Stratégie gagnante au jeu de Chomp

année 2012

Elèves chercheurs :
Maxence Berthe, Laurie Boulet, Allison Brunet, Axel Chomy, Sophie Strady et Marion Verdier
collège Jean Jaurès
rue du 8 mai 1945
59690 Vieux-Condé

Enseignant :
Nicolas Van Lancker

Chercheur :
Michaël Balan, LAMAV EA 4015,
Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis

Cette année, M Balan, chercheur au LAMAV, à l'université de Valenciennes, nous a proposé de travailler sur le Jeu de Chomp.
Ce jeu a été inventé en 1952 par Frederik "Fred" Schuh puis ré-inventé en 1974 par David Gale sous sa formulation actuelle. On l'appelle parfois le jeu de la plaque de chocolat.

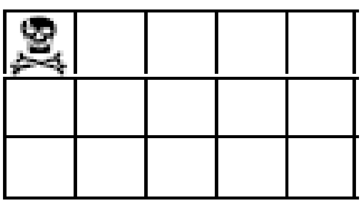
<u>I Les règles du jeu</u>

Il existe différentes règles du jeu. Nous allons travailler avec celles expliquées par M Balan au début de l'atelier.

Le jeu de Chomp est un jeu pour deux joueurs qui se déroule sur une grille rectangulaire, composée de différents petits carrés. A tour de rôle, les deux joueurs «mangent» des carrés.

Le carré en haut à gauche est empoisonné : celui qui prend ce carré a perdu.

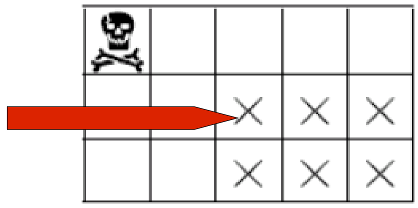
Chacun leur tour, les joueurs choisissent une case de la grille et mangent toutes les cases situées en dessous et à droite de la case choisie.



Voici un exemple : le joueur rouge et le joueur bleu s'affrontent.

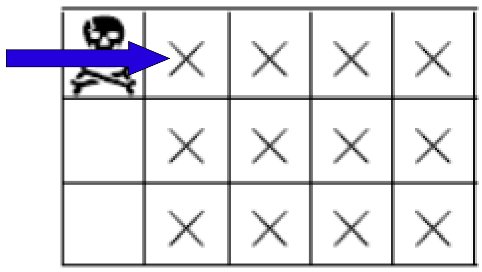
Le joueur rouge joue en premier. Il choisit une première case (marquée d'une flèche) et prend tout ce qui est en dessous et à droite. Il mange donc 6 cases (repérées par des croix)

Joueur n°1



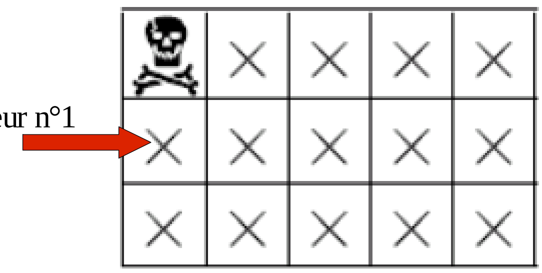
Ensuite, le joueur bleu choisit la case qui est indiquée par la flèche et prend également tout ce qui est en dessous et à droite. Il mange alors 6 cases lui aussi.

Joueur n°2



Le joueur rouge mange la case indiquée par la flèche de couleur rouge. Il mange également la case qui est en dessous.

Joueur n°1



Enfin, le joueur bleu est obligé de manger le carré empoisonné. Il a donc perdu.

Monsieur Balan, notre chercheur, nous a proposé comme sujet de recherche pour cette année : existe-t-il une stratégie gagnante, c'est à dire une stratégie qui permet au joueur qui commence de gagner à tous les coups ?

II Stratégie gagnante sur un carré

Très vite, nous nous sommes rendus compte que ce n'est pas toujours évident de trouver pour un rectangle. Nous avons donc d'abord travaillé avec un carré.

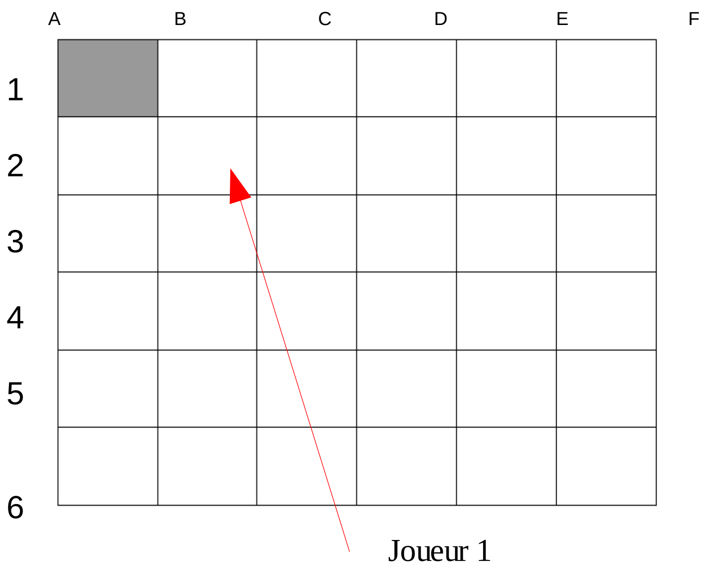
Afin de nous repérer, nous avons décidé d'appeler les colonnes par des lettres et les lignes par des nombres. Nous avons utilisé cette technique dans toutes nos recherches.

Pour un carré la stratégie gagnante est la suivante :

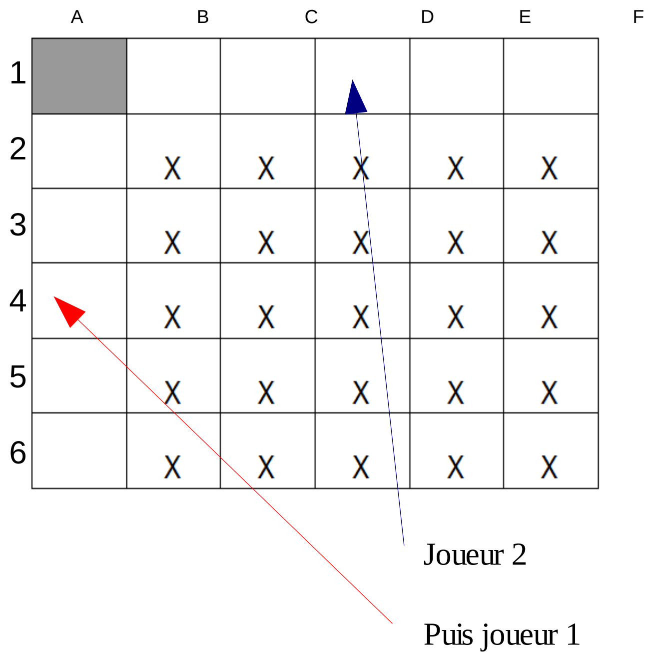
Le premier joueur choisit la case B2. Ensuite, il prendra autant de cases que son adversaire : horizontalement si celui-ci les a mangées verticalement, verticalement si celui-ci les a mangées horizontalement. Finalement, le deuxième joueur est obligé de manger la case A1, la case empoisonnée.

Nous avons appelé cette stratégie : la technique de la symétrie, puisqu'une fois que le premier joueur a choisi la case B2, il n'a plus qu'à faire le symétrique de son camarade par rapport à la diagonale A1-B2-C3...

Regardons un exemple : sur un carré de 6×6 : le premier joueur prend la case B2.



Si le deuxième joueur joue D1 (il mange 3 cases) alors le premier joueur joue A4 (il mange aussi 3 cases)



Par cette technique, c'est toujours le joueur 2 qui prend l'initiative et le joueur 1, « rééquilibre ». Petit à petit, le joueur 2 se retrouve avec une unique possibilité : prendre A1. Il a perdu.

III Stratégie gagnante sur un rectangle

Nous nous sommes vite rendus compte que notre technique de la symétrie ne fonctionnait pas toujours sur un rectangle. Ce n'était donc pas une stratégie gagnante pour le rectangle.

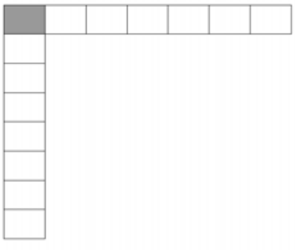
Nous avons remarqué que les principes de jeu étaient les mêmes si on inversait les longueurs et les largeurs : la « forme » du rectangle ne change pas grand chose au problème.

Pour réfléchir, nous avons utilisé le site de JP Davalan : http://jeux-et-mathematiques.davalan.org/jeux/nim/chomp/index.html où nous pouvions jouer en premier. Ceci nous permettait de chercher à gagner contre l'ordinateur ou d'essayer d'observer la méthode appliquée par le programme. Mais nous n'avons pas trouvé de stratégie gagnante pour le rectangle. M Balan nous a fait observer que le programme revenait souvent à quelques figures particulières et il nous a proposé de chercher la stratégie gagnante de chacune de ces formes.

IV Des figures particulières

1) L'équerre

Nous avons choisi d'appeler la première figure particulière « l'équerre ». Nous appellerons n le nombre de cases sur l'horizontale et p le nombre de cases sur la verticale

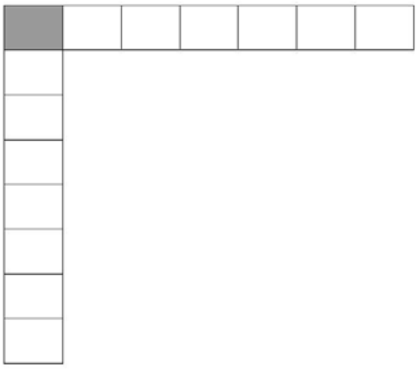


1er cas : Si n est différent de p

Le premier joueur « corrige » l'équerre en prenant des cases afin que la verticale et l'horizontale soient égales. Il peut alors appliquer la technique de la symétrie et oblige le joueur 2 à prendre le case A1.

Regardons un exemple :

n=7
p=8



Le joueur 1 prend le dernier carré sur la verticale (ainsi il reste autant de carrés libres en verticale et en horizontale). Ensuite, il prendra autant de carreaux que le joueur 2, de manière symétrique. A la fin, le joueur 2 est obligé de prendre le carreau empoisonné.

2ème cas : Si n est égal à p

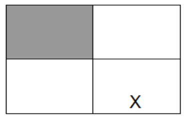
Cette fois-ci, c'est le deuxième joueur qui va pouvoir appliquer la technique de la symétrie. Il va reproduire ce que fait le joueur 1. Finalement, le premier joueur sera obligé de prendre le carreau empoisonné. Le joueur 1 a perdu.

Si n=p, il n'y a pas de stratégie gagnante pour l'équerre.

L 'équerre est une configuration gagnante si n est différent de p.

2) des rectangles 2*p ou n*2

Pour gagner avec ce genre de rectangles, la technique consiste à ramener le plateau à un carré 2*2 :



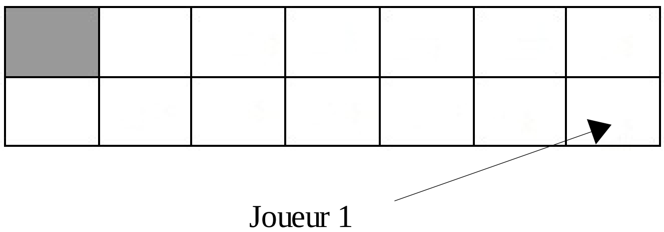
C'est encore une fois la technique de la symétrie.

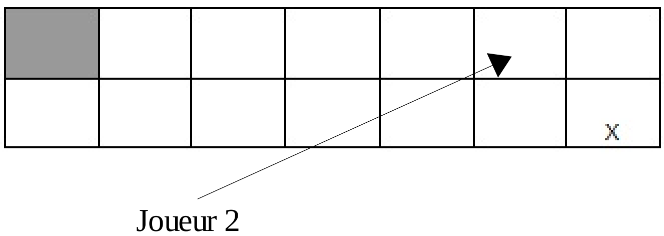
Pour un rectangle n*2, la stratégie que nous avons trouvée est la suivante :

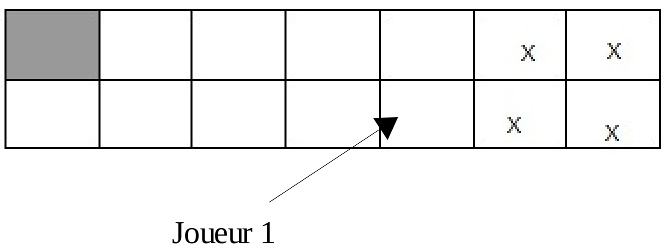
- le premier joueur prend la première case en bas à droite
- le second joueur joue
- le premier joueur prend les cases qui lui permettent de garder une figure avec le dernier petit carré déjà mangé (1)
- au bout d'un moment , le joueur 2 se retrouve donc dans la situation décrite en début de cette partie : avec un carré 2*2.
- Le joueur 1 a gagné

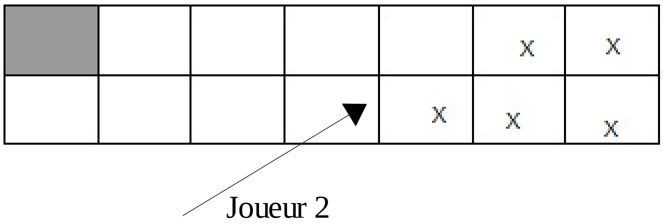
Prenons un exemple avec un rectangle 7*2

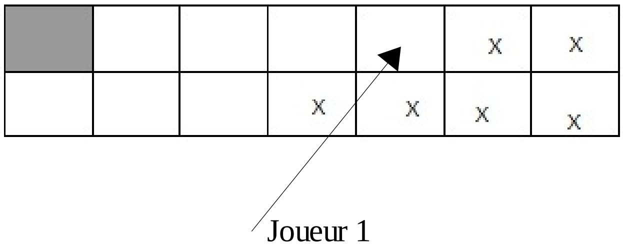
Nous allons imaginer ce que pourrait jouer le joueur 2. Ce qui est important pour comprendre notre stratégie, est de regarder la méthode qu'applique le joueur 1.



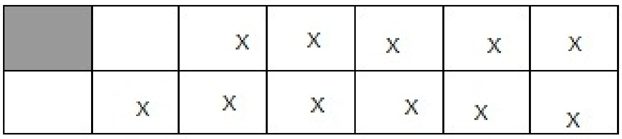








Et petit à petit, quelle que soit la longueur, on aboutit à la situation suivante :

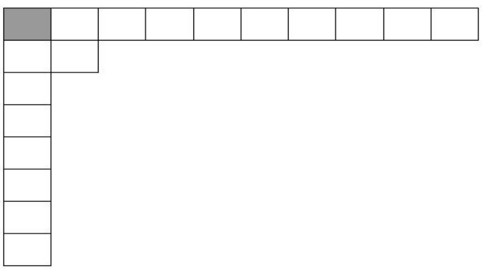


avec le joueur 2 qui doit jouer : il a perdu.

Pour un rectangle formé par 2 colonnes, la technique est exactement la même.

3) <u>Le pistolet avec gâchette</u> (2)

Nous avons appelé « le pistolet avec gâchette » la dernière figure particulière pour laquelle nous avons trouvé une stratégie gagnante.



Nous appellerons n le nombre de cases sur l'horizontale et p le nombre de cases sur la verticale

<u>**1er cas**</u> : si la différence entre n et p ne vaut pas 1.

Etape 1 : Nous commençons par réduire l'une des branches pour que la différence entre n et p soit de 1.

Etape 2 : La stratégie dépend de ce que fait l'adversaire :
- Si l'adversaire supprime la gachette, nous réduisons le plus grand côté afin que n=p. Ensuite, il suffit d'appliquer la stratégie de l'équerre
- Si l'adversaire réduit n ou p, nous réduisons l'autre coté d'autant de cases, avec pour but de passer le plus vite possible (mais parfois par étape) en 2*n ou 2*p.

<u>**2ème cas**</u> : si la différence entre n et p vaut un, cette configuration n'est pas gagnante.

<u>**3ème cas**</u> : Petite précision : si n et p sont égaux, il suffit de prendre la « gâchette » pour créer une situation où on peut appliquer la technique de la symétrie.

Le pistolet à gâchette est une configuration gagnante si la différence entre n et p est différente de 1.

<u>**Conclusion**</u> : Si nous n'avons pas trouvé de théorie générale pour gagner, nous avons trouvé une stratégie gagnante pour les carrés, les rectangles à deux lignes ou deux colonnes et deux configurations particulières : l'équerre et le pistolet à gâchette.
Lors du congrès, plusieurs chercheurs nous ont parlé d'une autre version de ce jeu. Nous n'avons pas eu le temps d'y réfléchir.

Notes de l'édition

(1) L'expression " garder une figure" n'est pas claire, on comprendra mieux à l'aide de l'exemple du rectangle 7*2 donné ensuite.

(2) Il aurait été intéressant d'expliquer la raison de la distinction entre les 2 cas n-p=1et n-p ≠ 1, Dans le cas n-p=1 peut-on prouver qu'il n'y a pas de stratégie gagnante ?