Un jeu avec des entiers

Collège des explorateurs   Cergy   2004

Si on se donne 4 entiers naturels a, b, c et d qu'on dispose sur une ligne, on construit une nouvelle ligne qu'on écrit en dessous les entiers $|a-b|$ $|b-c|$ $|c-d|$ $|d-a|$

Ensuite on construit de même une 3ème ligne... En prenant a =5, b=11, c=0 et d= 2 on obtient ainsi successivement:

a	b	c	d
5	11	0	2
6	11	2	3
5	9	1	3
4	8	2	2
4	6	0	2
2	6	2	6
4	4	0	0
0	4	0	4
4	4	4	4
0	0	0	0

Et donc toutes les lignes suivantes sont constituées de 4 zéro.
Est-ce un coup de chance ou bien doit-on toujours arriver à une ligne constituée de 4 zéro?

Sujet proposé par M. COLADO.
Présenté par Amélie Murday (5e), Sarah Haïdara (6e) et André Ponnouradjane (5e).

1. « La vitesse »

Si on met des nombres qui sont petits ça ne nous donne pas toujours plus vite 0 0 0 0.
Une ligne juste avant quatre zéro on trouve quatre nombres similaires et encore avant (l5) deux zéros séparés et deux nombres.

l1	**568974**	**56234**	**897452**	**3654892**
l2	**512740**	**8411218**	**2757440**	**3085918**
l3	**328478**	**1916222**	**328478**	**2573178**
l4	**1587744**	**1587744**	**2244700**	**2244700**
l5	**0**	**656956**	**0**	**656956**
l6	**656956**	**656956**	**656956**	**656956**
l7	**0**	**0**	**0**	**0**

2. « La position »

Quand je décale A et que je le mets à la place de B et que B je le mets à la place de C ainsi de suite je trouve le même résultat et le même nombre de lignes

	a	b	c	d
l1	**5682**	**3568**	**1792**	**9524**
l2	**2114**	**1776**	**7732**	**3842**
l3	**338**	**5956**	**3890**	**1728**
l4	**5618**	**2066**	**2162**	**1390**
l5	**3552**	**96**	**772**	**4228**
l6	**3456**	**676**	**3456**	**676**
l7	**2780**	**2780**	**2780**	**2780**
l8	**0**	**0**	**0**	**0**

3. L'influence des nombres pairs et impairs.

Quand il y a 4 nombres impairs sur la première ligne à la suite il n'y aura que des nombres pairs.
Quand on met des multiples d'un nombre à la suite on aura toujours des nombres de la table de multiplication.
On peut aussi remarquer que, avant la ligne des 4 nombres similaires on trouve deux paires de nombres égaux.

40235	**9805**	**4320**	**2036**
30430	**5485**	**2284**	**38199**
24945	**3201**	**35915**	**7769**
21744	**32714**	**28146**	**17176**
10970	**4568**	**10970**	**4568**
6402	**6402**	**6402**	**6402**
0	**0**	**0**	**0**

Les nombres sont différents et suivant les nombres de départ, les calculs sont plus ou moins de la “même longueur”.

1ER Exemple : →

18	**144**	**33**	**27**
126	**111**	**6**	**9**
15	**105**	**3**	**117**
90	**102**	**114**	**102**
12	**12**	**12**	**12**
0	**0**	**0**	**0**

2eme Exemple →

75395	**98765**	**95175**	**87665**
23370	**3590**	**7510**	**12270**
19780	**3920**	**4760**	**11100**
15860	**840**	**6340**	**8680**
15020	**5500**	**2340**	**7180**
9520	**3160**	**4840**	**7840**
6360	**1680**	**3000**	**1680**
4680	**1320**	**1320**	**4680**
3360	**0**	**3360**	**0**
3360	**3360**	**3360**	**3360**
0	**0**	**0**	**0**

Quand je décale A et que je le mets à la place de B et que B je le mets à la place de C ainsi de suite je trouve le même résultat et le même nombre de lignes.

	a	b	c	d
l1	5682	3568	1792	9524
l2	2114	1776	7732	3842
l3	338	5956	3890	1728
l4	5618	2066	2162	1390
l5	3552	96	772	4228
l6	3456	676	3456	676
l7	2780	2780	2780	2780
l8	0	0	0	0

Quand il y a 4 nombres impairs (l1), à la suite il n'y aura que des nombres pairs. Quand on met des multiples d'un nombre à la suite on aura toujours des nombres de la table de multiplication utilisée.
On peut aussi trouver avant la ligne des 4 nombres similaires deux nombres pareils et deux autres.

40235	9805	4320	2036
30430	5485	2284	38199
24945	3201	35915	7769
21744	32714	28146	17176
10970	4568	10970	4568
6402	6402	6402	6402
0	0	0	0

Les nombres sont différents et suivant les nombres ils font plus ou moins de lignes.

1	144	33	27
126	111	6	9
15	105	3	117
90	102	114	102
12	12	12	12
0	0	0	0

Les calculs dépendent de la parité des 4 nombres de départ.
On code:

- **-Un nombre impair par 1**
- **-un nombre pair par 0 .**

On a choisi 1 pour un nombre impair car si on effectue une division euclidienne d'un nombre impair par 2 le reste est toujours égal à 1.

On a choisi 0 pour un nombre pair car si on effectue une division euclidienne d'un nombre pair par 2 le reste est toujours égal à 0.

On utilise ce code pour simplifier les calculs et pour traiter tous les cas possibles.

Peut-on obtenir 1,1,1,1?

	25	26	**25**
			27
24		24	**23**
			25
	23	22	**23**
			21

Peut–on obtenir 1,1,1,0 ?

	23	22	**22**
24		24	**24**
	25	26	**26**

Peut–on obtenir 1 ;1 ;0 ;0 ?

	23	22	**22**
24		24	**24**
	25	26	**26**

Peut-on obtenir 1 ;0 ;1 ;0 ?

	23	23	**22**
24			**24**
	25	25	**26**

Peut-on obtenir 1 ;0 ;0 ;0 ?

	23	23	**23**
24			
	25	25	**25**

Peut-on obtenir 0 ;0 ;0 ;0 ?

24	24	24	**24**

On récapitule:

-1111 : Possible
-1110 : Impossible
-1100 : Possible
-1010 : Possible
-1000 : Impossible
-0000 : Possible

Légendes

Les cases coloriées en fond vert sont celles qui sont justes, car si on prend le dernier nombre et qu'on le soustrait avec le nombre de départ, on doit trouver obligatoirement le nombre voulu soit 1, ou soit 0.

Les cases coloriées en fond rouge sont celles qui sont fausses, car si on prend le dernier nombre et qu'on le soustrait avec le nombre de départ, on doit trouver obligatoirement le nombre non voulu .

Conclusion *:*

Les nombres pairs et les nombres impairs sont ce qui constitue une partie de la réponse mais nous ne pouvons pas le démontrer.

Les élèves de GERARD PHILIPE ont fait des recherches en considérant 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 nombres de départ.