

Le jeu de HEX **2013-2014**

Par Roxana NEMES, Aiana MELNIC et Ionuț COVACI de classe 11 (équivalent terminale) du Colegiul National Emil Racovita de Cluj (Roumanie) et Julia CLAPASSON, Margot ISSERTINE, Thaïs MATTANA, Tom FERARI et Justin FINE, élèves de seconde du lycée d'Altitude de Briançon (France)

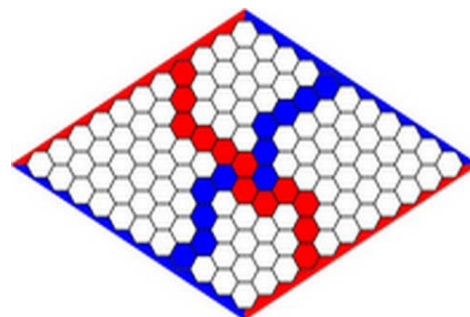
Établissements : Colegiul Național Emil Racoviță (Cluj / România) avec Lycée d'Altitude de Briançon (France)

Enseignants : Ariana Văcărețu (Roumanie) et Mickaël Lissonde et Hubert Proal (France)

Chercheurs : Madame Adela Lupescu (Université Bades – Bolyai de Cluj-Napoca), Messieurs Camille PETIT (Université de Fribourg) et Yves PAPEGAY (INRIA-Sophia Antipolis)

Présentation du sujet

Le jeu de Hex se joue sur un damier en forme de losange dont toutes les cases sont hexagonales. Il y a un joueur bleu et un joueur rouge. Chaque joueur, à tour de rôle, colorie une case du damier avec sa couleur. Le but du jeu, pour le joueur rouge, est d'arriver à relier les deux côtés rouges du damier par un chemin constitué de cases rouges et vice versa pour le joueur bleu. Mettre en place une stratégie gagnante.



Résultats obtenus

Pour commencer nous avons essayé de trouver une stratégie gagnante en comptant le nombre de combinaisons possibles. Par la suite nous avons développé une stratégie pour que le joueur qui commence soit sûr de gagner (plateau impair x impair), mais cette stratégie n'est pas facile à expliquer.

Valorisations des travaux

Les deux groupes ont présenté leurs travaux lors de la semaine des maths. Ils ont animé conjointement leur stand lors du congrès MeJ de Lyon 2014 où ils ont aussi fait un exposé commun.



*Les groupes de Cluj et Briançon
lors de leur présentation au congrès de Lyon*

I. Décompte du nombre de combinaisons

La première démarche pour essayer de trouver une stratégie gagnante a été de lister toutes les combinaisons possibles. Il va de soi que nous avons considérablement réduit la forme du plateau. Par exemple pour un plateau de 3x3, nous avons alors 9 cases, au maximum les rouges (qui commencent) posent 5 pions et les bleus 4. Nous essayons de montrer que dans ce cas il y a toujours un joueur gagnant. Nous avons essayé de réaliser un arbre où chaque « colonne » correspond au numéro de la case et ensuite B pour bleu et R pour rouge (figures 1, 2 et 3).

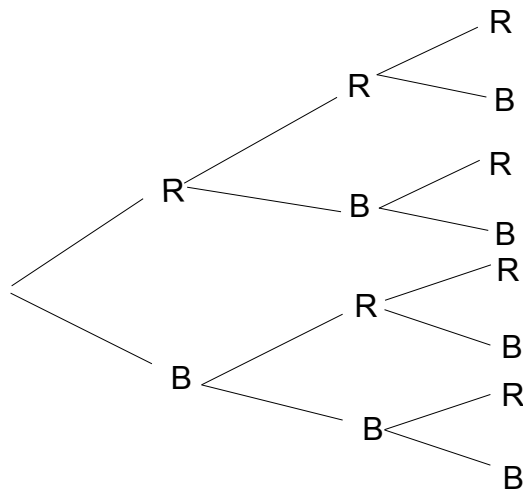


Figure 1 : début de la réalisation de notre arbre

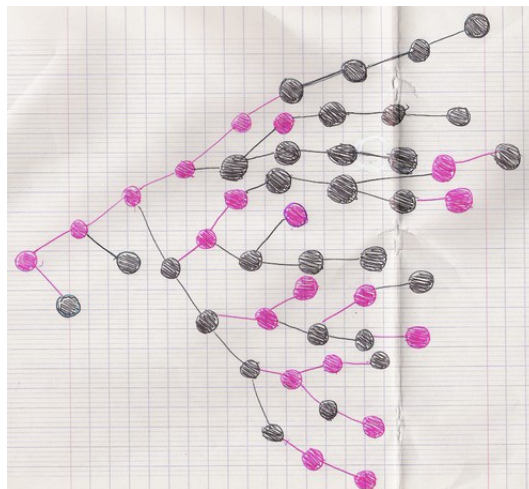


Figure 2 : copie du cahier de recherches

Malheureusement la construction de l'arbre s'est avérée assez compliquée. Nous sommes arrivés à trouver pratiquement 85 positions possibles, il reste à savoir si toutes sont gagnantes.

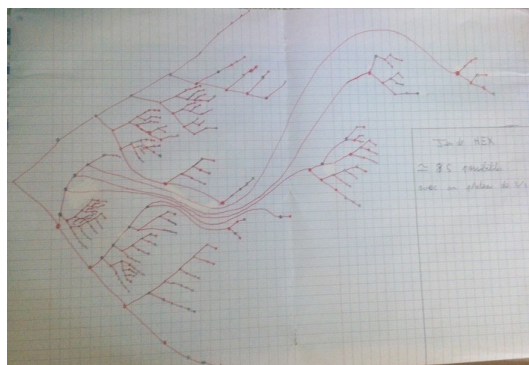


Figure 3 : copie du cahier de recherches

Lors de discussions avec notre enseignant, il nous a proposé une manière plus « simple » pour compter ces positions.

Nous avons 9 cases où l'on doit placer 5 pions rouges (par déduction, les cases qui ne seront pas avec un pion rouge seront avec un pion bleu).

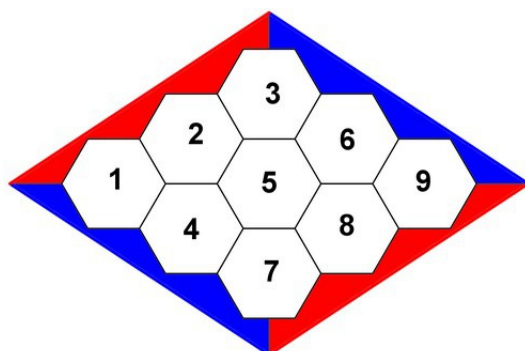


Figure 4 : numérotation des cases pour un plateau de 3x3

Si nous numérotions les cases comme ci-dessus (figure 4), pour compter le nombre de cas possibles il reste à remplir chaque ligne du tableau de l'annexe 1 par 5 R (rouge)

Avec ce tableau, nous avons constaté qu'il y avait toujours un gagnant. Sur les 126 cas possibles, les rouges gagnent 84 fois et les bleus 42.

Autrement dit, si nous plaçons au hasard les 5 pions rouges et les 4 pions bleus, la probabilité de gagner des rouges est de $84/126=2/3$ et des bleus $42/126=1/3$

Nous avons abandonné cette piste parce que nous avons conclu que cela n'aidait pas à trouver la stratégie gagnante, le décompte du nombre de cas possibles était compliqué et ne nous apportait rien sur la stratégie à suivre (figure 5).

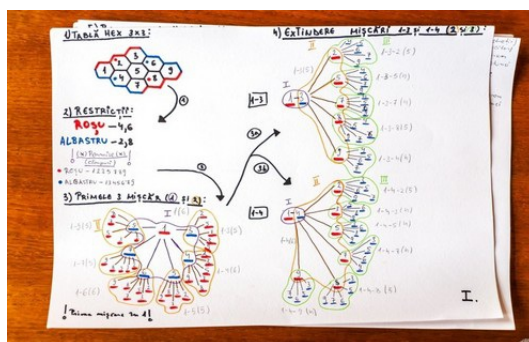


Figure 5 : copie des panneaux d'exposition sur le cas 3x3

II. Recherche d'une stratégie

Nos recherches sur les combinaisons pour les jeux de 3x3 nous ont permis de trouver une stratégie gagnante.

Si le premier joueur place son pion dans la case centrale, son adversaire ne sera pas en mesure de le bloquer puisqu'il aura toujours une case libre qui assurera sa victoire.

3x3

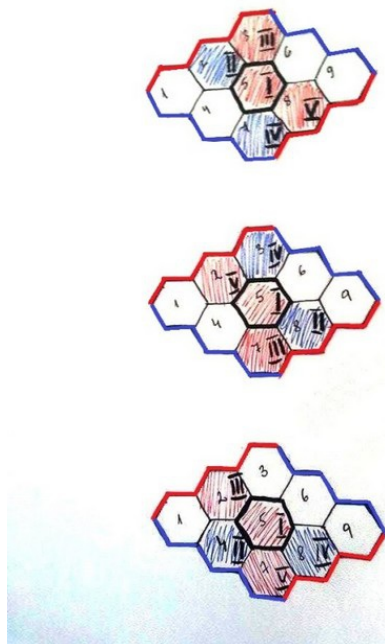


Figure 6 : damier 3x3 avec stratégie gagnante

Les rouges commencent avec la position 5 (figure 6).

Si les bleus jouent une position 1, 2, 3 ou 7, 8, 9 alors les rouges jouent une position sur la même « ligne » mais voisine à la position 5.

Par exemple, les bleus jouent en 2. Les rouges doivent jouer en 3 et le coup d'après, quoi que fassent les bleus, les rouges gagnent (s'ils jouent bien).

Si les bleus jouent en 4 ou 6, les rouges jouent le 2 ou 8 et c'est gagnant pour eux à leur troisième coup.



Travail de recherche des élèves de Cluj

Si on reste sur des damiers impair x impair, le premier joueur a l'avantage en jouant la case centrale, mais la stratégie se complique.

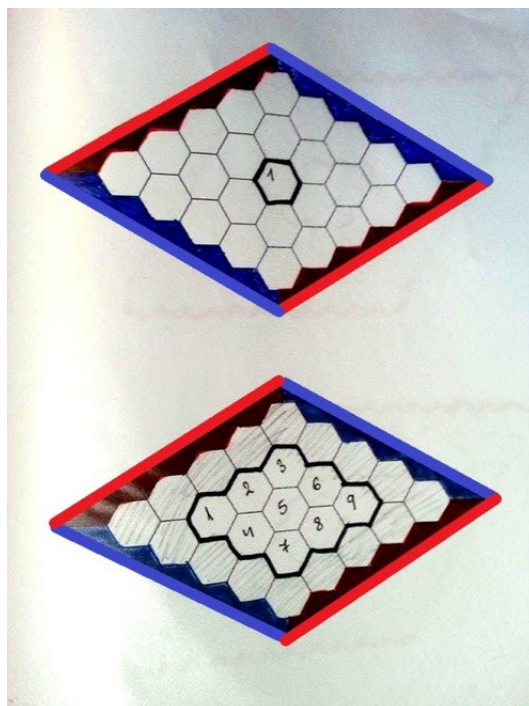


Figure 7 : damier 5x5 avec le damier de 3x3 contenue

Sur le damier 5x5 nous remarquons qu'il contient un damier 3x3 pour lequel nous avons déjà une stratégie gagnante (figure 7). Regardons si notre stratégie pour le 3x3 peut nous conduire à la victoire (figures 8 et 9).

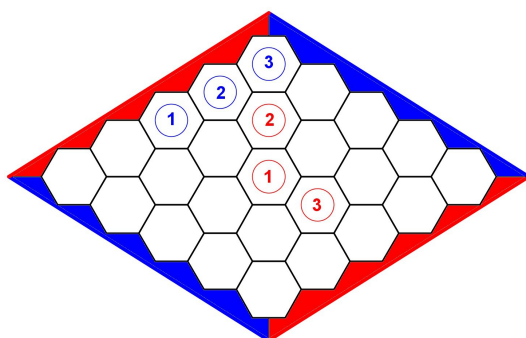


Figure 8 : le joueur rouge a commencé et il a appliqué la stratégie sur le damier 3x3.
Le joueur bleu en profite pour prendre l'avantage

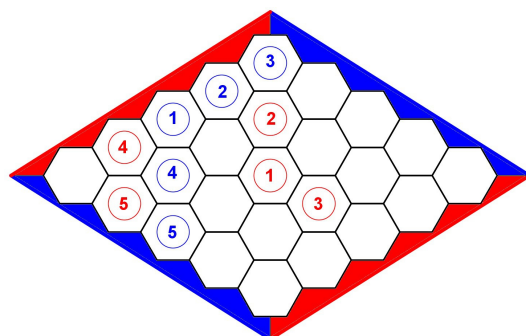


Figure 9 : il est trop tard pour le joueur rouge pour contrer le joueur bleu

La stratégie gagnante (1) pour un damier 5x5 est bien de commencer par la case centrale mais ensuite il faut garder l'avantage en jouant les cellules sur le bord rouge et à une « distance » deux du centre du damier (figure 10).

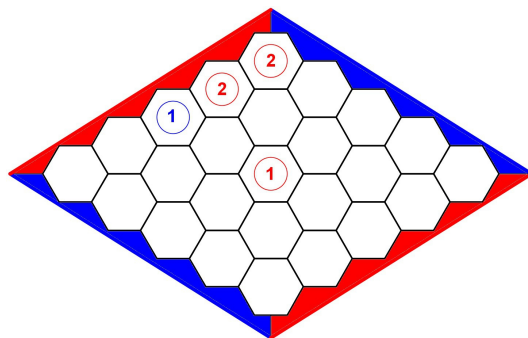


Figure 10 : les deux positions possibles que doit jouer le joueur rouge en deuxième coup pour garder l'avantage.

Par la suite, soit le joueur bleu essaye de contrer le joueur rouge, mais alors les deux positions pour le joueur bleu ne permettent pas de prendre l'avantage (figure 11),

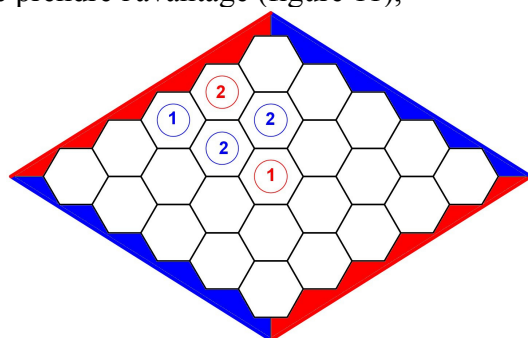


Figure 11 : les deux positions du joueur bleu pour contrer, mais le rouge ne perd pas l'avantage en jouant la position que le bleu n'a pas joué.

soit le joueur bleu essaye de bloquer l'accès de droite, dans ce cas, le joueur rouge doit être vigilant mais il peut toujours garder l'avantage (figure 12).

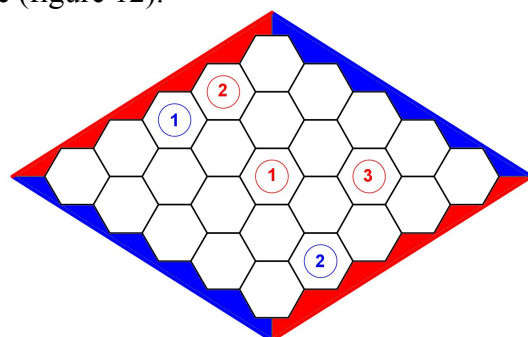


Figure 12 : si le joueur bleu joue de « l'autre côté », le rouge doit rester vigilant.

Le cas des damiers pair x pair est plus compliqué car il n'y a pas de case centrale, mais il semblerait que le joueur qui commence garde toujours un avantage.

Dans la règle du jeu il est dit qu'il ne peut pas y avoir de match nul, nous ne sommes pas arrivés à le prouver.

Annexe 1.

Nombre de manières de remplir le plateau de 3 sur 3 avec 5 pions rouges et 4 bleus.
126 possibilités, les rouges gagnent 84 fois et les bleus 42 fois.

[illegible]

(1) L'unicité de la stratégie gagnante ainsi que son efficacité quelle que soit la place du premier pion bleu n'ont pas été clairement établies.