Le jeu de Nim

par Jean-Noël Clément et Bruno Racon
du
Lycée Val de Seine de Grand Quevilly.

enseignants : MM. Aubert, Fraynay et Pierre Grihon.

chercheur : M. Daniel Krob, Laboratoire d'Informatique de Rouen.

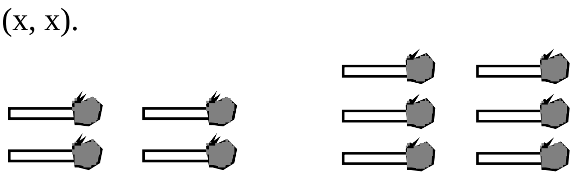
Le jeu de Nim se joue à deux joueurs, chaque joueur jouant l'un après l'autre. Il est composé de tas comportant chacun un nombre non déterminé d'allumettes.

En fait, le but de ce jeu, c'est de faire prendre la dernière allumette par l'adversaire. Nous avons pour cela la possibilité de prendre des allumettes (nombre indéterminé) dans un tas et un seul à la fois.

Nous avons essayé de trouver les solutions qu'il fallait poser pour arriver à un jeu gagnant. Donc dans ce que nous allons montrer, c'est le joueur qui arrive à poser ces jeux qui gagne (donc celui qui commence a perdu).

deux tas

Celui qui arrive à poser 2 tas composés chacun d'un même nombre d'allumettes a gagné (x, x).



| Ceci marche pour tous les jeux de la forme (x, x) à l'exception du jeu (1, 1). *exception :*

trois tas

Ensuite, on a porté notre étude sur les jeux comportant 3 tas de la forme (x, y, x + y) (pour conserver une certaine symétrie.)

<u>Loi de Dhia 1</u>

25 se divise seulement par 1, 5 et 25.

25 ÷ 25 = 1
25 ÷ 5 = 5
25 ÷ 1 = 25

Pour les jeux de la forme (1, x, x + 1) nous remarquons que les positions fortes et les positions faibles s'alternent.

1	**0**	**1**	**position forte**
1	1	2	position faible
1	**2**	**3**	**position forte**
1	3	4	position faible
1	**4**	**5**	**position forte**

En fait, nous avons trouvé ces positions fortes et ces positions faibles en jouant. Celui ayant posé une position forte a presque toutes les chances de gagner. Pour avoir une position forte, il faut avoir (1, x, x + 1) avec x pair.
[NDLR : c'est quoi une position forte … ?]

Pour les jeux de la forme (2, x, x + 2) nous remarquons qu'il y a à chaque fois 2 positions fortes et 2 positions faibles qui s'alternent.

2	**0**	**2**	**position forte**
2	**1**	**3**	**position forte**
2	2	4	position faible
2	3	5	position faible
2	**4**	**6**	**position forte**
2	**5**	**7**	**position forte**
2	6	8	position faible
2	7	9	position faible

Pour les jeux de la forme (3, x, x + 3) nous remarquons qu'il y a à chaque fois 1 position forte et 3 positions faibles qui s'alternent.

3	**0**	**3**	**position forte**
3	1	4	position faible
3	2	5	position faible
3	3	6	position faible
3	**4**	**7**	**position forte**
3	5	8	position faible
3	6	9	position faible
3	7	10	position faible
3	**8**	**11**	**position forte**

Pour les jeux de la forme (4, x, x + 4) nous remarquons qu'il y a à chaque fois 4 positions fortes et 4 positions faibles qui s'alternent.

4	**0**	**4**	**position forte**
4	**1**	**5**	**position forte**
4	**2**	**6**	**position forte**
4	**3**	**7**	**position forte**
4	4	8	position faible
4	5	9	position faible
4	6	10	position faible
4	7	11	position faible
4	**8**	**12**	**position forte**
4	**9**	**13**	**position forte**
4	**10**	**14**	**position forte**
4	**11**	**15**	**position forte**

Pour les jeux de la forme (5, x, x + 5) nous ne voyons plus de relation entre les positions fortes et les positions faibles.

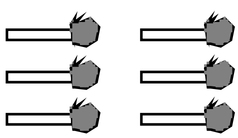
5	**0**	**5**	**position forte**
5	1	6	position faible
5	**2**	**7**	**position forte**
5	3	8	position faible
5	4	9	position faible
5	5	10	position faible
5	6	11	position faible
5	7	12	position faible
5	**8**	**13**	**position forte**
5	9	14	position faible
5	**10**	**15**	**position forte**

Donc nous avons stoppé notre étude de ces jeux.

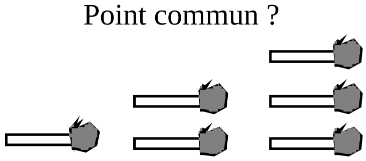
parallèle

Ne voyant pas apparaître de relations évidentes, nous avons décidé de garder toutes les positions fortes afin de trouver leur “point commun”. Nous avons donc mis en parallèle les jeux de la forme (x, x) et les jeux de la forme (x, y, x + y) ayant une position forte.

Exemple :



Point commun ?



Par tatonnement, nous avons remarqué qu'il existe une certaine “symétrie” apparente dans chaque jeu de position forte et les jeux (x, x) : nous avons remarqué que la décomposition était de la forme :

$$2^n (2^0, 2^1, 2^2, \dots)$$

Conclusion.

Sur un jeu quelconque, il faut, pour se trouver en position forte, le ramener à un jeu où l'on a une symétrie intérieure de la forme 2^n. Donc, sur un jeu quelconque, on décompose chaque tas à l'aide de 2^n.

Au départ (après la décomposition), on assemble entre eux les sous-tas (de la forme 2^n) dans les deux plus petits tas. On trouve alors des tas qui n'ont pas de jumeaux.

Ensuite, on ramène le plus grand tas à des sous-tas, en formant les jumeaux des sous-tas qui étaient seuls (on retire le reste).

Exemple : 73 25 160

On le décompose en sous-tas de la forme 2^n :

$2^6\&2^3\&2^0$ $2^4\&2^3\&2^0$ $2^7\&2^5$

On associe les tas en commun, il reste donc 2^6 et 2^4 qui n'ont pas de jumeaux, donc on transforme le plus grand tas en 2^6 et 2^4. Ce tas devient :

$2^6\&2^3\&2^0$ $2^4\&2^3\&2^0$ $2^6\&2^4$

73 25 80

et donc tous les sous-tas peuvent être associés entre eux. On est en position forte.