

# Jeux de Hex et stratégie gagnante

Année 2013- 2014

**Elèves de 4<sup>ème</sup>** : Pautet Léonard, Eyraud Cyprien, Alix Victor, Dambrune Raphaël, Trémolières Vincent, Archambaut Yann, Kaczmarzuk Benoit.

**Etablissement** : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).

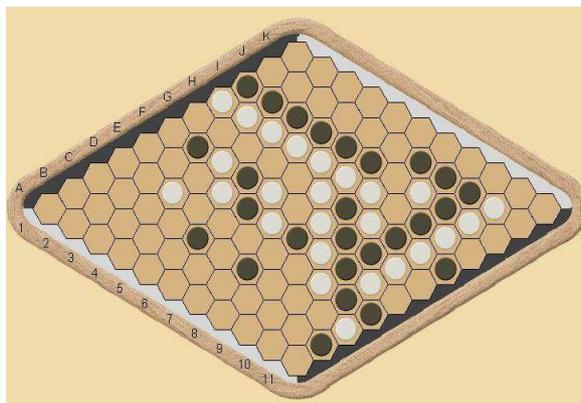
**Enseignants** : Claudie ASSELAIN, Florence FERRY et Nicolas SEGARRA.

**Chercheur** : Céline Abraham.

## Le sujet

Nous jouons à 2 sur un plateau en forme de losange composé d'hexagones. Il y a autant de cases sur les côtés que nous voulons mais le plus courant des plateaux est constitué de 11 cases sur 11 cases. Deux côtés opposés du plateau sont blancs et les deux autres sont noirs. Le but du jeu est de relier les deux côtés de sa couleur (avec des pions de sa couleur) avec une ligne continue de pions. Y a-t-il une stratégie gagnante ?

Exemple de plateau :



## Le sommaire

**I – Etude des différentes tailles de plateaux : du 2x2 au 5x5.**

**II – Généralisation au plateau de taille  $n \times n$  et pistes de stratégie.**

Toutes les dimensions de jeu sont possibles mais la plus couramment utilisée est celle composée de 11 hexagones sur l'une des dimensions.

Nous allons étudier des pistes de stratégie en commençant par étudier des plateaux de tailles plus petites.

On supposera dans tout l'article que le joueur possédant les pions noirs commence. On notera ce joueur N et l'autre joueur B. Les 2 traits noirs en dehors du plateau représentent les côtés que doit relier le joueur possédant les pions noirs les 2 côtés sans trait représentent ceux du joueur possédant les pions blancs.

## **I - Etude des différentes tailles de plateaux : du 2x2 au 5x5**

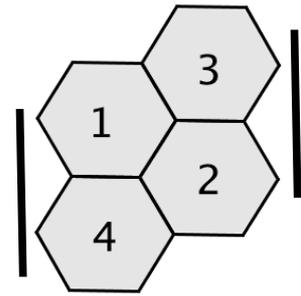
## 1 – Plateau du 2x2

Nous avons numéroté les cases de 1 à 4.

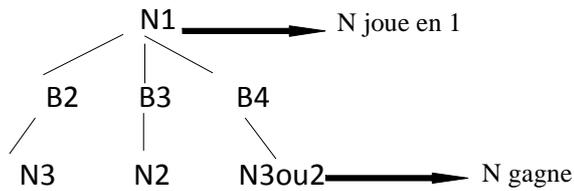
Pour pouvoir gagner **le premier joueur doit jouer sur les cases 1 ou 2**. En effet :

- Si N joue en 1 alors B joue en 2, 3 ou 4 :
  - Si B joue en 2 alors N joue en 3 et gagne
  - Si B joue en 3 alors N joue en 2 et gagne
  - Si B joue en 4 alors N joue 2 ou 3 et gagne
- Si N joue 2 alors, on répète le même raisonnement. Les cases 1 et 2 jouent un rôle symétrique.

Donc N gagne toujours.



Nous pouvons aussi représenter cette démonstration par un arbre des possibilités :



Au bout de chaque chemin N gagne.

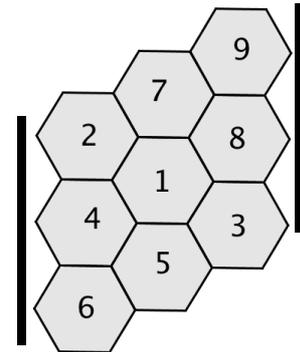
## 2 – Plateau du 3x3

Nous avons numéroté les cases de 1 à 9.

Pour gagner **le premier joueur doit jouer sur la case 1**.

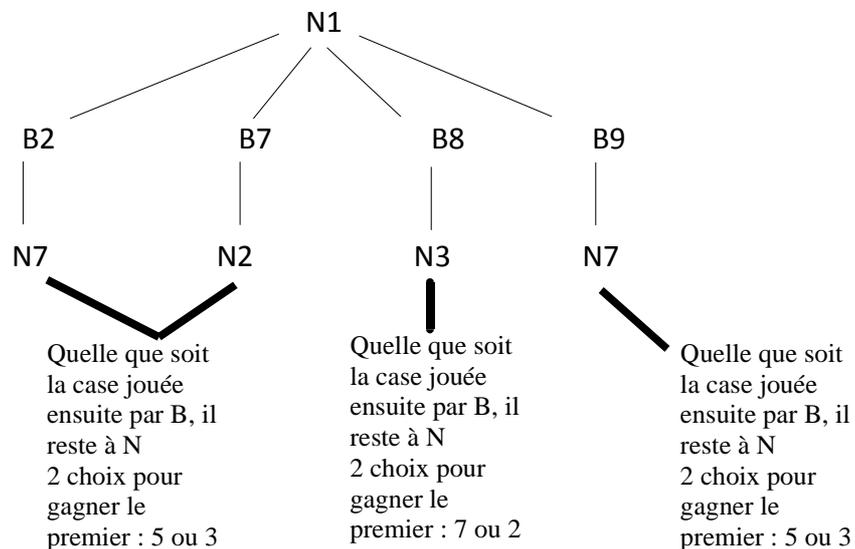
Donc :

- Si B joue 7, alors N joue 2 et inversement.
  - Si B joue 5, alors N joue 3 et inversement.
  - Si B joue sur 4, 6, 9 ou 8 alors N joue 2, 7, 5 ou 3 indifféremment.
- N est à un coup de la victoire ; en reprenant nos coup précédents, il gagne toujours.



(1)

Etudions l'arbre des possibilités : nous n'étudions que 4 branches, les autres ayant un rôle symétrique (2/3, 7/5, 8/4, 9/6).



Une stratégie apparaît : avoir toujours 2 cases disponibles entre le pion placé au centre du plateau et le bord de son camp. Dès que B occupe l'une des 2 cases, N joue sur l'autre.

### 3 – Plateau du 4x4

Pour ce plateau, nous n'avons pas pu faire d'arbre, il était vraiment trop grand.

**Le premier joueur doit jouer sur la petite diagonale du 2X2 du milieu : case 1 ou 2.** Les cases 1 et 2 jouent un rôle symétrique .

On étudie le cas où le joueur N joue 1 (s'il joue sur 2 le raisonnement serait identique avec les cases jouant le même rôle) : il a alors deux cases de marge, 6 et 7 pour atteindre son camp d'un côté.

- Si B joue 6 à un moment de la partie, N joue 7 et inversement.

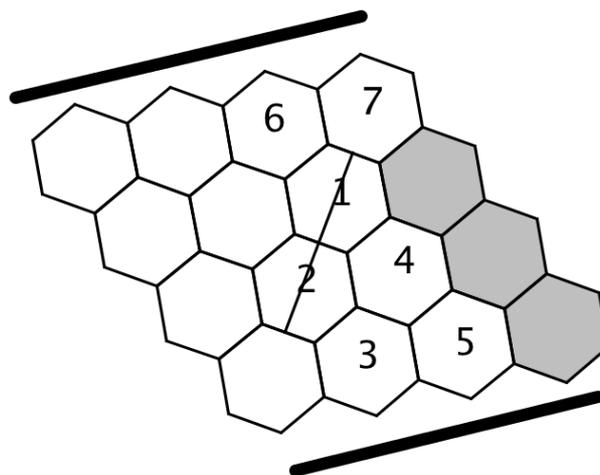
- Si B joue une des cases blanches ou 2, N joue 4 et aura gagné le premier puisqu'au coup suivant il aura les 2 cases de marge pour finir son chemin : 3 ou 5.

- Si B joue une case grise ou 4, N joue 2 et aura gagné le premier puisqu'au coup suivant il aura les 2 cases de marge pour finir son chemin : 3 ou la case blanche adjacente à 3.

- Si B joue 3 (c'est le coup le plus judicieux pour B pour contrer N), N joue alors sur la case grise du milieu (adjacente aux cases 4 et 5) : cette case permet de faire la connexion certaine avec 1 et avec son côté en bas du plateau.

- Enfin, si B joue en 5, N joue en 3 et assure la connexion avec 1 et son côté en bas.

On a ainsi étudié tous les cas de jeu pour B au second coup et N gagne toujours.



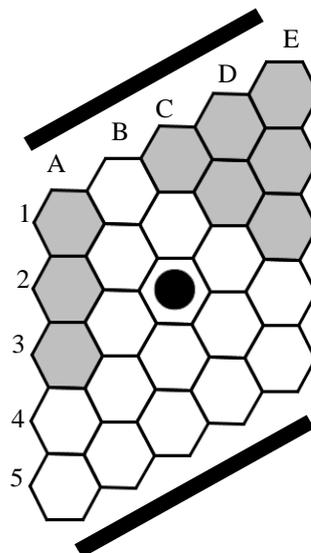
### 4 – Plateau du 5x5

**Le premier joueur doit jouer sur la case du milieu.**

Il y a une symétrie centrale par rapport à la case du milieu.

N joue en **C3**. Nous étudions toutes les cases où peut jouer B ensuite.

- Si B joue en **C4** alors N joue en **D4** et inversement. Au tour suivant, N a 2 cases de marge pour relier son camp.
- Si B joue en **B2** alors N joue en **C2** et inversement. Le même raisonnement que le point précédent s'applique.
- Si B joue sur une case grise alors N joue B1 ce qui lui permet de relier son camp avec les cases B2 ou C2 ; de plus N empêche B de faire son chemin en haut du plateau.
- Si B joue **A4, A5, B3, B4, B5, C5, D3, E4** ou **E5** alors N joue D5 et nous avons le même raisonnement que le point précédent.



Il nous reste alors deux cases à étudier (qui jouent un rôle symétrique) : **B1** et **D5**.

- Si B joue sur D5, N jouera sur B4 car il aura deux cases de marge B3 et C4 pour relier ces deux pions, et B5 et C5 pour relier son camp. Il est donc assuré de faire son chemin.
- Si B joue B1, nous avons le même raisonnement : N joue en D2 et a gagné.

N gagne donc toujours.

## II – Généralisation au plateau de taille $n \times n$ et pistes de stratégie.

Des stratégies pour gagner se sont dégagées de nos recherches et de nos nombreux jeux.

### 1) Premier coup à jouer

- Si le plateau a un nombre pair d'hexagones sur l'un de ses côtés : le premier joueur semble avoir un avantage s'il joue sur la petite diagonale du 2x2 du milieu.
- Si le plateau a un nombre impair d'hexagones sur l'un de ses côtés : le premier joueur devra jouer sur la case du milieu.

### 2) Au cours de la partie

Laisser 2 cases de marge entre 2 pions (les 2 pions seront alors forcément reliés, l'adversaire ne pourra pas empêcher la connexion de se faire) et en même temps, empêcher l'autre de faire son chemin en mettant en place la stratégie des 2 cases de marge du côté ou l'adversaire essaie de construire son chemin.

Le joueur qui joue en premier a toutes les chances de gagner pour les plateaux plus petits que le 9X9 s'il joue avec notre stratégie. (2) Pour des plus grands plateaux, notre stratégie reste intéressante mais ne nous permet pas de gagner à coup sûr : l'autre peut faire son chemin avant nous, en jouant plus loin, en jouant la stratégie et en nous bloquant à son tour. Les 2 joueurs peuvent gagner.

Remarques :

- Même pour des grands plateaux, il semble que le premier joueur ait un avantage s'il joue sur la case du milieu (dans les plateaux impairs) c'est pour cela que dans les compétitions, on interdit parfois la case du milieu pour le premier coup.
- Il ne peut y avoir 2 vainqueurs. En effet, si un joueur a gagné, c'est qu'il a fait un chemin qui relie ses

2 côtés. Ce chemin ne peut être traversé, les 2 côtés adresses ne peuvent donc pas être reliés.

- Nous avons essayé de trouver des jeux qui seraient « match nul » mais nous n'avons pas réussi. Nous pensons qu'il y a forcément un gagnant mais nous n'avons pas réussi à le démontrer ; nous pouvons essayer de l'expliquer : pour que le joueur 1 ne gagne pas, il faut qu'il soit bloqué par le chemin du joueur 2 qui a fait une ligne entre les 2 côtés blancs, il relierait ainsi ses 2 côtés noirs ; c'est alors 2 qui gagne.

### Notes d'édition

- (1) Il semble que les blancs et les noirs sont inversés sur le dessin.
- (2) Cette affirmation est prouvée dans cet article uniquement pour les plateaux jusqu'à la taille 5x5.