Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Jeu des boîtes

Année 2018 – 2019

Élèves : Pauline CASTANHEIRA, Pénélope DEMANGE, Alexandre GABARREN (2^{nde})
Établissement : Lycée Marguerite de Navarre, Bourges
Enseignants : Olivier CRÉCHET, Nathalie HERMINIER, Guillaume PELLETIER
Chercheur : Benjamin NGUYEN (INSA Centre-Val-de-Loire)

Introduction : présentation du jeu

Pendant cette année, nous avons étudié le jeu des boîtes. Voici les règles de ce jeu.
Cinquante boîtes, numérotées de 1 à 50 sont placées en ligne sur une table.
De plus, chaque boîte contient un certain montant (en euros) dont la valeur est également inscrite sur le couvercle.
Le jeu se joue à 2, et la règle est la suivante :

à tour de rôle, chaque joueur prend une boîte à l'une des extrémités de la ligne ;
le jeu se termine lorsque toutes les boîtes sont ramassées ;
le gagnant est la personne qui a le plus gros score, et gagne l'ensemble des boîtes.

On considère que les euros dans chaque boîte sont des entiers, mais la distribution au sein des boîtes peut être quelconque.
Notre objectif était de trouver une stratégie gagnante à ce jeu et de créer un algorithme qui permet à l'ordinateur de gagner à tous les coups (1).

I- Connaître le jeu :

Tout d'abord, nous avons fait des parties pour essayer de comprendre le jeu.
Voici un exemple d'une partie avec seulement 8 boîtes:

1	8	7	6	5	4	3	2
15	2	4	11	17	9	13	8

<u>Score :</u>

Joueur 1 : 15+13+17+4=49
Joueur2 : 8+9+11+2=30
Le joueur 1 gagne.

<u>Remarque :</u> Les nombres écrits au dessus de la boîte décrivent l'ordre dans lequel les nombres ont été pris. Par exemple, « 1 » désigne que la boîte en dessous de ce nombre a été prise en premier.

II- Cas avec un nombre fort :

Nous avons remarqué, en faisant quelques parties, qu'il est difficile de trouver une stratégie gagnante. Alors, nous avons simplifié le problème en faisant le cas avec un nombre fort.

<u>Définition d'un nombre fort :</u>

Un nombre fort, noté n_f est une boîte qui, quand on la prend, fait systématiquement gagner la partie. Autrement dit, $n_f > n_1 + n_2 + n_3$ dans le cas de 4 boîtes.

<u>Remarque :</u> n_1, n_2 et n_3 correspondent aux autres boîtes.

<u>Exemple :</u>

0	1	0	0

Dans cette situation, cette boîte est n_f cat 1 > 0 + 0 + 0.

En faisant quelques parties avec le cas du nombre fort, nous avons conclu deux propriétés pour 4 boîtes que nous avons ensuite généralisées.

A) Étude avec 4 boîtes

<u>1ère propriété :</u>

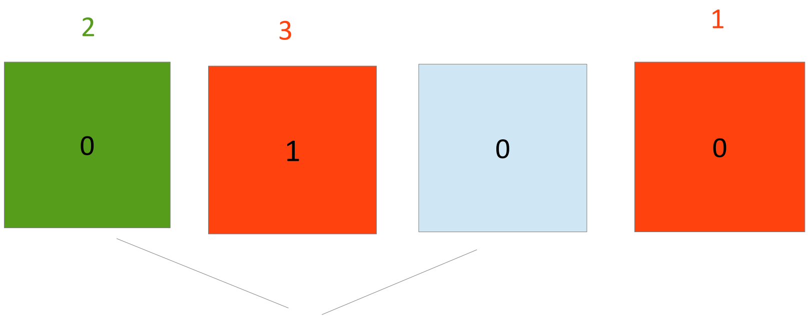
Si n_f est sur un des côtés, alors la première personne gagne.

1	0	0	0

En effet, le premier joueur doit juste prendre la boîte n_f et il gagne.

2^{nde} propriété :

Si n_f n'est pas sur un des côtés alors la première personne gagne.



Dans cette situation, ces boîtes sont n_c.

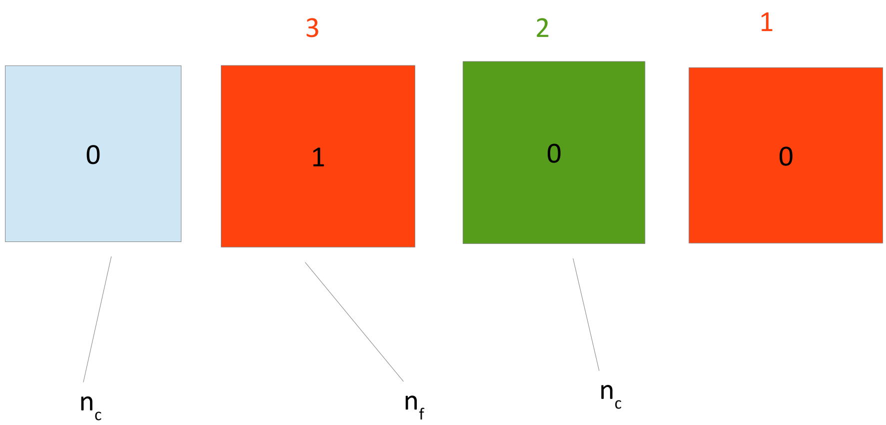
Remarque : Les nombres côtés, noté n_c sont les boîtes se situant à côté de n_f.

En effet, le premier joueur ne doit pas prendre une boîte n_c sinon le second joueur a accès à n_f. Alors le premier joueur doit prendre la boîte à l'opposé de n_c pour que le second joueur soit obligé de prendre une des deux boîtes n_c. Puis le premier joueur doit prendre n_f et il gagne.

Algorithme pour le cas avec un nombre fort :

Après avoir découvert ces propriétés, nous avons procédé à la création d'un algorithme :

```
Localiser nombre fort
Localiser nombre côtés
Répéter jusqu'à obtention du nombre fort :
 Si nombre fort se situe à l'extrémité :
      Alors prendre nombre fort
 Sinon :
      Si nombre côté se situe à l'extrémité gauche :
           Alors prendre le nombre sur l'extrémité droite
      Sinon :
           Prendre le nombre à l'extrémité gauche
```



Ainsi, grâce à cet algorithme, le premier joueur gagne.

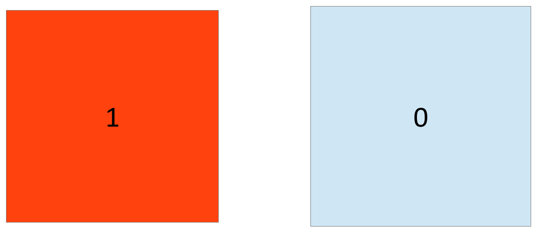
B) Généralisation

<u>Démonstration par récurrence qu'il existe une stratégie gagnante pour tout nombre pair (2n) de boîtes :</u>

Montrons par récurrence qu'il existe une stratégie gagnante avec 2n boîtes pour le premier joueur.

<u>Initialisation pour n=1 :</u>

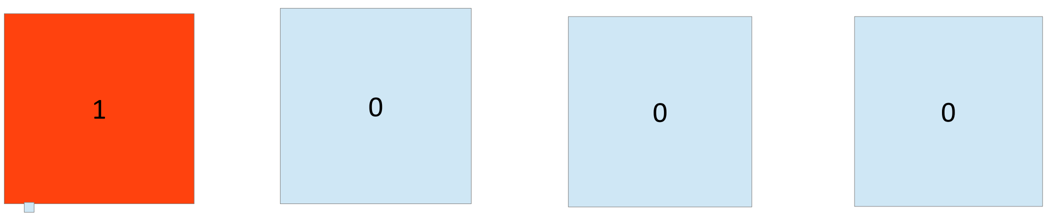
Tout d'abord, dans une disposition à 2 boîtes, il suffit de prendre n_f .



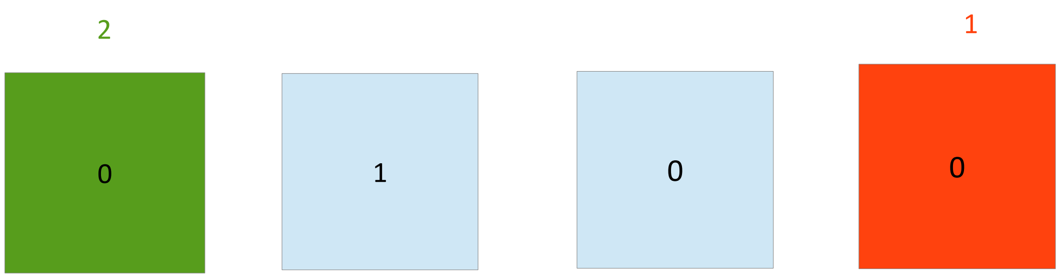
<u>Hérédité</u> :

Soit n un entier strictement positif. Nous supposons qu'il existe une stratégie gagnante avec comme disposition 2n boîtes.
Dans une disposition à 2(n+1) boîtes, il y a trois cas possibles et une stratégie gagnante.

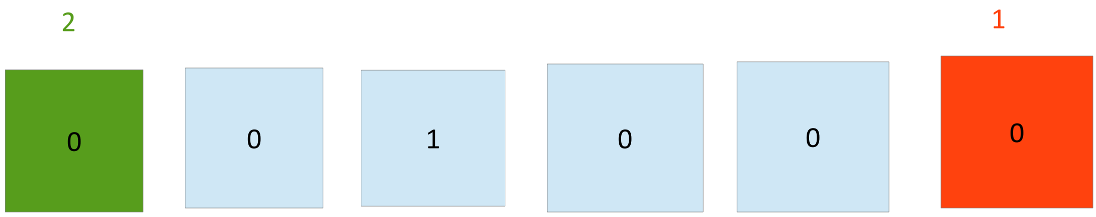
<u>1^{er} cas :</u> En effet, si n_f se situe à l'extrémité, il suffit de prendre le nombre fort.



<u>2ème cas :</u> Si n_f se situe respectivement à la deuxième ou à l'avant dernière position, il ne faut pas prendre respectivement la première boîte ou la dernière boîte pour éviter à l'adversaire d'avoir accès à la boîte gagnante (2);



3ème cas : Si n_f ne se situe ni à la première position, ni à la deuxième position, ni à l'avant-dernière position, ni à la dernière position, on peut prendre n'importe quelle boîte.



Puis, l'adversaire prend une boîte et il ne gagne pas comme il n'a pas accès à n_f. Nous nous retrouvons ainsi avec une disposition avec 2n boîtes où on connaît la stratégie gagnante.

Conclusion :

Nous avons montré que dans toute disposition avec 2 boîtes, il existe une stratégie gagnante.
Puis, nous avons montré que pour tout entier n non nul, s'il existait une stratégie gagnante avec 2n boîtes alors dans une disposition avec 2(n+1) boîtes, il existe une stratégie gagnante.

Donc, pour tout n entier non nul, il existe une stratégie gagnante avec 2n boîtes.

III- Cas général :

Après avoir fait le cas du nombre fort, nous avons cherché à généraliser cette technique à plusieurs boîtes.
Avec le nombre fort, nous avons pu protéger un nombre qui nous faisait gagner donc ici nous avons fait pareil en essayant de protéger plusieurs boîtes à la fois.

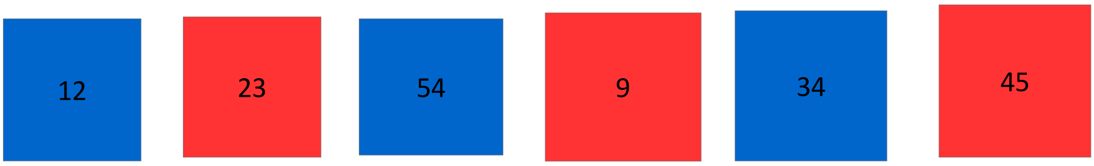
- Tout d'abord, nous avons commencé avec deux boîtes (cas trivial):

Avec deux boîtes c'est le premier joueur qui gagne car il suffit pour lui de prendre le plus grand nombre des deux et qui dans ce cas est le 7.

- Puis nous avons fait avec quatre boîtes :

Avec quatre boîtes, cela commence à se complexifier. Nous allons essayer de protéger plusieurs nombres. Ici nous sommes sûr de gagner si nous prenons le 9 et le 8. Le premier joueur va donc prendre le 9 pour commencer et va essayer de protéger le 8 pour gagner. Le deuxième joueur va prendre soit le 5 soit le 3. Le premier joueur pourra ainsi récupérer par la suite le 8 et aura gagné la partie.
Puis en ayant fait plusieurs parties avec quatre, six et huit boîtes, nous avons remarqué que les boîtes marchaient en quinconce quand on cherchait à protéger des nombres.
On s'est donc aperçu qu'on était en mesure de protéger une boîte sur deux avec cette stratégie. On a ainsi considéré l'ensemble des boîtes paires (couleur rouge) puis celles impaires (couleur bleue).
En comparant ces deux listes de boîtes, on a remarqué que soit les sommes étaient les mêmes soit l'une donnait le meilleur score.

<u>Exemple :</u>



Pour être sûr de gagner, on va faire la somme des boîtes en position impaire (bleu) et les boîtes en position pair (rouge) :

<u>boîtes en position impaire :</u> 12+54+34=100
<u>boîtes en position paire :</u> 23+9+45=77

Donc dans cet exemple, on doit prendre les boîtes en position impaire. Nous sommes sûr de les avoir car, comme dit précédemment, celles-ci marchent en quinconce. Ainsi, nous sommes sûrs d'avoir toutes les boîtes bleues. En effet, si on commence par prendre une boîte bleue, il ne reste que des boîtes rouges à prendre pour l'adversaire et cette configuration se répète à chaque fois.

<u>Donc cette technique permet de gagner à condition d'être le premier joueur ou dans certains cas, d'être à égalité lorsque les deux sommes sont équivalentes.</u>

Conclusion.

L'étude de cas simples et du nombre fort nous a permis de comprendre comment on pouvait protéger une boite puis ensuite plusieurs boîtes ce qui nous a amené ensuite à établir une stratégie gagnante pour le premier joueur. Ce jeu a donc bien une stratégie qui permet de gagner à tous les coups pour le premier joueur. Dans le cas du deuxième joueur, la seule possibilité de gagner est d'espérer que le joueur adverse ne connaît pas la stratégie et va commettre une erreur lors de la prise de la 1ère boite.

Notes d'édition.

<u>(1)</u> Dans cette étude on fait varier le nombre de boîtes, mais en se limitant aux nombres pairs. Cela pourrait être intéressant d'étudier aussi le cas d'un nombre impair de boîtes.
(2) On prend donc la boîte de l'autre côté, et l'adversaire se retrouve dans la même situation que pour le 3e cas : il n'a pas accès à n_f et après qu'il ait joué on retrouve une disposition avec 2n boîtes pour laquelle on connaît une stratégie gagnante.