Jeu de Nim et variantes 2013-2014

Noms des élèves :
Pauline Viossange Tale S1
Marie Carboni Tale S2
Noms des professeurs :
Mme Gotte
Mme Martinelli Bousquet
Nom du chercheur encadrant
M. Chardard (Jean Monnet à St Etienne)
Etablissement
Lycée Jean Puy à Roanne (42300)

En début d'année, nous avons rencontré M. Chardard, enseignant chercheur à l'université Jean Monnet de Saint Etienne. Il est venu nous présenter différents problèmes sur lesquels travailler.

Le sujet sur le thème des jeux de Nim nous a particulièrement intéressées. Voici le sujet qui se présente en trois parties:

Partie 1
Sophie et Luc jouent au jeu suivant:

- Il y a 18 stylos sur la table au début de la partie.
- A chaque tour, on peut prendre 1 à 3 stylos.
- Celui qui prend le dernier stylo a gagné.

Sophie commence
Un(e) des deux joueurs peut gagner à tous les coups. Lequel et comment?

Partie 2
On peut aussi changer la règle de la façon suivante. Cette fois-ci:

- Il y a 15 stylos sur la table au début de la partie.
- A chaque tour, un joueur peut prendre un stylo ou un stylo de plus que le joueur précédent.
- Celui qui prend le dernier stylo a gagné.

Sophie commence
Un(e) des deux joueurs peut gagner à tous les coups. Lequel et comment?

Partie 3
Parfois, on peut savoir qui peut gagner à tous les coups sans pour autant savoir comment. Par exemple, qui peut gagner à tous les coups au jeu suivant:

- Au départ, on a une tablette de chocolat de 10 carrés de long et 5 carrés de haut.
- A son tour, le joueur choisit un carré et le mange ainsi que tous ceux qui sont à la fois à droite et en dessous de ce carré.
- Celui qui mange le dernier carré a perdu.

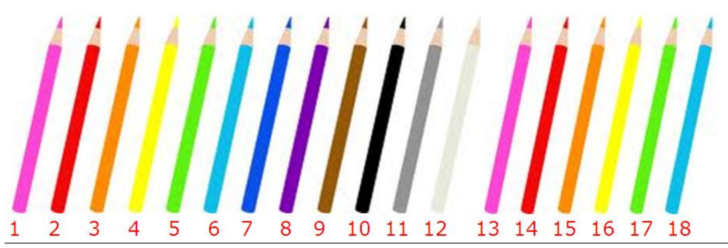
Il y a donc trois jeux différents que nous nommerons Nim I, NimII et NimIII avec des règles différentes énoncées plus haut.

Pour chacun d'entre eux nous avons cherché à démontrer qu'il existait (ou non) des stratégies gagnantes puis pour certains jeux, nous avons énoncé ces stratégies gagnantes.

Partie 1: "Jeu de Nim I"

Nous nous sommes d'abord intéressées au premier jeu dont voici la règle :

Deux joueurs : Sophie et Luc
Il y a 18 stylos sur la table au début de la partie.
A chaque tour, on peut prendre 1, 2 ou 3 stylos.
Celui qui prend le dernier stylo a gagné.
Sophie commence.
Un(e) des deux joueurs peut gagner à tous les coups. Lequel et comment?



Nous avons dans un premier temps joué plusieurs fois d'affilée (en numérotant les stylos de 1 à 18) jusqu'à conjecturer qu'un joueur peuttoujours gagner lorsqu'il prend le stylo n°14. Par conséquent, nous nous sommes penchées plus précisément sur la stratégie à adopter pour obtenir ce stylo. (1)

Lorsque nous trouvions un nouveau stylo qui nous semblait permettre de gagner à tous les coups nous continuions notre stratégie en cherchant un autre stylo (au numéro plus petit) dont l'obtention à son tour garantissait une victoire. Nous nous sommes rapidement rendu compte que l'on pouvait constituer des groupes de 4 stylosen partant du dernier, et obtenir celui qui précèdeces groupes semblait conduire à gagner.

Ainsi nous avonsconjecturé que le joueur qui commenceà jouer (Sophie) semblepouvoir gagner tout le temps à condition de suivre la stratégie gagnante suivante :

- **Le 1^er^joueur doit prendre les 2 premiers stylos**
- **Puis il devra prendre un, deux ou trois stylos pour s'emparer successivement des stylos n°6, n°10, n°14 et n°18.**

Ainsi Sophie est sûre de gagner à tous les coups, voici maintenant la **démonstration** de cette conjecture :

1. Montrons que le joueur qui prend le quatorzième stylo peut toujours gagner quel que soit le jeu de l'autre joueur.

A prendre

I I I I I I I I I I I I I I I I I I

N°14

Ensuite le joueur 2 a trois possibilités:

Si J2 prend le...	Alors J1 prend le ...	
15ième (1 jeton)	(+3 jetons) = 18ième	Il faut que la somme des jetons pris par J1 et J2 soit égale à 4
16ième (2 jetons)	(+2 jetons) = 18ième	
17ième (3 jetons)	(+1 jeton) = 18ième	

2. De la même façon, on peut démontrer que le joueur qui prend le 10ième stylo peut toujours gagner, puisqu'il pourra obtenir le 14ième et ainsi le dernier.

I I I I I I I I I I I I I I I I I I

N°10

3. En suivant ce raisonnement le joueur qui prend le 6ième ou le 2ième stylo peut gagner à tous les coups en appliquant la stratégie donnée ci dessus.

I I I I I I I I I I I I I I I I I I

N°2 N°6 N°10 N°14N°18

<u>Conclusion :</u> le joueur 1 peut gagner à tous les coups. Une stratégie gagnante pour J1 est :

- Prendre les deux premiers jetons (il en reste 16)
- Puis à chaque tour :

Si J_2 prend	alors J_1 prend	Total
1	3	4
2	2	4
3	1	4

(2)

Partie 2: "Jeu de Nim II"

Nous nous sommes ensuite penchées sur le deuxième jeu de Nim dont voici la règle:

2 Joueurs : Sophie et Luc

Il y a 15 stylos sur la table au début de la partie.

A chaque tour,

un joueur peut prendre un stylo ou un stylo de plus que le joueur précédent

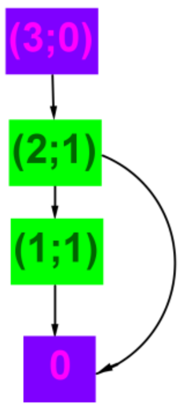
Celui qui prend le dernier stylo a gagné. Sophie commence.

Un(e) des deux joueurs peut gagner à tous les coups. Lequel et comment ?

Comme pour le jeu de Nim I, nous avons tout d'abord testé le jeu un grand nombre de fois pour essayé d'observer des stratégies gagnantes. Comme nous étions quelque peu en difficulté, M. Chardard nous a conseillé de réduire le nombre de stylos. Nous avons donc commencé par tester le jeu **avec 3 stylos puis 4, 8 et pour finir 15.**

Avec 3 stylos

M. Chardard nous a montré une méthode de représentation du jeu à l'aide d'un arbre comme ci-dessous :



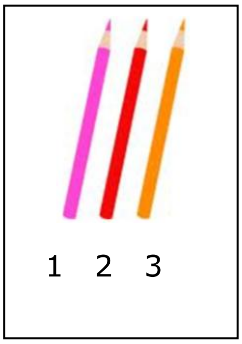


Schéma des différentes possibilités du jeu de Nim avec 3 stylos

Lorsqu'on observe un couple de nombres, celui de gauche correspond au nombre de stylos encore présents sur la table, et celui de droite au nombre de stylo pris par le dernier joueur.

Le couple (**3** ;**0**) signifie qu'il y a **trois** stylos sur la table et que **zéro** (aucun) n'a été pris précédemment.

Les flèches représentent les choix possibles, par exemple, il n'y a qu'une seule flèche qui part de (3 ;0) car le premier joueur n'a qu'une possibilité pour jouer, il est obligé de ne prendre qu'un stylo pour commencer. Nous obtenons donc la position (2 ;1).

Pour le joueur suivant, il peut prendre :

- 1 stylo ce qui mènera au cas (1;1) ce qui signifie qu'il resteraalors un stylo sur la table.
- ou bien il peut en prendre 2 ce qui le mènera au cas « 0 », qui signifie qu'il aura gagné, puisque le but est de prendre le dernier stylo.

Une fois le schéma établi, nous l'avons observé en partant du bas(3) pour conjecturer quelles positionssemblent ou non gagnantes (nous l'avons fait apparaître grâce aux couleurs des cases).

Nous avons conjecturé que : Un joueur qui débute son tour sur une caseviolette semble en situation« perdante »et celui qui débute son tour sur une caseverte semble en situation « gagnante ». (4)

Démonstration :
La case « 0 » est obligatoirement perdante puisqu'il n'y a plus de stylos à prendre, donc le joueur qui débute avec la table « vide » a forcément perdu.

La case **(1;1)** est **gagnante** car elle mène à une case violette, ce qui signifie que si l'on débute sur cette case, on peut mener le joueur suivant à une situation perdante.

La case **(2;1)** est **gagnante** également pour la même raison, elle mène à une case violette.

Et quant à la case **(3;0)** elle est **perdante** car elle mène seulement à une position gagnante donc le joueur qui débute sur cette case conduit le joueur suivant à une position gagnante.

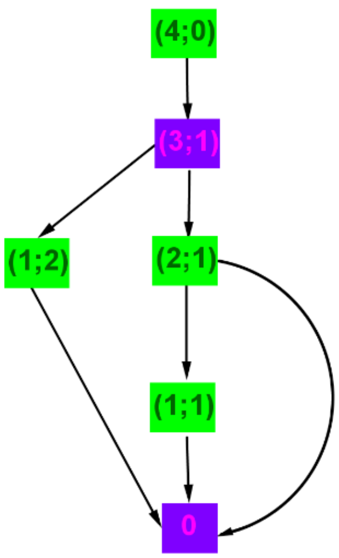
La stratégie pour gagner est donc d'emmener le joueur qui suit sur une case perdante (case violette).

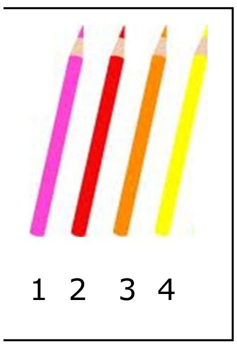
<u>Conclusion :</u> dans le jeu avec 3 stylos, c'est le joueur 2 qui peut toujours gagner (en adoptant la stratégie donnée), car il pourra mener le joueur 1 (celui qui commence) sur la dernière case perdante 0.

Avec 4 stylos

Pour continuer, nous avons étudié le jeu lorsqu'il y a 4 stylos, et voici

le schéma qui lui correspond:





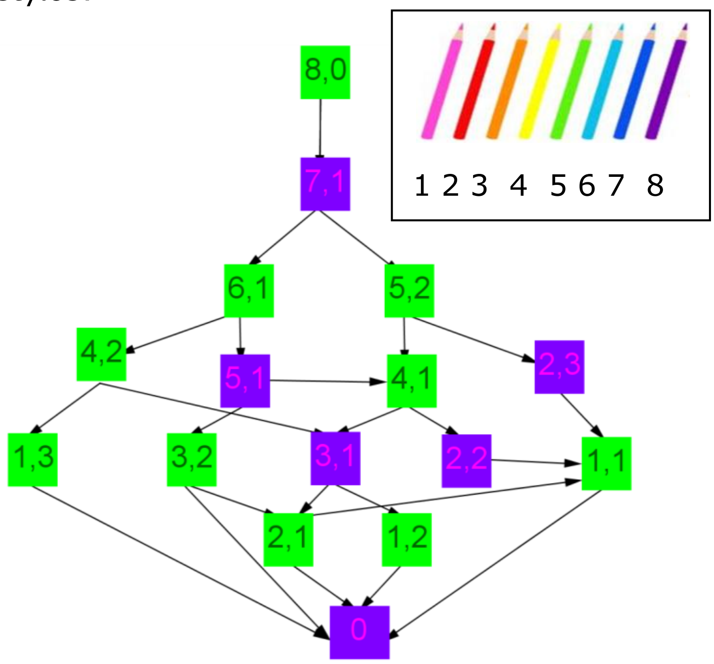
<u>Stratégie gagnante du jeu de Nim 4 stylos</u>

Nous avons déterminé la couleur « perdante » ou « gagnante » de chaque position.

<u>Conclusion :</u>Le joueur qui commence peut gagner à tous les coups s'il applique la stratégie suivante : conduire le joueur 2 sur une case violette quel que soit ce qui vient d'être joué.

Avec 8 stylos

Voici maintenant le schéma des différentes possibilités lorsque le jeu comporte 8 stylos:



<u>Stratégie gagnante du jeu de Nim 8 stylos</u>

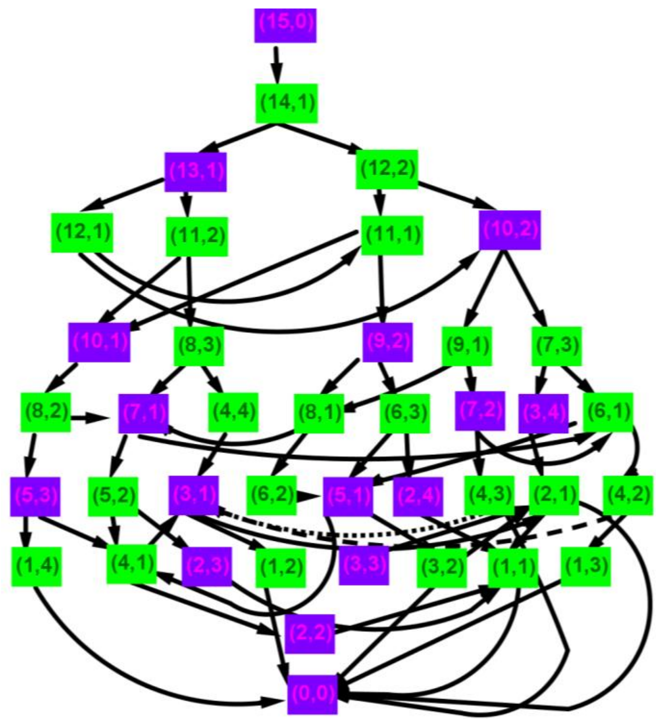
<u>Conclusion :</u> Dans ce cas là également, ce sera le joueur 1 qui peut gagner à tous les coups en appliquant la stratégie suivante : conduire le joueur 2 sur une case violette quel que soit ce qui vient d'être joué.

Avec 15 stylos

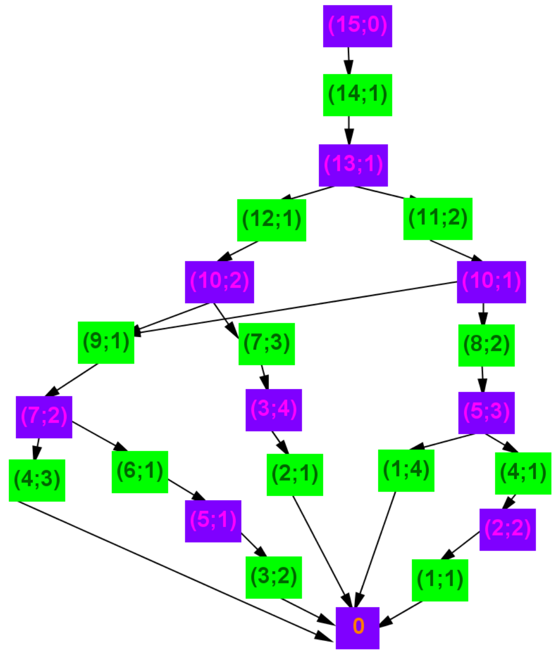
(Situation proposée au départ)

Ensuite nous avons abordé ledernier cas, qui était celui donné au départ.

Ce schéma a été beaucoup plus complexe que les précédents à construire !Voici le schéma non simplifié de tous les coups possibles du jeu avec 15 stylos:



Stratégie gagnante du jeu de Nim 15 stylos



Stratégie gagnante du jeu de nim 15 stylos **(simplifié)**

Conclusion : Dans cette situation (15 stylos), ce sera le joueur 2 qui peut gagner à tous les coups en appliquant la stratégie suivante : conduire le joueur 1 sur une case violette quel que soit ce qui vient d'être joué.

Comme le schéma précédent est compliqué à lire nous l'avons simplifié, pour mener à un schéma qui donne la stratégie gagnante à suivre pour le joueur 2 s'il veut gagner.

Pour cela nous nous sommes mises à la place du second joueur et nous avons conservé seulement tous les chemins gagnantspossibles pour lui en suivant la stratégie : amener le joueur 1 à une case violette.

Nos schémas permettent de **démontrer** que les stratégies sont gagnantes car il s'agit d'un raisonnement par disjonction de cas. Nous avons raisonné en séparant les différentes éventualités possibles, c'est-à-dire en étudiant tous les cas de figures possibles.

Partie 3: "Jeu de Nim III" ou "Jeu de Chomp"

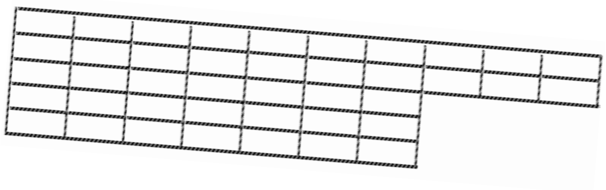
Finalement, nous nous sommes intéressées à un dernier jeu appelé « jeu de Chomp » :

Parfois, on peut savoir qui peut gagner à tous les coups sans pour autant savoir comment :

Par exemple, qui peut gagner à tous les coups au jeu suivant ?

Au départ, on a une tablette de chocolat de 10 carrés de long et 5 carrés de haut. A son tour, le joueur choisit un carré et le mange ainsi que tous ceux qui sont à la fois à droite et en dessous de ce carré.

Celui qui mange le dernier carré a perdu.



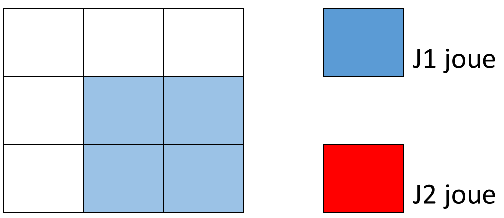
Nous avons trouvé un site internet, nous permettant de jouer des parties de ce jeu contre un ordinateur (www.jeux-et-mathematiques.davalan.org). Cela nous a permis de mieux comprendre le jeu en question. Par la suite nous avons observé les mouvements qu'opéraient l'ordinateur, pour comprendre comment gagner et quelles techniques revenaient à chaque fois sur un rectangle 10x5.

Malheureusement le logiciel ne propose qu'une partie des possibilités de jeu et un joueur « réel » pourrait sans doute adopter d'autres stratégies.

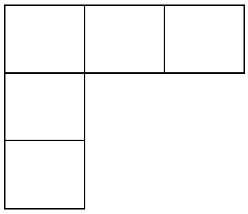
Pour simplifier le début de nos recherches, nous avons réduit la taille de la tablette à un carré.

Le cas du carré

Nous avons choisi d'étudier le cas d'une tablette carrée car l'ordinateur nous ramène parfois à cette situation pour gagner. Nous avons réussi à conjecturer une stratégie gagnante pour le joueur 1, et ce peu importe la taille du carré. Nous vous la présentons sur le schéma si dessous avec un carré de taille 3x3.

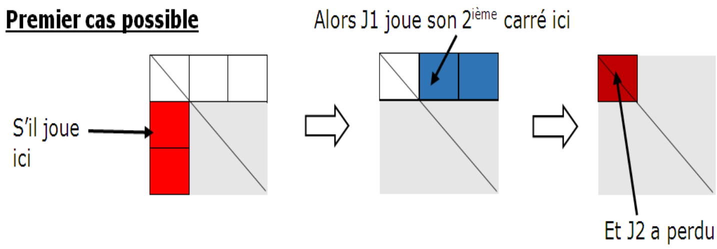


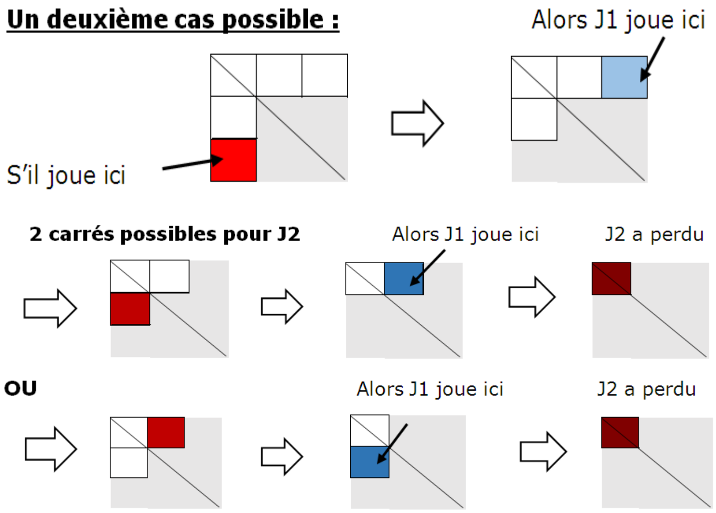
La première chose à faire consiste à prendre la case qui ramènele jeu à ce schéma en formede L.



Par la suite, la stratégie gagnante que J1 doit adopter consiste àjouer symétriquement par rapport à la droite tracéece qu'a joué le 2ième joueur.

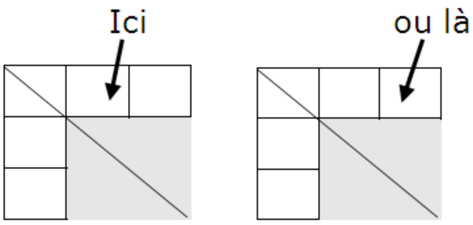
A partir de la forme obtenue en « L », J2 a quatre possibilités de jeu pour ne pas perdre tout de suite :





Deux autres cas sont encore possibles :

Ces situations sont alors les mêmes que celles données au-dessus par symétrie :



Nous avons donc trouvé une stratégie gagnante pour J1 lorsque la tablette de chocolat a pour dimensions 3x3. Cette stratégie est démontrée par disjonction des cas.

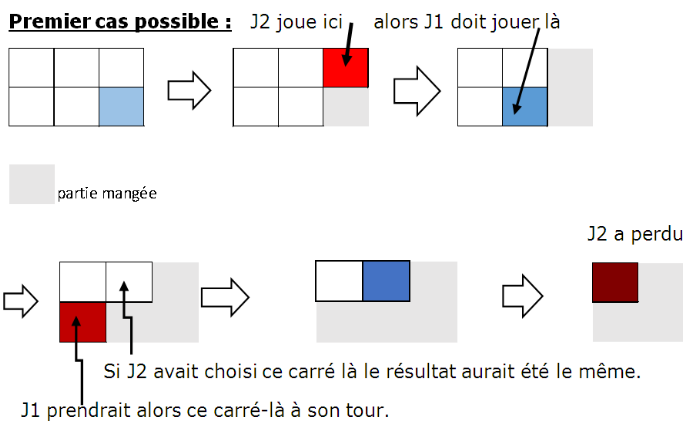
Lorsque le carré a une taille quelconque nxn, on conjecture que la stratégie gagnante est similaire.

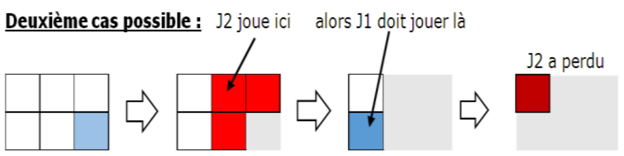
Nous ne l’avons pas démontrée.

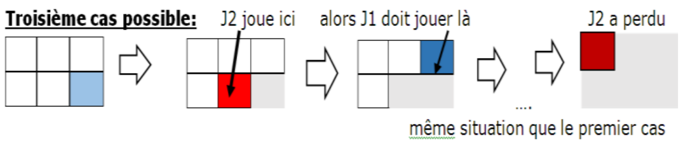
Le cas du rectangle 3x2 :

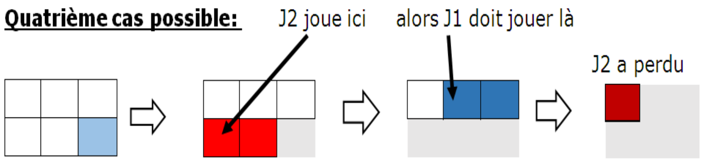
Ensuite, nous avons remarqué que pour gagner, lorsque le logiciel n’utilisait pasla « situation du carré », il se ramenait parfois à un rectangle de 2 lignes ou de 2 colonnes. Nous avons donc étudié comment gagner à tous les coups avec lorsque la tablette est un rectangle 3×2. **Montrons le joueur qui commence à jouer peut gagner à tous les coups :**

Si J1 s’empare du carré en bas à droite, il reste 5 carrés, donc quatre cas sont possibles pour ne pas perdre immédiatement ensuite :









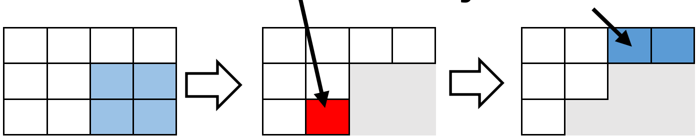
Nous avons donc trouvé une stratégie gagnante pour J1 lorsque la tablette de chocolat a pour dimensions 3x2. Cette stratégie est démontrée par disjonction des cas.

Le cas du rectangle 4x3

Nous avons ensuite agrandile rectangle d’une colonne, pour complexifier petit à petit. Pour gagner notre stratégie consiste à ramener la situation à une autre expliquée précédemment.

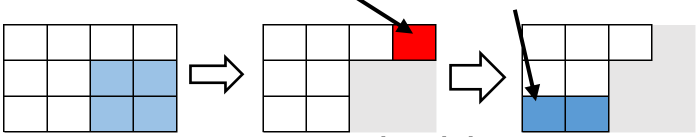
Si J1 s’empare du carré situé sur colonne 3et la ligne 2, il reste alors huit carrés donc sept cas sont possibles pour ne pas perdre immédiatement ensuite :

Cas 1 J1 joue alors



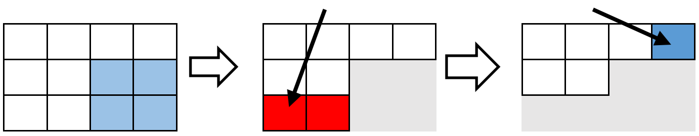
On reconnait la situation exposée précédemment

Cas 2 J1 joue alors



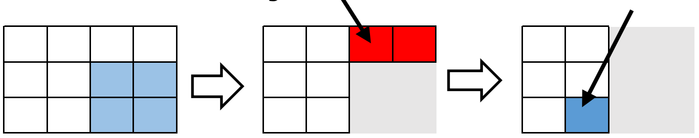
On reconnait la situation exposée précédemment

Cas 3 J1 joue alors



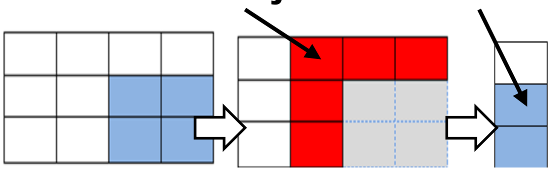
On reconnait la situation exposée précédemment

Cas 4 J1 joue alors

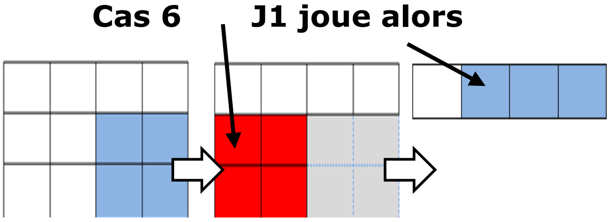


On reconnait la situation exposée précédemment

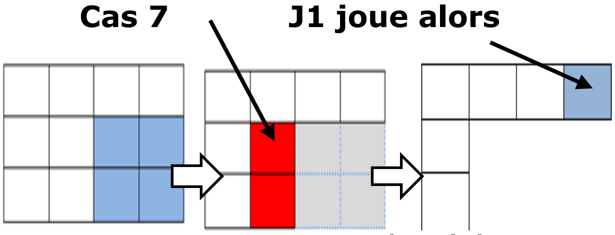
Cas 5 J1 joue alors



Cas 6 J1 joue alors



Cas 7 J1 joue alors



On reconnait une situation exposée précédemment

Nous avons donc trouvé une stratégie gagnante pour J1 lorsque la tablette de chocolat a pour dimensions 4x3. Cette stratégie est démontrée par disjonction des cas.

Nous n'avons pas eu le temps d'étudier le cas où la tablette de chocolat a pour dimensions 10 carrés de long et 5 carrés de hautet nous n'avons pas pu démontrer que le joueur qui jouait en premier pouvait gagner à tous les coups (sans passer par le détail d'une stratégie qui serait gagnante).

Néanmoins nous sommes satisfaites d'avoir pu mener des recherches dans le cadre de cet atelier cette année. Nous remercions nos professeurs et M. Chardard de nous avoir accompagnées et encouragées.

Notes d'édition :

(1) On considèrera que les joueurs prennent les stylos dans l'ordre croissant de leur numéro.

(2) C'est implicite dans la rédaction mais on peut noter que la stratégie présentée ici reste valide quel que soit le nombre de stylos.

(3) En partant de la position finale 0, pour être plus précis.

(4) Il aurait été bien de définir les notions de situations gagnantes et perdantes : il s'agit ici de gagnant et perdant pour le joueur qui va jouer.