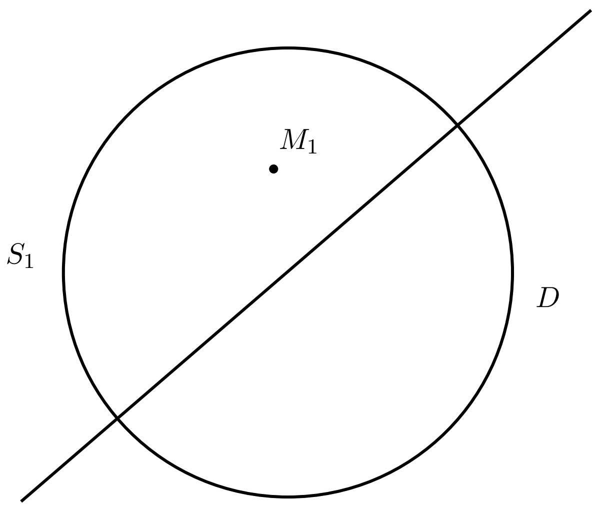
en partenariat avec Robert Deville (Université Bordeaux 1)

1 Présentation du sujet

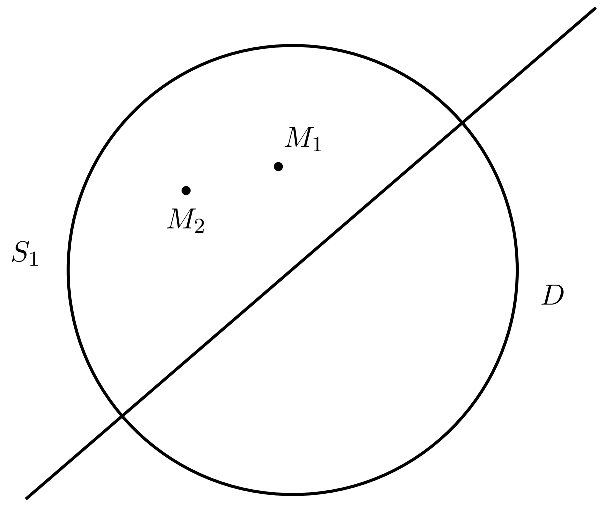
Le jeu des points et des demi-plans.
Soit D un disque du plan et $r > 0$. Il y a deux joueurs, le premier joue des points de D et le second joue des demi-plans.
Le premier joueur choisit un point M_1 dans D.



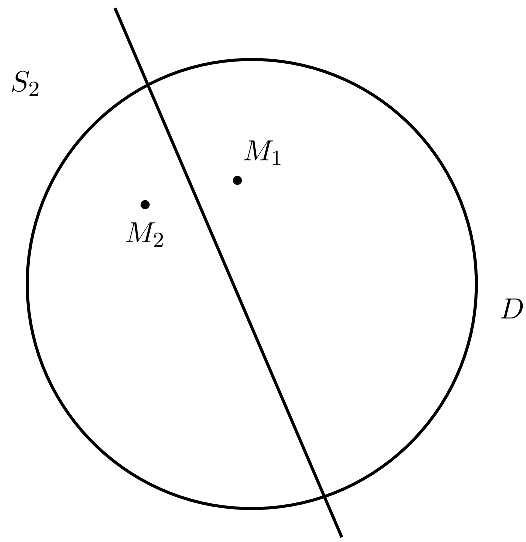
Le deuxième joueur choisit un demi-plan S_1 contenant M_1. Pour cela, il trace une droite qui peut passer par M_1.



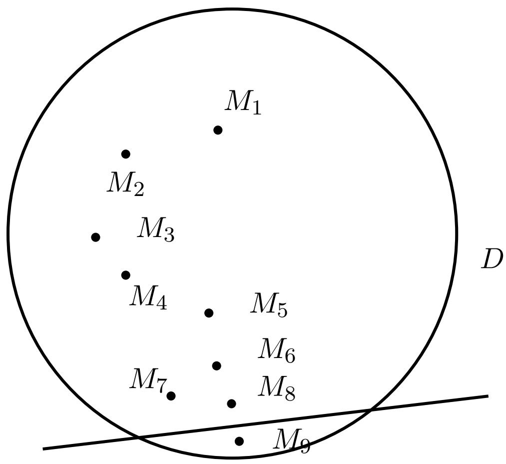
Puis le premier joueur choisit un point M_2 qui est à la fois dans D et dans le demi-plan S_1 .



Ensuite le deuxième joueur choisit un demi-plan S_2 contenant M_2.



Le deuxième joueur gagne si, à partir d'un certain rang, tous les points joués par le premier joueur restent dans un disque de rayon r (r aussi petit que l'on veut).

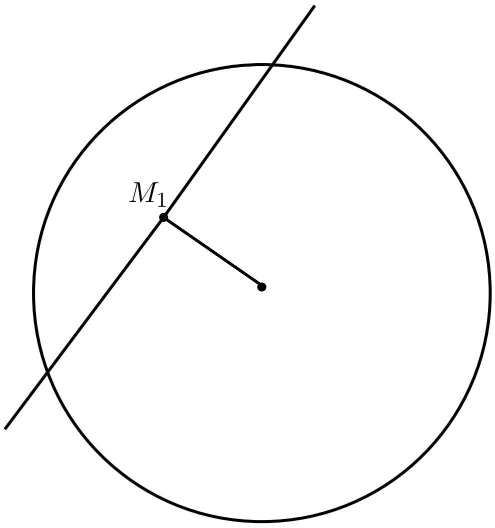


Pouvez-vous indiquer une tactique pour le joueur 2 telle que, si le joueur 2 suit cette tactique, il est sûr de gagner, quelque soit la façon de jouer du joueur 1 ?

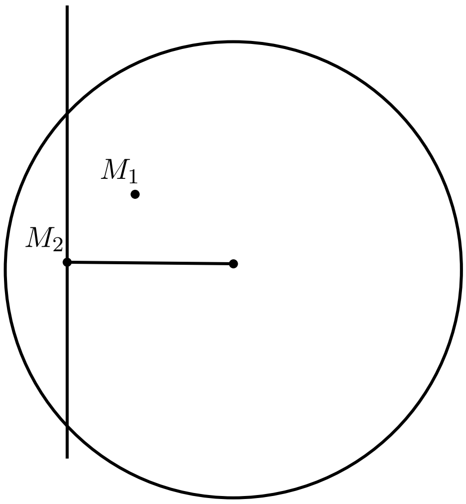
2 Les méthodes qui ne fonctionnent pas

2.1 La méthode de la perpendiculaire

Le joueur 1 joue donc un premier point M_1 n'importe où dans le cercle. Le joueur 2 va jouer la droite passant par M_1 et qui est perpendiculaire à la droite passant par le centre O du cercle et M_1.



Le joueur 2 joue alors le demi-plan S_1 qui englobe la plus petite partie du disque D.
Le joueur 1 va jouer un point M_2 dans S_1 et le joueur 2 va tracer sa droite de la même manière que précédemment. Ce qui nous donne :



On observe que la partie de D englobée par S_2 (que l'on nommera aussi par commodité S_2) est plus petite que celle englobée par S_1. On peut donc penser que $S_n > S_{n+1}$ en utilisant cette technique et qu'ainsi on arrive petit à petit à coincer le joueur 1 dans le rayon souhaité.
De plus si le joueur 1 joue son point sur la droite, on obtient toujours $S_n > S_{n+1}$, cette technique a donc l'air d'être efficace.
Cependant si le joueur 1 place ses points sur les droites construites par le joueur 2 mais de manière à ce que l'angle $\widehat{M_2OM_1} = 1\ rad$ avec M_2 , l'angle $\widehat{M_3OM_2} = 1/2\ rad$, l'angle $\widehat{M_4OM_3} = 1/3\ rad$ c'est-à-dire en suivant la suite $u_n = 1/n$, on observe que le joueur ne sera jamais coincé dans le rayon souhaité. En effet, la somme des angles donne $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$ qui tend vers l'infini([1]).

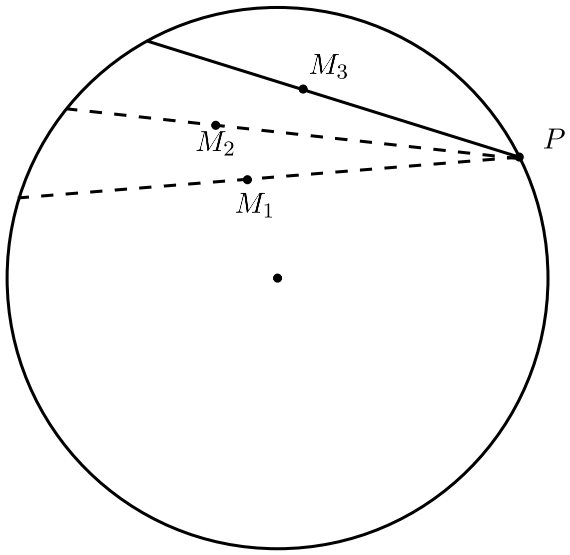
[1] information fournie par le chercheur

On constate de plus que la distance OM_n converge([2]) vers une limite l inférieure à $3OM_1$([3]).

Le point M_1 étant judicieusement placé, les points M_n vont donc indéfiniment tourner autour du centre sans pour autant s'approcher du cercle délimitant le disque D.
Cette technique n'est donc pas valide.
Est fournie en Annexe une démonstration détaillée.

2.2 La méthode de la rotation

La technique consiste à ce que le joueur 2 choisisse un point sur le cercle P et fasse passer toutes ses droites par P et le point tracé par le joueur 1. On obtient donc ceci :

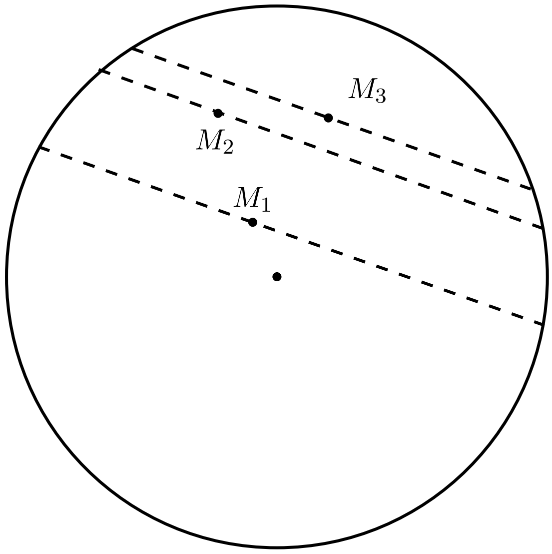


On observe que la partie S_2 est plus petite que S_1. On peut donc penser que $S_n > S_{n+1}$ en utilisant cette technique et qu'ainsi on arrive petit à petit à coincer le joueur 1 dans le rayon souhaité.
Cependant si le joueur 1 joue son point sur la droite tracée par le joueur 2 préalablement la rotation n'est plus possible.
Cette technique n'est donc pas valide.

2.3 La méthode de "la patate"

Cette technique consiste à ce que le joueur 2 réduise l'aire de la partie du disque contenu dans le demi-plan choisi en découpant le cercle comme on découperait une patate. Pour cela, il trace des droites parallèles à la première droite tracée. On obtient donc ceci :

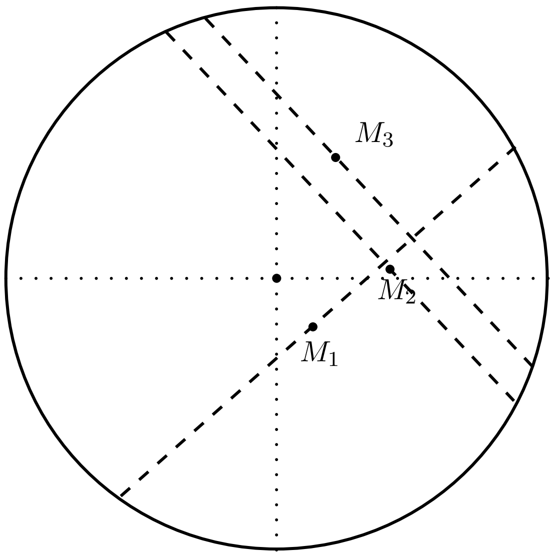
[2] admis
[3] résultat obtenu à la calculatrice



On observe que S_2 est plus petite que S_1. On peut donc penser que $S_n > S_{n+1}$ en utilisant cette technique et qu'ainsi on arrive petit à petit à coincer le joueur 1 dans le rayon souhaité Cependant si le joueur 1 joue son point sur la droite tracée par le joueur 2, le découpage n'est plus possible.
Cette technique n'est donc pas valide.

2.4 La méthode du "triangle"

Cette technique consiste à découper le disque en quatre portions de disque de même aire. Le joueur 1 va donc jouer dans l'une de ces portions. La méthode du "triangle" consiste à ce que le joueur 2 joue la droite passant par le point M_1 de telle sorte que le triangle formé avec les bords de la portion soit isocèle.



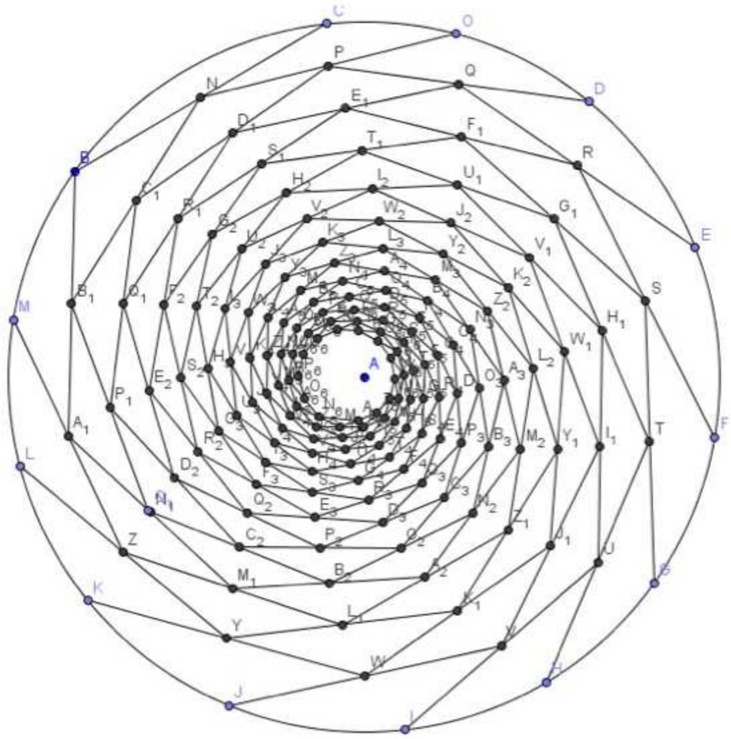
Quelque soit l'endroit où le joueur 1 joue M_2 (dans ou en dehors de la portion du cercle considérée) alors l'on aura $S_2 < S_1$ car l'aire du triangle formé sera plus grande. On peut donc penser que $S_n > S_{n+1}$ en utilisant cette technique et qu'ainsi l'on arrive petit à petit à coincer le joueur 1 dans le rayon souhaité.
Cependant si le joueur 1 joue son point à une distance égale au quart de la distance qui sépare la première droite jouée par le joueur 2 du point le plus éloigné du disque dans la portion considérée puis du huitième et ensuite du seizième, c'est-à-dire en suivant la suite $u_n = 1/2^n$, alors les points s'approcheront du disque mais resteront à une distance de celui-ci égale à la

moitié du rayon. En effet, la somme $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ a pour limite $\frac{1}{2}$ ([4]).
Le joueur 1 n'est donc pas coincé.
Cette technique n'est donc pas valide.

3 Les méthodes qui fonctionnent

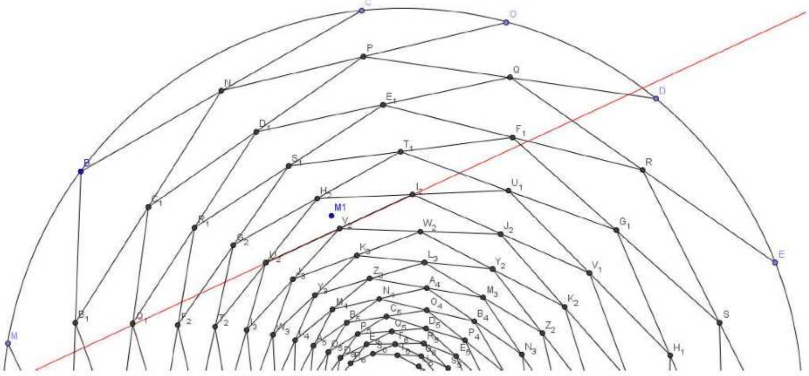
3.1 La méthode du découpage

Pour la méthode du découpage, on découpe le cercle en spirale. C'est-à-dire que l'on trace une corde de distance $2r$ (r étant le rayon du disque dans lequel on doit emprisonner le joueur 1) puis on trace un segment passant par le milieu de cette corde et par un point sur le cercle (sachant que le point sur le cercle est placé de manière à ce que le segment soit de longueur égale ou plus petite que 2r) et ainsi de suite.
On obtient alors le graphique suivant :

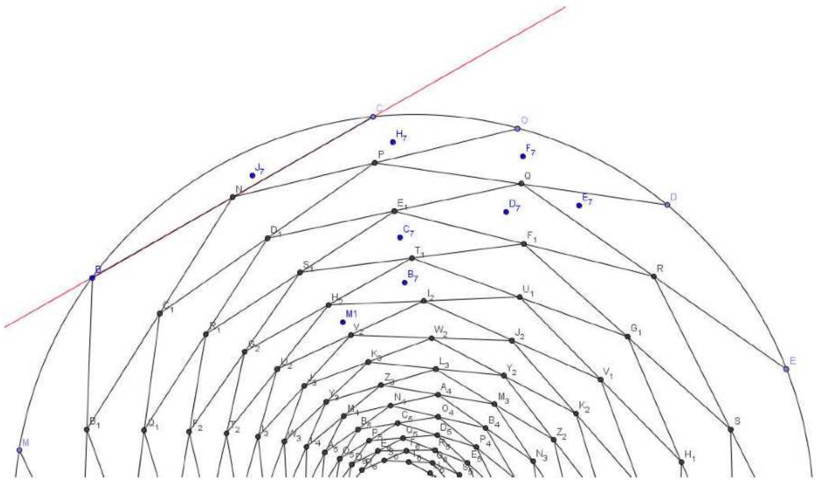


Le joueur 1 va jouer un point M_1 dans un des triangles formés. Le joueur 2 va jouer la droite passant par les 2 points du triangle les plus proche du centre.

[4]résultat fourni par le chercheur

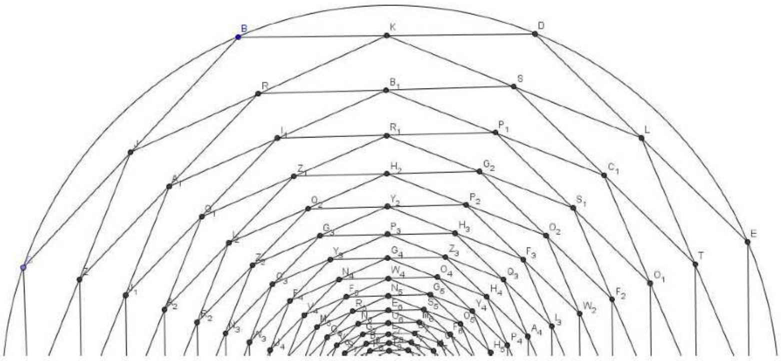


Dans le cas où le joueur 1 joue M_2 et ses points suivants dans le même triangle alors il a perdu puisque le joueur 2 va jouer à tous les coups la même droite et le joueur 1 jouera dans un cercle de rayon r (le plus grand coté des triangles étant égal ou plus petit que $2r$).
Le joueur 1 est donc obligé a un moment ou un autre de sortir du triangle où il a joué son coup précédent. Or s'il sort le demi-plan dans lequel il sera contenu sera plus petit que le demi-plan précédent.
Ainsi le joueur 1, étant obligé de jouer en dehors du triangle ou il a joué précédemment, va remonter la spirale plus ou moins rapidement jusqu'à arriver au premier arc de cercle que l'on a formé lors de la construction.
A partir de cet instant il suffit donc au joueur 2 de jouer tout le temps la même droite et ainsi le joueur est coincé dans un cercle de rayon r. La stratégie est donc valide.
REMARQUE : *Si le joueur 1 joue sur l'un des sommets du triangle (ou de l'arc de cercle) cela ne change rien ; le joueur 2 jouera la même droite car le joueur 1 sera toujours dans le triangle (ou l'arc de cercle).*

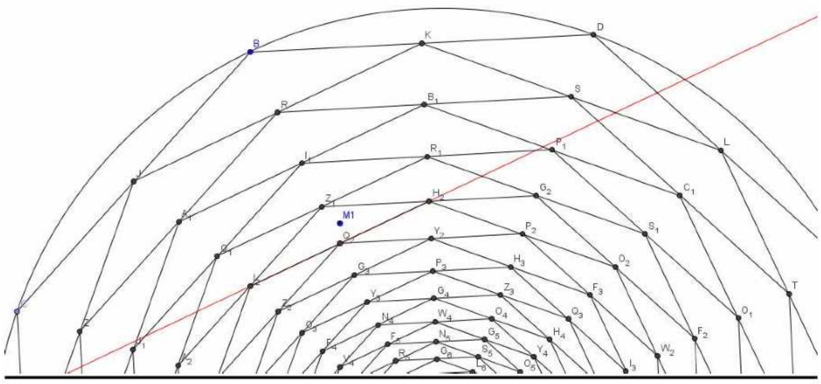


3.2 La méthode du polygone

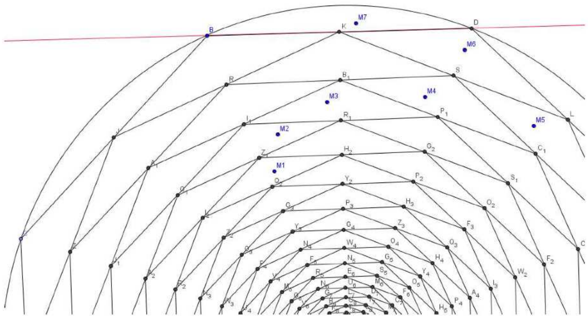
Pour la méthode du polygone, on découpe le cercle en différentes couches de triangles que l'on appelle P_1, P_2, ..., P_n. P_1 étant la couche d'arc de cercles. Afin de découper le cercle on considère un premier polygone de coté r inscrit dans le cercle, puis on considère un deuxième polygone inscrit dans le premier polygone et ainsi de suite.



Le joueur 1 va jouer un point M_1 dans une des couches et plus précisément dans un des triangles formés. Le joueur 2 va jouer la droite passant par les 2 points du triangle les plus proches du centre.



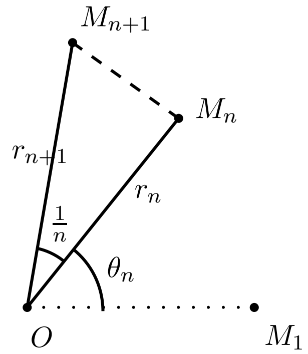
Dans le cas où le joueur 1 joue M_2 et ses points suivants dans le même triangle alors il a perdu puisque le joueur 2 va jouer à tous les coups la même droite et le joueur 1 jouera dans un cercle de rayon r (le plus grand coté des triangles étant égal ou plus petit que $2r$).
Le joueur 1 est donc obligé à un moment ou un autre de sortir du triangle où il a joué son coup précédent. Or s'il sort, le demi-plan dans lequel il sera contenu sera plus petit que le demi-plan précédent (le joueur dans ce cas va se trouver dans une couche supérieure).
Ainsi le joueur 1, étant obligé de jouer en dehors du triangle où il a joué précédemment, va se retrouver à jouer sur le bord du cercle, dans un des arcs de cercle de rayon r (ou plus petit).
Le but est atteint, la stratégie est donc valide.
Remarque : *Si le joueur 1 joue sur l'un des sommets du triangle (ou de l'arc de cercle) cela ne change rien le joueur 2 jouera la même droite car le joueur 1 sera toujours dans le triangle (ou l'arc de cercle).*



4 Annexe

Soit donc M_0 le premier point placé par le joueur 1. On trace la perpendiculaire à la droite (OM_0) passant par M_0. Le joueur 2 va choisir alors comme portion du disque celle délimitée par la droite tracée et ne contenant pas O.
Le joueur 1 va alors placer son point M_1 de telle façon que M_1 appartienne à la droite délimitant la partie du disque choisie par le joueur 2 et tel que $\widehat{M_1OM_2} = 1$ (angle mesuré en radian).
Le joueur 2 construit alors sa droite puis choisit sa portion toujours en appliquant le même principe. Le joueur 1 place alors son point M_3 sur la droite délimitant la partie de disque choisie par le joueur 2 et de telle façon que $\widehat{M_2OM_3} = \frac{1}{2}$.

Le jeu se poursuivant ainsi, si on note r_n la distance OM_n et θ_n l'angle $\widehat{M_nOM_1}$ (n entier supérieur à 1), on a alors $\theta_n = \frac{1}{n-1} + \theta_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.
De plus, on a $r_{n+1} = \frac{r_n}{\cos(\frac{1}{n})}$ pour tout $n \geqslant 1$.



De ce fait, on en déduit que $\theta_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}$ et comme

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+.... \geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+.... \geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$$

On en déduit que θ_n devient aussi grand que l'on veut (sa limite est $+\infty$) ce qui entraîne que les points M_n vont décrire une spirale autour de O.
Cependant si on choisit judicieusement la position du point M_1 et surtout sa distance au point O, alors cette spirale ne sort pas du disque de jeu. C'est que nous allons montrer ci-dessous
On a $\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$ quelque soit x réel positif. En effet, si on étudie la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ définie sur $[0;+\infty[$, cette fonction est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x) \geqslant 0$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $f(x) \geqslant 0$ quelque soit $x \in [0;+\infty[$ d'où l'inégalité.
Or on a $r_{n+1} = \frac{r_n}{\cos(\frac{1}{n})}$ donc $r_{n+1} \leqslant \frac{r_n}{1-\frac{1}{2n^2}}$ puisque $\cos(\frac{1}{n}) \geqslant 1 - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2}$.
Si on pose $u_n = \ln(r_n)$, on a alors $u_{n+1} \leqslant u_n - \ln(1-\frac{1}{2n^2})$. Comme pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, on a $-\ln(1-x) \leqslant 2x$, on en déduit que $u_{n+1} \leqslant u_n + \frac{1}{n^2}$.
Par conséquent,

$$u_{n+1} \leqslant u_1 + 1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant u_1 + 1^2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$$

or

$$u_1+1^2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1)n} = u_1+1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = u_1+2-\frac{1}{n} \leqslant u_1+2$$

Donc quelque soit n entier naturel non nul, $u_n \leqslant u_1 + 2$. Donc si $u_1 \leqslant -2$ (c'est-à-dire si $r_1 \leqslant \frac{1}{e^2}$), on a pour tout n entier naturel non nul, $u_n \leqslant 0$ c'est-à-dire $r_n \leqslant 1$, ce qui signifie que M_n reste dans D si l'on prend un disque de rayon 1.