Jeu des différences

Année 2013 - 2014

Elèves de 3ème : Le Masson Pierre, Sirjean Lucas, Lunney Benjamin, Nicoleau-Bergeret Jules, Marc Gwendoline, Lecoeur Julie, Dolfi Matthieu.
Etablissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Claudie ASSELAIN, Florence FERRY et Nicolas SEGARRA.
Chercheur : Céline Abraham.

Le sujet

On écrit quatre nombres entiers positifs a, b, c, d sur une ligne. La règle du jeu des différences est la suivante : sur la ligne d'après, on écrit dist(a, b), dist(b, c), dist(c, d), dist(d, a), où dist(a, b) = a – b si a est supérieur ou égal à b et dist(a, b) = b – a si b est supérieur ou égal à a.
Par exemple, si la première ligne est : 2 7 65 4, la deuxième sera : 5 58 61 2.
On dit que le jeu s'arrête quand on arrive à la ligne 0 0 0 0.
Problématique : le jeu s'arrête-t-il toujours ?

Nos résultats : nous avons démontré que pour 4 nombres au départ, le jeu s'arrêtait toujours. Nous avons ensuite fait varier le nombre de valeurs présentes dans le tableau au départ et nous avons fait des conjectures sur les gains ou pertes suivant ce nombre.

I - Tests et premières conjectures

Voici tout d'abord quelques exemples de jeux ; les nombres donnés au départ sont placés sur la première ligne du tableau.

1	2	3	4
1	1	1	3
0	0	2	2
0	2	0	2
2	2	2	2
0	0	0	0

Ce jeu s'arrête au bout de 5 étapes.

12	45	63	89
33	18	26	77
15	8	51	44
7	43	7	29
36	36	22	22
0	14	0	14
14	14	14	14
0	0	0	0

Ce jeu s'arrête au bout de 7 étapes.

78	112	4	54
34	108	50	24
74	58	26	10
16	32	16	64
16	16	48	48
0	32	0	32
32	32	32	32
0	0	0	0

Ce jeu s'arrête au bout de 7 étapes.

Après de nombreux essais que nous avons faits sur feuille puis avec un tableur, nous avons constaté que tous nos jeux s'arrêtaient et que le nombre d'étapes pour arriver à quatre 0 ne dépassait jamais 9.

Conjecture : les jeux se terminent tous en maximum 9 étapes.

Nous pouvons déjà faire quelques remarques sur les 4 nombres choisis au départ :

– Si on permute (1) les nombres, le jeu ne change pas : a b c d, b c d a, c d a b ou d a b c donnent des jeux équivalents ; en effet les calculs de différences sur les lignes suivantes restent les mêmes.

– Lorsque l'on multiplie (ou l'on divise s'ils ont un diviseur commun) les 4 nombres de départ par un même nombre entier non nul *k*, alors les nombres sur les lignes qui suivent sont aussi multipliés par ce facteur *k ;* le jeu s'arrête donc avec le même nombre d'étapes.

Exemple :

3	1	4	7
2	3	3	4
1	0	1	2
1	1	1	1
0	0	0	0

Ce jeu s'arrête au bout de 5 étapes.

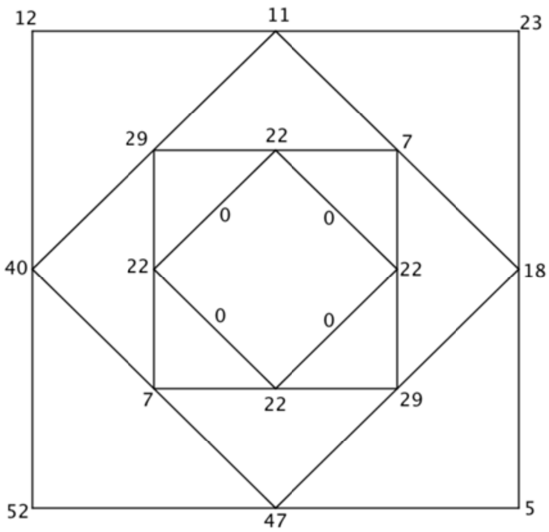
x4

12	4	16	28
8	8	12	16
4	0	4	8
4	4	4	4
0	0	0	0

Ce jeu s'arrête également en 5 étapes.

Sur chaque ligne du deuxième tableau, chaque nombre garde le facteur 4.

Nous avons aussi trouvé une autre façon de représenter le jeu : chaque nombre se trouve être le sommet d'un carré ; les différences se trouvent au milieu des côtés. Avec cette représentation, on constate bien que l'on peut faire permuter les nombres sans que le jeu ne change.



II - Preuve avec la parité des nombres

Avant de démontrer que le jeu s'arrête toujours, nous avons besoin de propriétés.

La première concerne notre dernière remarque du I :

<u>**Propriété 1**</u> **: Quand les quatre nombres ont un diviseur commun, on peut les diviser par ce diviseur sans que le résultat du jeu et le nombre d'étapes soient différents.**

Preuve : Soient 4 nombres entiers positifs a, b, c et d ayant un diviseur commun k.

On supposera que : dist(a, b) = $a – b$, dist(b, c) = $b – c$, dist(c, d) = $c – d$ et dist(d, a) = $a – d$.

(Dans un cas différent le raisonnement serait inchangé).

Il existe a_1, b_1, c_1 et d_1 , 4 entiers positifs tels que : $a = k \times a_1$, $b = k \times b_1$, $c = k \times c_1$ *et* $d = k \times d_1$

Lorsque l'on fait : $a – b$, $b – c$, $c – d$ *et* $a – d$, on fait : $ka_1 – kb_1$, $kb_1 – kc_1$, $kc_1 – kd_1$ *et* $ka_1 – kd_1$

On peut mettre k en facteur : $k(a_1 – b_1)$, $k(b_1 – c_1)$, $k(c_1 – d_1)$ et $k(a_1 – d_1)$

Si les nombres d'une ligne sont multiples de k, les nombres de la ligne suivante sont aussi multiples de k. Si on arrive à une ligne de 0 avec des nombres multiples de k , on y arrivera aussi avec des nombres qui sont divisés par k. Le facteur k ne va pas augmenter le nombre de lignes.
Le nombre de jeux est donc restreint (2): lorsqu'on a une suite de 4 nombres on peut les simplifier par leur diviseur commun sans changer le résultat du jeu.

<u>Propriété 2</u> : La différence de deux nombres entiers pairs est paire.

Preuve : soient x et y deux nombres entiers positifs pairs tels que $x > y$. Il existe k et k' entiers positifs, avec $k > k'$, tels que $x = 2k$ et $y = 2k'$. $x – y = 2k – 2k' = 2(k – k')$.
Comme $k – k'$ est un entier positif, $2(k – k')$ est un multiple de deux et $x – y$ est bien pair.

<u>Propriété 3</u> : La différence de deux nombres impairs est paire.

Preuve : soient x et y deux nombres entiers positifs impairs tels que $x > y$. Il existe k et k' entiers positifs, avec $k > k'$, tels que $x = 2k+1$ et $y = 2k'+1$
$x – y = 2k+1 – (2k'+1) = 2k+1 – 2k' – 1 = 2k – 2k' = 2(k – k')$
Comme $k – k'$ est un entier positif, $2(k – k')$ est un multiple de deux et $x – y$ est bien pair.

<u>Propriété 4</u> : La différence d'un nombre impair et d'un nombre pair est impaire.

Preuve : soient x un nombre entier positif pair et y un nombre entier positif impair tels que $x > y$.
Il existe k et k' entiers positifs, avec $k > k'$, tels que $x = 2k$ et $y = 2k'+1$
$x – y = 2k – (2k'+1) = 2k – 2k' – 1 =2(k – k') – 1$
Comme $k – k'$ est un entier positif, $2(k – k')$ est un multiple de deux, il est pair et comme on lui enlève 1, le nombre devient impair. Donc $x – y$ est impair.
Si $x < y$, le raisonnement est similaire.

Étudions maintenant tous les cas de jeux

On notera P si le nombre est pair et I si le nombre impair

<u>Cas n°1</u> : <u>4 nombres pairs</u>

P	P	P	P

<u>Cas 2</u> : <u>3 nombres pairs</u>

P	P	P	I
P	P	I	I
P	I	P	I
I	I	I	I
P	P	P	P

Nous prenons notre première remarque du I pour dire que l'on peut faire permuter les nombres. Ainsi, les tableaux IPPP, PIPP et PPIP sont semblables à celui-ci. Nous avons donc ici tous les cas de jeux avec au départ 3 nombres pairs.

<u>Cas 3</u> : <u>2 nombres pairs</u>

P	P	I	I
P	I	P	I
I	I	I	I
P	P	P	P

Ou

P	I	P	I
I	I	I	I
P	P	P	P

En permutant, on obtient les jeux équivalents :
- dans le premier tableau : IPPI, IIPP, PIIP.
- dans le deuxième tableau : IPIP.

On a ainsi tous les cas avec 2 nombres pairs au départ.

<u>Cas 4</u> : <u>1 nombre pair</u>

I	I	I	P
P	P	I	I
P	I	P	I
I	I	I	I
P	P	P	P

En permutant, on obtient les jeux équivalents : PIII, IPII, IIPI.

<u>Cas 5 : aucun nombre pair</u>

I	I	I	I
P	P	P	P

On remarque que dans tous les cas, la suite arrive à une ligne de quatre nombres pairs.

Soit ces 4 nombres sont nuls auquel cas le jeu s'arrête ; soit on peut diviser tous les nombres par 2, et on pourra continuer avec une « nouvelle » suite de nombres plus petits. (3) En continuant ce processus, les nombres de la suite vont donc toujours diminuer, et arriver à 0 au bout d'un certain temps.

Notre jeu des différences avec 4 nombres entiers au départ s'arrête donc toujours.

Remarque : si les nombres sont décimaux ou même rationnels, le jeu s'arrête également; il suffit de multiplier chaque nombre de façon à obtenir des nombres entiers.

Exemple 1:

4,5	0,03	2	1,52
4,47	1,97	0,48	2,98
2,5	1,49	2,5	1,49
1,01	1,01	1,01	1,01
0	0	0	0

x 100

450	3	200	152
447	197	48	298
250	149	250	149
101	101	101	101
0	0	0	0

Exemple 2 :

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{6}$	2
$\frac{7}{15}$	$\frac{19}{30}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{15}$
$\frac{11}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{21}{30}$	$\frac{21}{30}$
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	0	0	0

x 30

20	6	25	60
14	19	35	40
5	16	5	26
11	11	21	21
0	10	0	10
10	10	10	10
0	0	0	0

III - Extension du problème : jeu de *n* nombres

Pour ces jeux, nos deux remarques du I, sur la permutation et l'équivalence du jeu par multiplication, sont toujours valables.

1 - Jeu de 2 nombres

Soit a et b deux nombres entiers positifs tels que $a > b$; A la ligne suivante, on a : $a – b$ et $a - b$.

Ces deux nombres sont identiques donc soit ils sont nuls et le jeu est terminé, soit l'un des deux au moins n'est pas nul et les différences à la ligne suivante seront nulles.

Pour 2 nombres, le jeu se termine donc toujours en une ou deux étapes.

2 - Jeu de 3 nombres

1	2	3
1	1	2
0	1	1
0	0	1
1	1	0
0	1	1

3	4	2
1	2	1
1	1	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

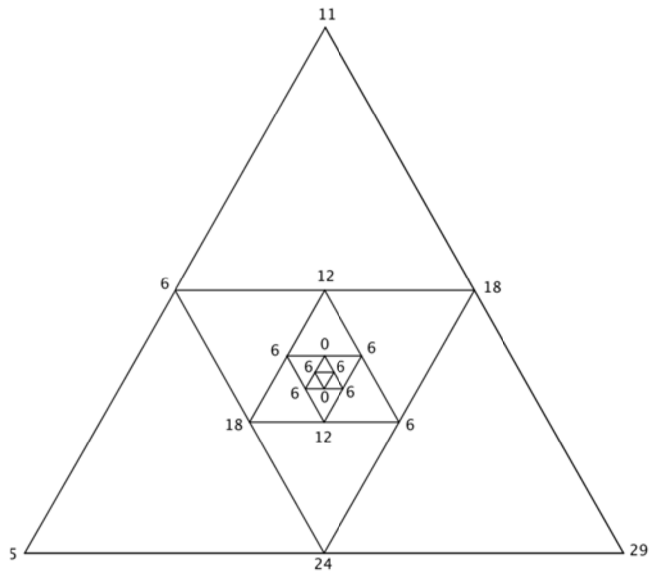
Ces deux exemples font apparaître une ligne qui se répète et qui nous montre que le jeu ne s'arrêtera pas.

Voici un autre exemple :

5	10	22
5	12	17
7	5	12
2	7	5
5	2	3
3	1	2
2	1	1
1	0	1
1	1	0
0	1	1
1	0	1

Là encore une ligne se répète : le jeu ne se termine pas.

Et voici l'autre manière de présenter le jeu : les nombres de départ sont les sommets d'un triangle.



Pour une suite de 3 nombres, on a l'impression que le jeu ne s'arrête jamais. Nous n'avons pas réussi

à le démontrer mais nous pouvons essayer de l'expliquer.
1er cas : Les trois nombres sont identiques a a a
0 0 0

Ce jeu est évidemment gagnant.

2ème cas : Les trois nombres ne sont pas identiques.
S'ils sont tous pairs, on les divise par 2 jusqu'à ce que l'un au moins soit impair.

Voici les cas de figures possibles restants, si on tient compte de notre remarque sur l'ordre des nombres et donc si on enlève les cas qui se ramèneraient au cas étudié par permutation :

P	P	I
P	I	I
I	P	I
I	I	P
P	I	I

P	I	I
I	P	I
I	I	P
P	I	I

Dans ces deux cas, on ne peut pas arriver à 0 0 0 puisqu'on n'arrive jamais à trois nombres pairs.

Il nous reste un dernier cas :

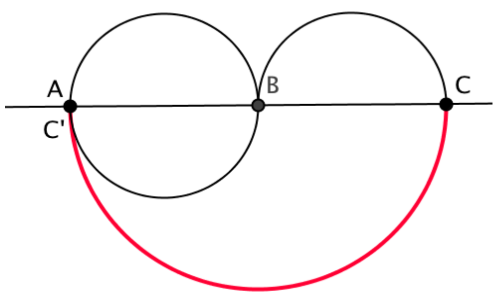
I	I	I
P	P	P

Ici, le jeu pourrait se terminer puisqu'on arrive à 3 nombres pairs.
Exemple :

3	5	1
2	4	2
2	2	0
0	2	2
2	0	2
2	2	0

Le jeu ne se termine pas.

Essayons de comprendre pourquoi 3 nombres non tous égaux ne peuvent donner un jeu gagnant.
Plaçons ces 3 nombres sur une droite graduée, abscisses des points A, B, C . Pour avoir un jeu gagnant il faut le même écart entre les 2 premiers nombres, entre le deuxième et le troisième et entre le dernier et le premier.



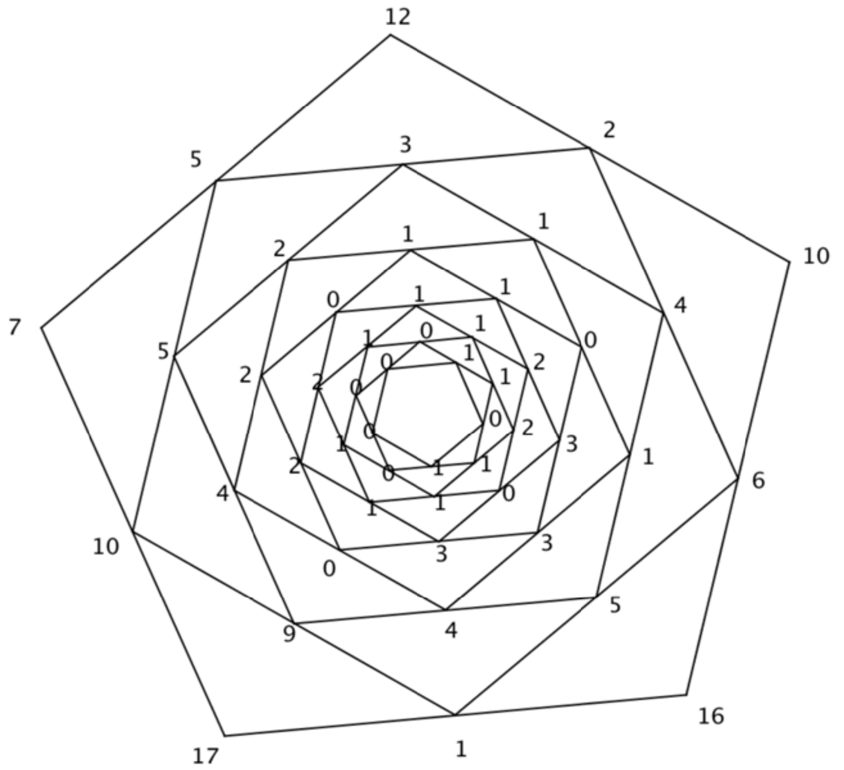
A et B étant placés, on a 2 choix possibles pour placer C : C ou C'. On a AB=BC ou AB=BC' mais la troisième distance AC' ou AC est différente des deux premières.

Par cette représentation géométrique, il nous semble donc que 3 nombres non tous égaux ne pourront jamais donner un jeu gagnant. (4)

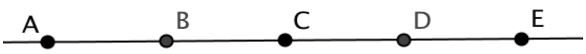
3 - Jeu de 5 nombres

1	2	3	4	5
1	1	1	1	4
0	0	0	3	3
0	0	3	0	3
0	3	3	3	3
3	0	0	0	3

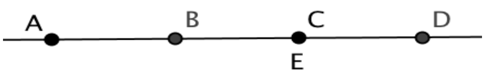
En prenant en compte notre remarque sur la permutation des nombres, on peut dire que cette suite se répète et donc que le jeu ne se terminera pas.



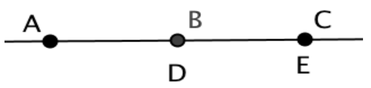
Voici une autre représentation du jeu :
Après plusieurs essais nous n'avons obtenu aucun jeu gagnant.
Reprenons notre représentation sur une droite graduée : nos 5 nombres sont les abscisses des points A, B, C, D et E. Nous avons 8 cas possibles de départ où AB=BC=CD=DE, il faut ensuite regarder pour chaque cas si c'est aussi égal à AE.



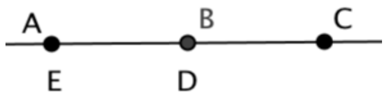
AE=5AB



AE=2AB

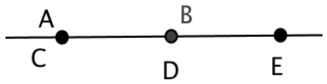


AE=2AB

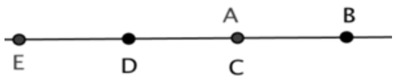


AE=0

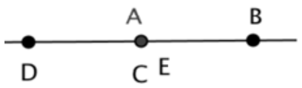
AE=0



AE=2AB



AE=2AB



AE=0

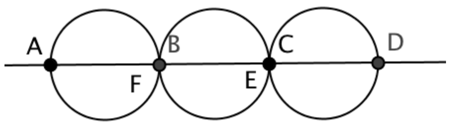
Dans tous les cas nous n'avons pas AB=AE. Les jeux semblent donc être tous perdants avec 5 nombres au départ (non identiques).

4 - <u>Jeu de 6 nombres</u>

1	2	5	4	6	3
1	3	1	2	3	2
2	2	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0

Le jeu ne se terminera pas.

Après plusieurs essais perdants, nous avons trouvé une configuration de jeux gagnants sur la droite graduée :



Voici donc un jeu gagnant :

7	10	13	16	13	10
3	3	3	3	3	3
0	0	0	0	0	0

5 - Jeu de 7 nombres

25	12	2	4	6	10	8
13	10	2	2	4	2	17
3	8	0	2	2	15	4
5	8	2	0	13	11	1
3	6	2	13	2	10	4
3	4	11	11	8	6	1
1	7	0	3	2	5	2
6	7	3	1	3	3	1
1	4	2	2	0	2	5
3	2	0	2	2	3	4
1	2	2	0	1	1	1
1	0	2	1	0	0	0
1	2	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1

Le jeu ne se termine pas.

Comme pour les cas de 3 et 5 nombres, on a l'impression que tous les jeux sont perdants si les nombres de départ ne sont pas identiques.

6 - Jeu de 8 nombres

2	3	5	7	6	10	6	1
1	2	2	1	4	4	5	1
1	0	1	3	0	1	4	0
1	1	2	3	1	3	4	1
0	1	1	2	2	1	3	0

1	0	1	0	1	2	3	0
1	1	1	1	1	1	3	1
0	0	0	0	0	2	2	0
0	0	0	0	2	0	2	2
0	0	0	2	2	2	0	2
0	0	2	0	0	2	2	2
0	2	2	0	2	0	0	2
2	0	2	2	2	0	2	2
2	2	0	0	2	2	0	0
0	2	0	2	0	2	0	2
2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0

Ce jeu se termine en 17 étapes.

Nous avons poursuivi nos exemples en faisant varier le nombre de nombres au départ, et nous avons fait nos calculs à l'aide d'un tableur, ce qui nous a permis de faire de nombreux tests.

La conjecture finale

On pensait au début que les jeux ayant un nombre de valeurs qui était un multiple de 4 se finissaient, mais quand nous sommes arrivés à une suite de 12 nombres, le jeu ne se finissait pas...

En prenant plusieurs exemples à chaque fois, nous sommes allés jusqu'à 64 nombres.

Nous avons trouvé des jeux gagnants pour : 2 nombres, 4 nombres, 8 nombres, 16 nombres, 32 nombres et 64 nombres.

On pense donc que les jeux se terminent quand ils possèdent au départ 2^n nombres. Les jeux ayant un nombre impair de valeurs (non toutes égales) ne se terminent jamais et ceux avec un nombre pair de valeurs se terminent uniquement dans des cas particuliers.

Notes de l'édition

(1) On applique alors une permutation circulaire, c'est-à-dire qu'on décale les nombres sans changer globalement leur ordre.

(2) Le nombre de jeux n'est pas restreint, car il est infini tant qu'on ne limite pas la grandeur des nombres initiaux. Par contre, cette simplification peut permettre de retomber sur des cas déjà étudiés, et restreint alors les calculs à faire.

(3) La suite obtenue par simplification par 2 est effectivement plus petite que la suite des nombres pairs dont elle est issue. Mais il reste à prouver qu'elle l'est également par rapport à la suite des nombres initiaux dans les cas 2, 3, 4 et 5.
Il manque l'argument suivant : chaque suite est composée de nombres inférieurs ou égaux au plus

grand nombre présent dans la suite qui la précède (en effet, l'écart maximal possible est trouvé si ce nombre maximal est précédé ou suivi par un 0).

(4) La preuve est apportée juste avant. A son avant-dernière étape, un jeu gagnant a nécessairement une suite de nombres tous égaux. Or le raisonnement précédent justifie que trois nombres non tous égaux ne permettent pas d'obtenir par différence trois nombres égaux. Il suffit d'appliquer cette même propriété à la nouvelle suite et recommencer autant que nécessaire pour prouver qu'on ne peut pas aboutir à trois nombres égaux quelque soit le nombre d'étapes envisagé.