

Les dominos c'est rigolo !

Année 2015 - 2016

BANDERIER Hugo (TS), BENICHOU Gabriel (TS), DIZIER Martin (Seconde),
EMBERGER Antoine (TS), FAUSTINI Kévin (TS), GROBEL Coralie (TS), HAVART
Maëlle (Seconde), JEAMRUJEEKUL Aim (TS), LAVOREL Léonore (Seconde), MARTIN
Anaëlle (TS), ORMOND Cedric (Seconde), PERREARD Louise (TS)

Institut Florimont, Petit-Lancy (Suisse) et Lycée de la Versoie, Thonon-les-Bains (France)

Enseignant-e-s : Sabrina Biglione – Murièle Jacquier – Gilles Lamboley

Chercheurs : Mounir Benheddi (Université de Genève) – Catriona MacLean (Université de Grenoble)

Présentation du sujet

Voici une façon étonnante de jouer avec des dominos ! Deux joueurs se tiennent devant une grille quadrillée de forme carrée ou rectangulaire. Ils placent tour à tour, sur les cases vides de leur choix, des dominos de taille 2×1 . Les dominos peuvent être placés horizontalement ou verticalement. Le but est de bloquer l'adversaire afin qu'il ne puisse plus jouer : le gagnant est donc celui qui pose son domino sur la dernière place disponible. Mais dans ce jeu, existe-t-il une stratégie gagnante, quel que soit le type de grille ? Est-il possible de trouver une technique qui assure la victoire, quels que soient les paramètres (forme de la grille, nombre de cases, le fait d'être joueur 1 ou 2...) ? Cet article détaille dans un premier temps le fil de nos recherches puis des stratégies concrètes assurant la victoire.

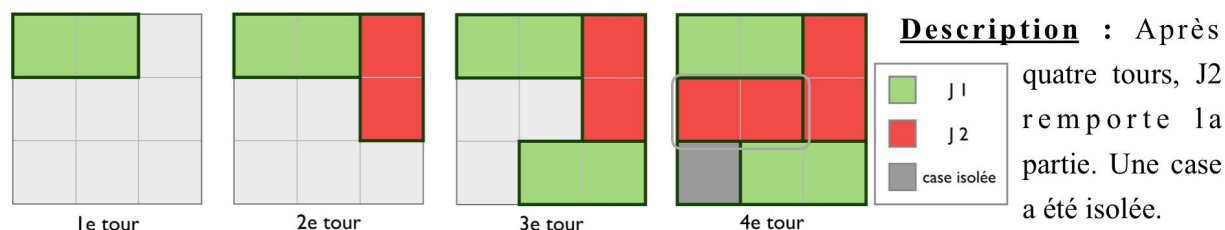
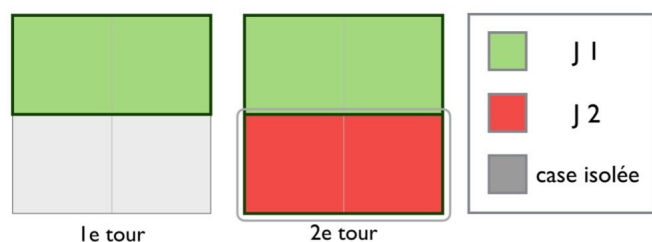


Figure 1 : partie simple sur grille carrée $n \times n$ ($n = 3$ donc la grille se note 3×3). Aucune stratégie particulière n'est employée.

Vocabulaire

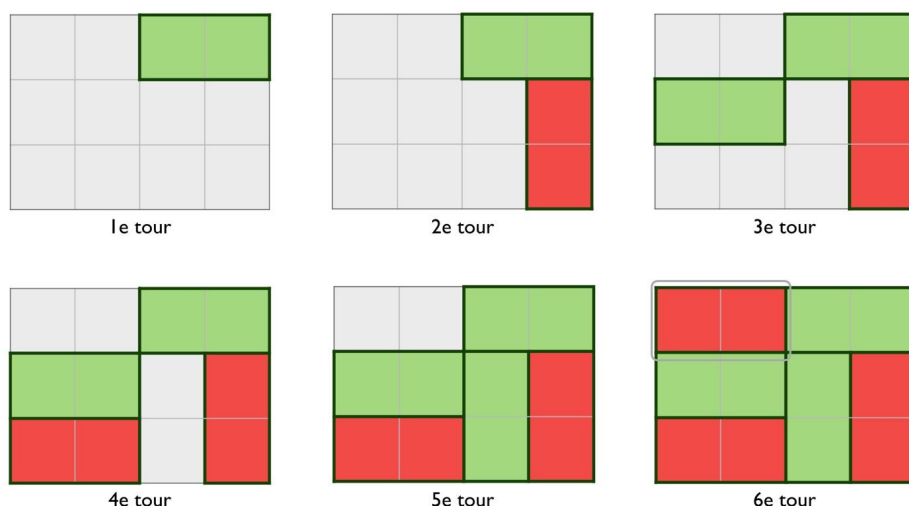
Pour simplifier la compréhension, on introduit quelques définitions et notations qui seront utilisées tout au long de ce travail. On appellera les deux joueurs J1 et J2, J1 étant le premier à jouer et J2 le deuxième. Dans les exemples, J1 est représenté en vert et J2 en rouge, les cases isolées (inutilisables) sont grises et le dernier coup de la partie, dit coup "gagnant", est entouré. Les grilles sur lesquelles nous avons travaillé sont carrées ou rectangulaires. Une grille carrée est notée $n \times n$ (n étant un des côté d'une grille carrée) et une grille rectangulaire $m \times n$ (m étant la largeur et n la longueur d'une grille rectangulaire). Les valeurs de m et n sont exprimées en carreaux (unité de mesure) : dans une grille carrée 3×3 ($n = 3$) par exemple, un côté de la grille est composée de 3 carreaux. On appelle « c » le nombre de cases de la grille ($c = m \times n$ pour une grille rectangulaire et $c = n \times n$ pour une grille carrée). Quand la grille possède un nombre pair de cases, on dit que la grille est paire et quand la grille possède un nombre impair de cases, on dit que la grille est impaire. La notation « T » représente le nombre de coups joués lors d'une partie, et « i » le nombre de cases isolées à la fin de cette partie. Il est important de noter que « T » et « i », peuvent être accompagnés de la mention « max » (maximum possible sur une grille donnée) ou « min » (minimum possible sur la même grille donnée) : T_{max} , T_{min} , i_{max} , i_{min} . Ainsi, dans le cas où « T » est à son maximum (T_{max}), « i » sera à son minimum (i_{min}). Inversement, dans le cas où « T » est à son minimum (T_{min}), « i » sera à son maximum (i_{max}). [1]



Description :

Au deuxième tour ($T = 2$), J2 place son domino sur la dernière place disponible et remporte la partie. Il n'y a pas de case isolée.

Figure 2: grille carrée $n \times n$. Dans cet exemple, $n = 2$ (grille 2×2).



Description :

Après six tours ($T = 6$), J2 remporte la partie. Aucune case n'est isolée.

Figure 3 : grille rectangulaire $n \times m$. Dans cet exemple, $m = 3$ et $n = 4$ (c'est une grille 3×4).

I. Démarche

Dans cette partie, nous détaillons notre démarche. Nous avons essayé de respecter l'ordre chronologique de nos découvertes, cependant, nous avons choisi d'expliquer les formules au début pour faciliter la compréhension de la suite de notre démarche et faciliter les démonstrations. Ces formules ont été récemment trouvées et appuient nos autres résultats.

1) Parties jouées au hasard

Lorsque le sujet nous a été présenté, nous ne savions pas vraiment par où commencer alors nous avons enchaîné les parties pour nous familiariser avec les règles. En jouant beaucoup, et sans appliquer de stratégie en particulier, nous avons pu tester diverses techniques basées sur nos observations. Par exemple, nous nous sommes demandés si, que l'on soit J1 ou J2, occuper tous les coins, isoler un nombre pair ou impair de cases permettait la victoire. Après de nombreuses parties sur des grilles de diverses tailles et de forme carrée ou rectangulaire, nous nous sommes concentrés sur des plus petites valeurs de manière à considérer la totalité des coups possibles. Nous avons de cette manière pu remarquer une corrélation entre les cases isolées et le nombre de tours joués.

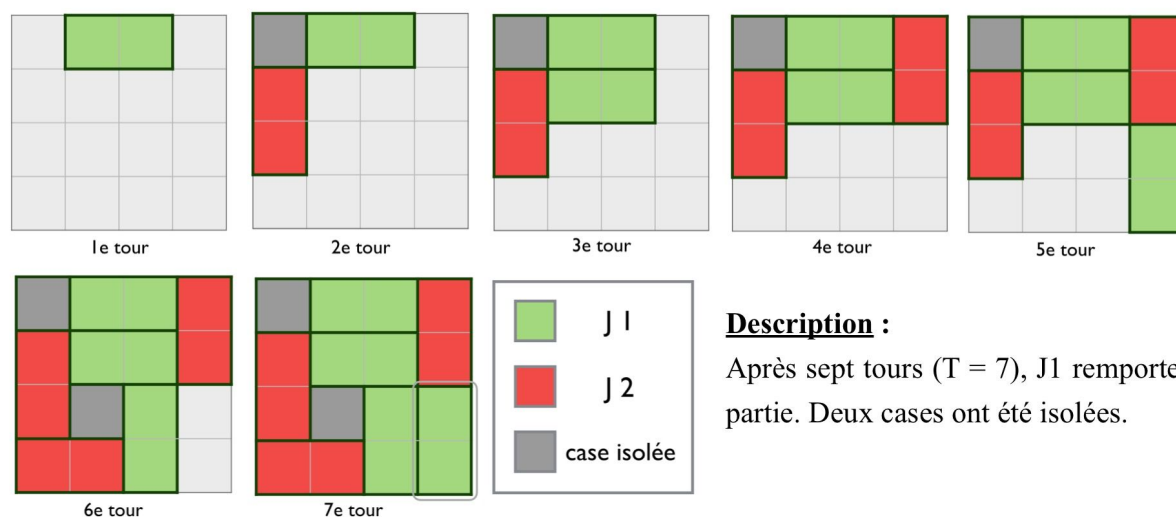


Figure 4 : grille carrée 4×4 ($n = 4$)

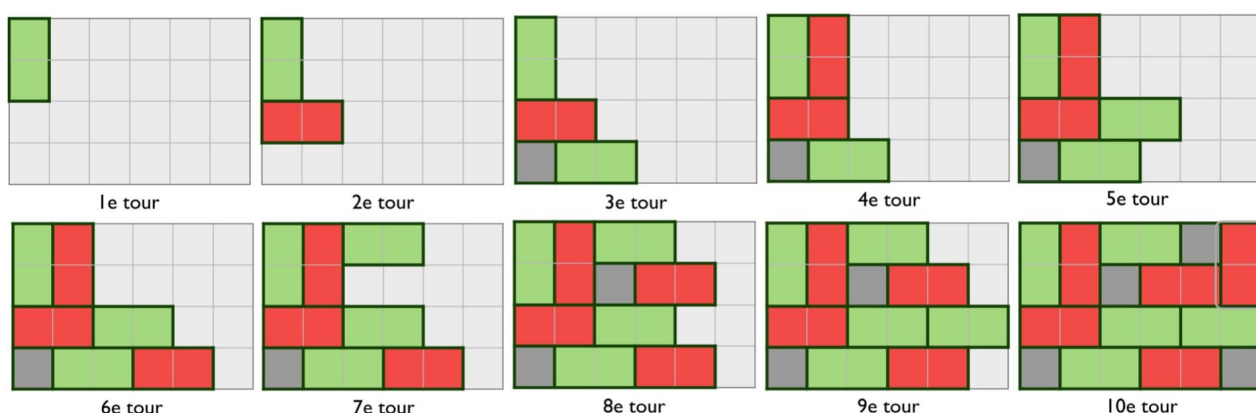


Figure 5 : grille rectangulaire 4×6 ($m = 4$ et $n = 6$)

2) Quelques formules

Dans cette partie, on regarde uniquement des grilles carrées.

Nous avons trouvé des formules, conjecturée expérimentalement, qui permettent de prédire l'issue de parties en fonction de certains paramètres comme par exemple la taille des grilles, le nombre de coups maximum et minimum, le joueur que l'on veut voir gagner, etc. Ces formules nous ont également servi à avoir des exemples concrets, sans pour autant devoir figurer une grille et la compléter.

a) Nombre de trous maximum, i_{max}

Des recherches plutôt empiriques nous ont permis de trouver le nombre maximum de cases isolables noté i_{max} pour chaque valeur de n . Ici, k et i appartiennent à $\mathbb{N}$.

Cas 1

Si $n = 3 \times k$, alors $i_{max} = k \times n$ [2]

Exemple. soit une grille $n \times n$, avec $n = 3$

$n = 3 \times k$ (avec $k = 1$), donc $i_{max} = k \times n = 1 \times 3 = 3$

Cas 2

Si $n = 3 \times k + 1$, alors $i_{max} = k \times n$ (quand n est un nombre pair) ou $i_{max} = k \times n - 1$ (quand n est un nombre impair)

Exemples.

- n pair : soit une grille $n \times n$, avec $n = 10$

$n = 3 \times k + 1$ (avec $k = 3$), donc $i_{max} = k \times n = 3 \times 10 = 30$

- n impair : soit une grille $n \times n$, avec $n = 7$

$n = 3 \times k + 1$ (avec $k = 2$), donc $i_{max} = k \times n - 1 = 2 \times 7 - 1 = 13$

Cas 3

Si $n = 3 \times k + 2$, alors $i_{max} = k \times n + k$ (quand n est un nombre pair) ou $i_{max} = k \times n + k + 1$ (quand n est un nombre impair)

Exemples.

- n pair : soit une grille $n \times n$, avec $n = 8$

$n = 3 \times k + 2$ (avec $k = 2$), donc $i_{max} = k \times n + k = 2 \times 8 + 2 = 18$

- n impair : soit une grille $n \times n$, avec $n = 5$

$$n=3 \times k+2 (\text{avec } k=1), \text{ donc } i_{\max}=k \times n+k+1=1 \times 5+1+1=7$$

Ces trois cas de figure nous ont permis de trouver les intervalles de définition (sur $\mathbb{N}$) de nos formules, exposées ci-dessous.

b) Sur grille carrée paire

Une grille carrée est dite paire lorsque son nombre de cases est pair, donc la longueur de ses côtés est paire ($n = 2k$, k appartenant à $\mathbb{N}$).

Rappelons que le nombre de cases de la grille est égal à $c = n \times n$)

b. 1 – Formules

On cherche tout d'abord à connaître le nombre maximal de tours :

On divise donc le nombres de cases par 2 : $T_{\max} = \frac{c}{2} = 2k'$. Ainsi, le nombre de tours maximal est pair. J2 sera donc le dernier à placer son domino dans un cas où le nombre de tours maximal est joué (autrement dit, si aucune case n'est isolée).

Plus généralement, cela nous indique que dès que le nombre de tours est pair, J2 remporte la partie.

[5]

On avait la formule $T_{\max} = \frac{c}{2} = 2k'$ pour connaître le nombre de tours maximum. Or, ce jeu peut occasionner des isolements de cases. Ainsi, la grille $n \times n$ est une constante (c étant le nombre de cases remplissables au départ), elle ne va donc pas varier : le nombre de cases restant le même tout au long du jeu. Or les isolements de cases impliquent la réduction du nombre de cases remplies. Ainsi, à la fin de la partie, il se pourrait qu'un cas de figure se produise où $T < T_{\max}$.

Insérons donc à cette formule initiale, la variable i = nombre de cases isolées.

On obtient la formule : $T = \frac{(c-i)}{2}$ (T représente le nombres de tours à jouer). [3]

*A noter, $i = b+2k$ avec $b = 0$ sur grille paire (conjecturée expérimentalement)[4]

Si $T = \frac{c-i}{2} = 2k'$ alors, J2 gagne $\Rightarrow i = c - T \times 2$ avec $T = 2k'$

Si $T = \frac{c-i}{2} = 2k' + 1$ alors J1 gagne $\Rightarrow i = c - T \times 2$ avec $T = 2k' + 1$

Sur l'intervalle $T_{max} \geq T \geq T_{min}$, T_{min} se trouve par le calcul $T_{min} = \frac{(c - i_{max})}{2}$

b. 2 – Exemple

Soit une grille carrée de côté $n = 6$ (grille 6×6)

On cherche le domaine de définition de notre grille :

- d'abord T_{max} :

$$T_{max} = \frac{c}{2} = 2k' \Leftrightarrow T_{max} = \frac{36}{2} = 18$$

- puis T_{min} :

$$T_{min} = \frac{(c - i_{max})}{2}$$

Avant de calculer T_{max} , il nous faut trouver i_{max} .

- On a : $n = 6$

- Or $6 = 3 \times k$ où $k = 2$, donc d'après le cas 1 de nos « formules pour calculer i_{max} », on calcule :

$$i_{max} = k \times n$$

$$i_{max} = 2 \times 6$$

$$i_{max} = 12$$

- On peut alors calculer T_{min} :

$$T_{min} = \frac{(c - i_{max})}{2} = \frac{(36 - 12)}{2} = 12$$

Ainsi, nous connaissons le nombre de tours maximum ($T_{max} = 18$) et le nombre de tours minimum ($T_{min} = 12$). Par ailleurs, J2 sera le vainqueur dans les deux cas car 12 et 18 sont des nombres pairs.

Grâce à ces calculs, on connaît le nombre de tours jouables (T), compris entre $T_{min} \leq T \leq T_{max}$, et appartenant à $\mathbb{N}$ (qui équivaut dans cet exemple à $12 \leq T \leq 18$). Bien entendu toutes les possibilités sont des entiers naturels, car il s'agit de tours.

Nous souhaitons maintenant voir avec, par exemple, 15 tours, combien de cases devront être isolées. Rappelons qu'avec 15 tours, sur une grille paire, J1 gagnera, car $15 = 2k+1$ où $k = 7$.

On a la formule : $T = \frac{c-i}{2} \Leftrightarrow i = c - T \times 2 \Leftrightarrow i = 36 - 15 \times 2 \Leftrightarrow i = 6$

S = {6} : Ainsi, si J1 souhaite gagner sur une grille carrée paire de côté $n = 6$ (grille 6×6) en 15 tours, il devra s'arranger pour que 6 cases aient été isolées.

c) Sur grille carrée impaire

Une grille carrée est dite impaire lorsque son nombre de cases est impair, donc la longueur de ses côtés est impaire ($n = 2k + 1$, k appartenant à $\mathbb{N}$).

Rappelons que « c » est le nombre de cases de la grille.

c. 1 – Formules

De même que pour le cas d'une grille paire, on cherche tout d'abord à connaître le nombre maximal de tours :

On fait **c-1** car $n \times n = 2k' + 1$. En effet, nos dominos ne peuvent remplir qu'un nombre pair de cases ($2k$) car ils sont de taille 2×1 .

On divise (**c-1**) par 2 afin de connaître le nombre de tours maximal : $T_{max} = \frac{(c-1)}{2} = 2k'$.

Ainsi, le nombre de tours maximal jouables (T_{max}) est pair. J2 sera donc le dernier à placer un domino dans le cas où le nombre de tours maximal est atteint lors de la partie (autrement dit, si aucune case n'est intentionnellement isolée).

On avait la formule $T_{max} = \frac{(c-1)}{2} = 2k'$ pour connaître le nombre de tours maximum. La valeur « 1 » représente la case naturellement isolée. Par extension, si on changeait le « 1 » en la variable « **i** » (nombre de cases isolées)*, on obtient cette formule : $T = \frac{(c-i)}{2}$ (T est le nombre de tours de la partie).

*A noter, **i** = **b+2k** avec $b = 1$ sur grille impaire, b représentant la case naturellement isolée (conjecturé expérimentalement) [4]

Si $T = \frac{(c-i)}{2} = 2k'$ alors, J2 gagne $\Rightarrow i = c - T \times 2$ avec $T = 2k'$

Si $T = \frac{(c-i)}{2} = 2k' + 1$ alors J1 gagne $\Rightarrow i = c - T \times 2$ avec $T = 2k' + 1$

Sur l'intervalle $T_{max} > T > T_{min}$, T_{min} se trouve par le calcul : $T_{min} = \frac{(c - i_{max})}{2}$.

c. 2 – Exemple

Soit une grille carrée de côté $n = 11$ (grille 11×11)

On cherche le nombre de coups possibles dans ce jeu :

- d'abord T_{max} :

$$T_{max} = \frac{(c-1)}{2} = 2k' \quad \Leftrightarrow \quad T_{max} = \frac{(121-1)}{2} = 60$$

- puis T_{min} :

$$T_{min} = \frac{(c - i_{max})}{2}$$

Avant de calculer T_{min} , il nous faut trouver i_{max} .

- On a : $n = 11$

- Or $11 = 3 \times k + 2$, où $k = 3$ et n est impair, donc d'après le cas 3 de nos « formules pour calculer i_{max} », on calcule :

$$i_{max} = k \times n + k + 1$$

$$i_{max} = 3 \times 11 + 3 + 1$$

$$i_{max} = 37$$

- On peut alors calculer T_{min} : $T_{min} = \frac{(c - i_{max})}{2} = \frac{(121 - 37)}{2} = 42$

Ainsi, nous connaissons le nombre de tours maximum ($T_{max} = 60$) et le nombre de tours minimum ($T_{min} = 42$). Par ailleurs, J2 sera le vainqueur dans les deux cas car 42 et 60 sont des nombre pairs.

Grâce à ces calculs, on connaît le nombre de tours jouables (T) compris entre $T_{min} \leq T \leq T_{max}$ et appartenant à $\mathbb{N}$ (qui équivaut dans cet exemple à $42 \leq T \leq 60$). Bien entendu toutes les possibilités sont des entiers naturels, car il s'agit de tours.

Nous souhaitons maintenant voir avec, par exemple, 47 tours, combien de cases devront être isolées. Rappelons qu'avec 47 tours, sur une grille paire, J1 gagnera, car $47 = 2k + 1$ où $k = 23$.

On a la formule : $T = \frac{c-i}{2} \Leftrightarrow i = c - T \times 2 \Leftrightarrow i = 121 - 47 \times 2 \Leftrightarrow i = 27$

S = {27} : Ainsi, si J1 souhaite gagner sur une grille carrée 11×11 en 47 tours, il devra s'arranger pour que 6 cases aient été isolées.

3) La spécificité des lignes, un moyen de décomposer des grilles complexes ?

Lors du premier séminaire, le 6 novembre 2015, le Professeur MacLean nous a suggéré de nous pencher plus en détail sur le cas des grilles rectangulaires $m \times n$ simples, c'est-à-dire avec $m = 1$ ou $m = 2$. Cela nous a paru être une très bonne idée : peut-être aurait-il alors été possible de trouver une stratégie gagnante sur ce type de grilles (ou plutôt sur ce type de « lignes »), et de l'appliquer ensuite sur des grilles de plus grande taille. Nous avons pensé que, savoir quel joueur gagne sur telle ou telle longueur de ligne nous permettrait de découper les grilles complexes, et d'adopter une stratégie linéaire. Plus simplement, nous nous sommes dit qu'en trouvant la solution pour une ligne, on tiendrait la stratégie gagnante pour n lignes.

a. Des grilles $1 \times n$ ($m = 1$)

Dans un premier temps, nous nous sommes focalisés sur des grilles composées d'une seule ligne de n cases (grilles $1 \times n$). Notre but était de déterminer qui remporte la partie selon la longueur n de la ligne, si les deux joueurs placent leurs dominos de la manière la plus intelligente possible (s'ils cherchent tous deux la victoire).

Nous avons donc cherché qui gagne pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, etc. (toutes les valeurs de n jusqu'à $n = 9$ par souci de précision). Après plusieurs essais, nous avons réalisé qu'à partir de $n = 5$, on pouvait diviser la ligne en deux parties. Cela nous permet de résoudre des lignes "complexes" (où n est supérieur à 5) en utilisant des lignes plus "simples" (où n est inférieur à 5).

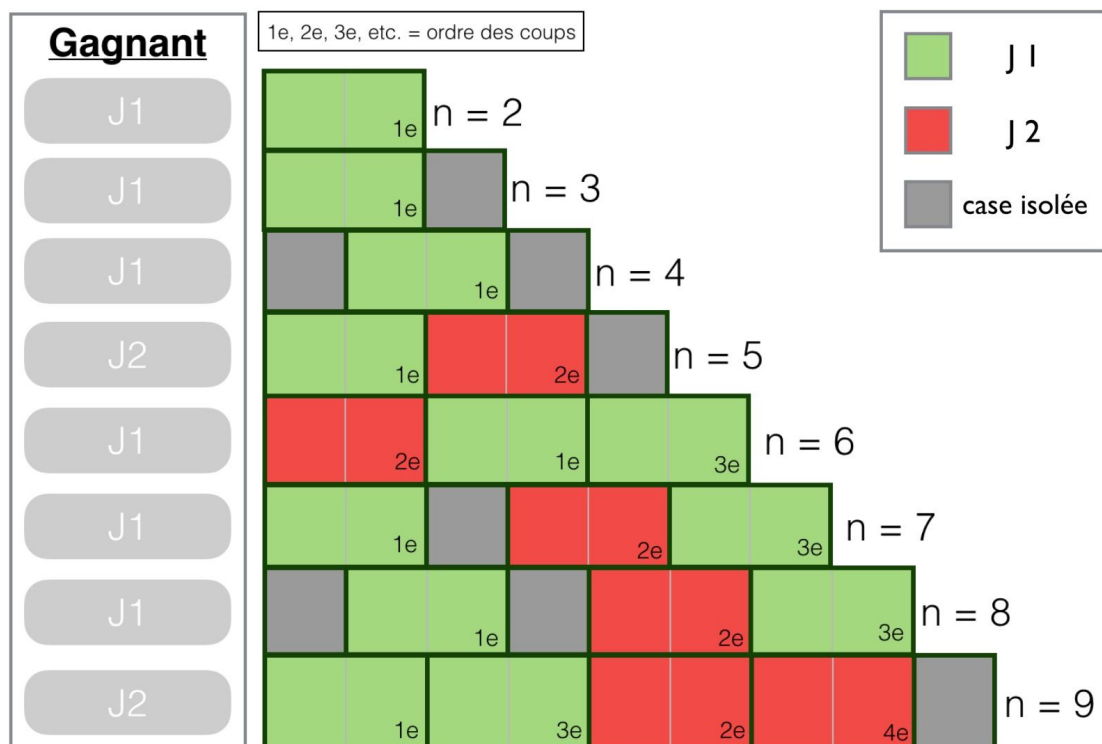


Figure 6 : représentation de référence pour le cas $1 \times n$ sur l'intervalle $[2 ; 9]$

Cette découverte nous a permis de mettre en place un système d'arbre des possibles. Il suffit de choisir un scénario $1 \times n$ où $n > 5$ et de placer un domino de manière à ce qu'il y ait une ou plusieurs cases disponibles de chaque côté du domino. Dans le cas de la ligne 1×9 par exemple, le domino peut décomposer la ligne en $1 \times 1 + 1 \times 6$, en $1 \times 2 + 1 \times 5$ ou en $1 \times 3 + 1 \times 4$. L'arbre des possibles présente chacune des décompositions possibles de la ligne et la résolution de chaque cas. Il nous permet de dire qui va gagner en fonction de la place du premier domino (placé par J1), si les joueurs jouent de la manière la plus intelligente. Voici la réalisation d'un arbre pour le cas du scénario 1×9 .

carré avec le domino placé par le joueur précédent. Cependant, cette stratégie est gagnante pour J2 si n est un pair et elle l'est pour J1 si n est un impair.

Nous avons donc énoncé cette stratégie de la manière suivante : « Pour une grille de taille $2 \times n$, il existe une stratégie gagnante pour J1 si n est impair ($n = 2k + 1$) et à l'inverse une stratégie gagnante pour J2 si n est pair ($n = 2k$). ».

Donc dans le cas où n est un pair, cette stratégie est gagnante pour J2 (cf Figure 8). Il lui suffit de jouer en « miroir » avec J1, c'est à dire jouer de la même manière que lui afin de former un carré avec le domino tout juste placé. Si J2 emploie cette technique, J1 n'a strictement aucune chance de gagner (à condition que n soit un pair).

Pour vérifier cette stratégie, on peut reprendre la formule de T_{max} (étant donné la tactique de J2, aucune case ne devrait être isolée).

On calcule : $T_{max} = \frac{c}{2} = \frac{(2 \times 2k)}{2} = 2k$.

D'après nos formules (cf I.2.b), J2 est gagnant dans ce cas de figure (la partie se joue en un nombre de tours maximum).



Description :

Après 6 tours ($T = 6$), J2 remporte la partie car il a joué en "miroir" avec J1.

Figure 8 : exemple de la stratégie dite "miroir" pour scénario $2 \times n$ avec, $n = 6$ (nombre pair).
La grille se note 2×6 .

Inversement, dans le cas où n est un nombre impair, cette stratégie est gagnante pour J1 (cf Figure 9). Lors de son premier coup, il doit poser son domino verticalement sur l'une des extrémités de la grille (à gauche ou à droite, cela ne fait pas de différence) de manière à ce que la suite de la partie se déroule sur une grille où n n'est plus impair (c'est-à-dire que le premier coup de J2 se fera sur une grille où n est pair). Une fois que les deux joueurs ont chacun joué leurs premiers dominos, J1 joue en « miroir » avec J2, c'est à dire joue de la même manière que lui afin de former un carré avec le domino tout juste placé. Si J1 emploie cette technique, J2 n'a strictement aucune chance de gagner

(à condition que n soit un nombre impair).

Pour vérifier cette stratégie, on peut reprendre la formule de T_{max} (étant donné la tactique de J1, aucune case ne devrait être isolée).

$$\text{On calcule : } T_{max} = \frac{c}{2} = \frac{2 \times n}{2} = \frac{2 \times (2k+1)}{2} = 2k+1 \Rightarrow .$$

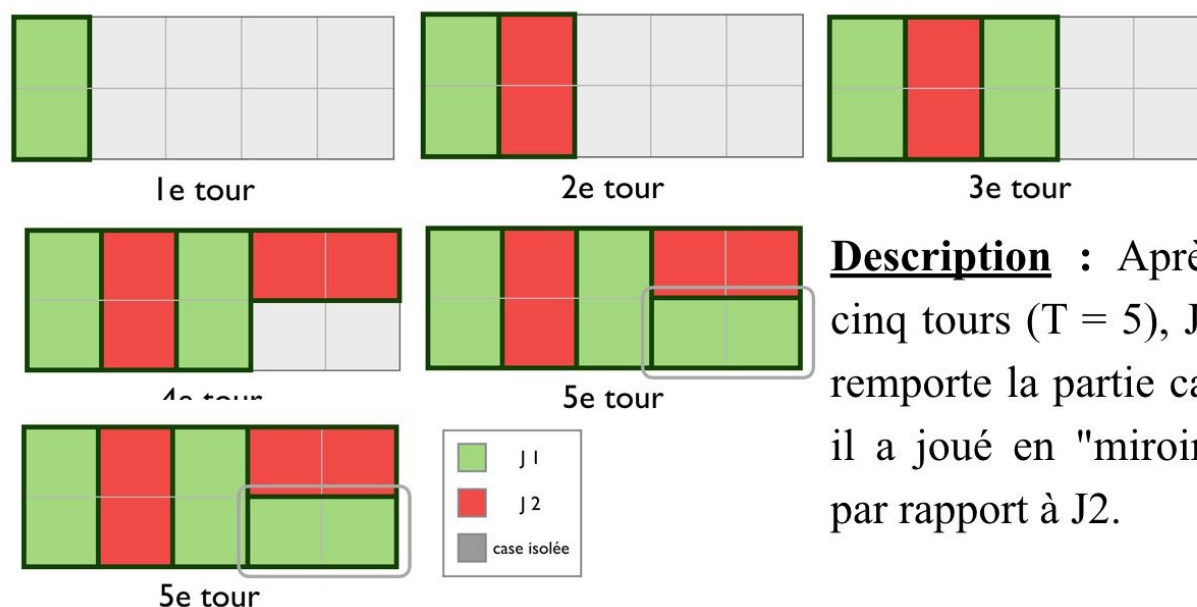


Figure 9 : exemple de la stratégie dite "miroir" pour scénario $2 \times n$ avec, $n = 5$ (nombre impair). La grille se note 2×5 .

D'après nos formules (cf I.2.c), J1 est gagnant dans ce cas de figure (la partie se joue en un nombre de tour maximum).

Il est possible de prouver cette stratégie par récurrence sur n , en commençant par le cas pair (le cas impair étant une conséquence), cependant nous avons fait le choix de ne pas le présenter dans cet article, car nous avons jugé que nous pouvions tout à fait résoudre ce problème sans avoir recours à des outils mathématiques trop complexes.

II. Des stratégies concrètes et fiables

Après les grilles $1 \times n$, nous avons étudié les grilles $2 \times n$. C'est ce type de grilles qui nous a guidé vers une stratégie gagnante infaillible, ou presque. Jouer en symétrie par rapport au joueur précédent nous a donné l'idée de jouer en symétrie par rapport à d'autres facteurs, comme par exemple le centre de la grille.

1) Sur une grille carrée paire ($n = 2k$)

Rappelons qu'une grille carrée $n \times n$ est paire si elle possède un nombre pair de cases, donc ses côtés sont pairs (n est un pair). Ainsi si J2 joue symétriquement à J1 par rapport au centre de symétrie (qui se trouve être un point) d'une grille carrée de côté pair, alors il est sûr de gagner. Le principe est simple : J2 reproduit le placement des dominos de J1 par symétrie centrale. Ainsi lorsque J1 isolera une case, J2 isolera la case opposée par rapport au centre de la grille. Le nombre de cases isolées sera donc toujours pair et donc le nombre de tour maximum (T_{max}) également (cf Formules) : J2 est toujours gagnant. Dans ce cas, cette technique est infaillible car si J2 l'emploie, J1 n'a strictement aucune chance de gagner (à condition que n soit un pair). Concrètement, à la fin de la partie, les dominos de J1 et J2 seront disposés symétriquement par rapport au centre de la grille.

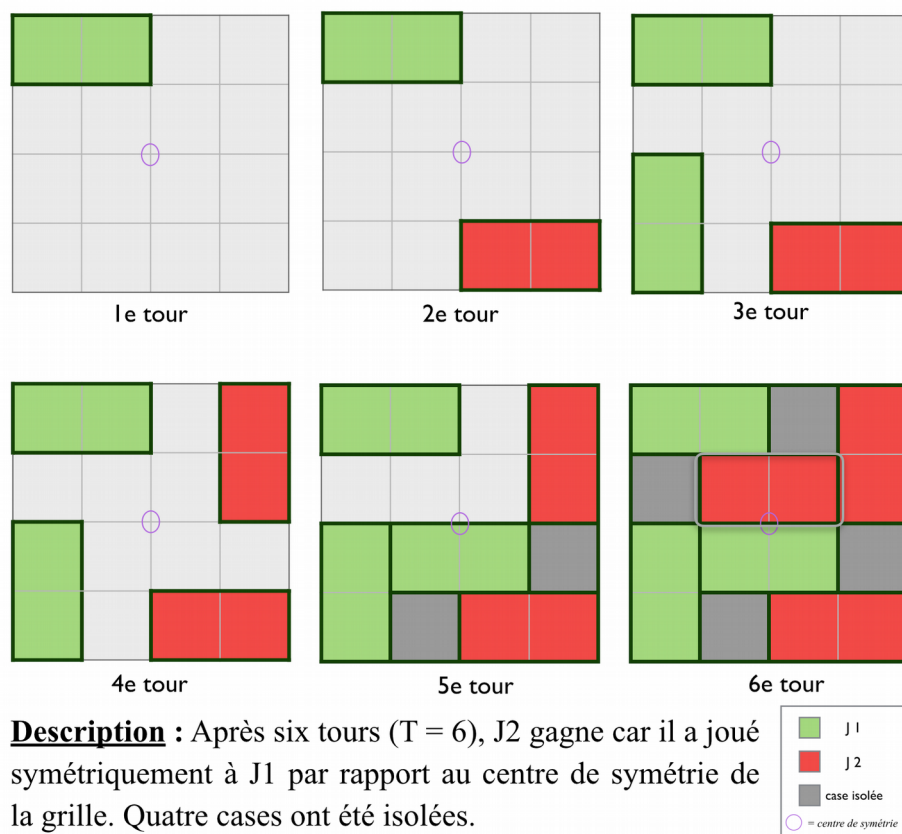


Figure 10 : Stratégie de symétrie centrale sur grille carrée de côté pair avec, $n = 4$ (grille 4×4)

2) Sur une grille rectangulaire paire

Rappelons qu'une grille rectangulaire $m \times n$ est paire si elle possède un nombre pair de cases. Dans ce type de grille, la nature des facteurs n et m détermine qui sera le gagnant s'il emploie la stratégie de symétrie centrale.

Quand les deux facteurs sont pairs :

Si à la fois m et n sont pairs, alors le centre de symétrie de la grille se trouvera

être un point. Dans ce cas, J2 peut être sûr de gagner s'il joue symétriquement à J1 par rapport au centre de symétrie de la grille. De même que sur une grille carrée paire, J2 reproduit le placement des dominos de J1 par symétrie centrale. Le nombre de cases isolées sera toujours pair et le nombre de tour maximum (T_{max}) également (cf *Formules*). Dans ce cas, cette technique est infaillible car si J2 l'emploie, J1 n'a strictement aucune chance de gagner (à condition que n et m soient des paires). Concrètement, à la fin de la partie, les dominos de J1 et J2 seront disposés symétriquement par rapport au centre de la grille.

Quand un facteur est pair et l'autre impair :

Si l'un des facteurs est pair et l'autre impair, alors le centre de symétrie de la grille se trouvera être composé de deux cases (taille d'un domino, c'est-à-dire 2×1). Dans ce cas, jouer en symétrie centrale est avantageux pour J1 à une condition. Il doit absolument placer son premier domino au centre de symétrie de la grille et jouer ensuite symétriquement à J2 par rapport à ce centre qu'il a précédemment occupé de son premier domino. Dans ce cas, cette technique est infaillible car si J1 l'emploie, J2 n'a strictement aucune chance de gagner (à condition que l'un des facteurs soit pair et l'autre impair). Concrètement, à la fin de la partie, les dominos de J1 et J2 seront disposés symétriquement par rapport au centre de la grille.

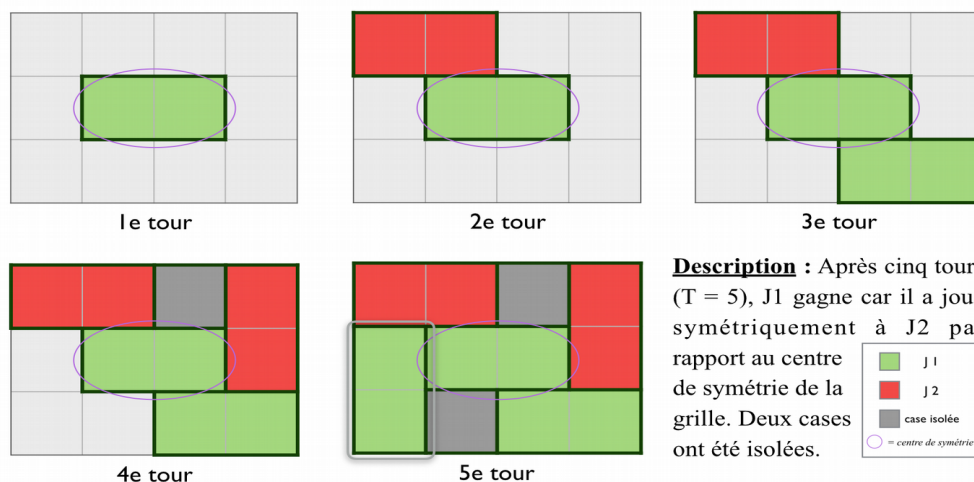


Figure 11 : Stratégie de symétrie centrale sur grille rectangulaire paire avec $n = 3$ et $m = 4$ (grille 3×4)

3) Sur une grille carrée où n est un nombre impair

Rappelons qu'une grille carrée $n \times n$ est impaire si elle possède un nombre impair de cases, donc ses côtés sont impairs (n est un impair). Pour ce type de grille, nous nous sommes heurtés

à une difficulté : l'axe de symétrie est une case 1×1 . Il est donc impossible de jouer en symétrie centrale car si un joueur place un domino sur cette case, le joueur suivant ne peut pas jouer en symétrie car la case est déjà occupée. La seule façon d'appliquer la stratégie de symétrie centrale sur ce type de grille (favorable pour J2, tout comme le cas d'une grille carrée paire) est de ne pas jouer sur la case « centrale », c'est à dire de l'isoler en jouant autour. Or si J2 souhaite gagner, il a tout intérêt à jouer sur cette case « centrale » pour empêcher J2 de pratiquer la symétrie.

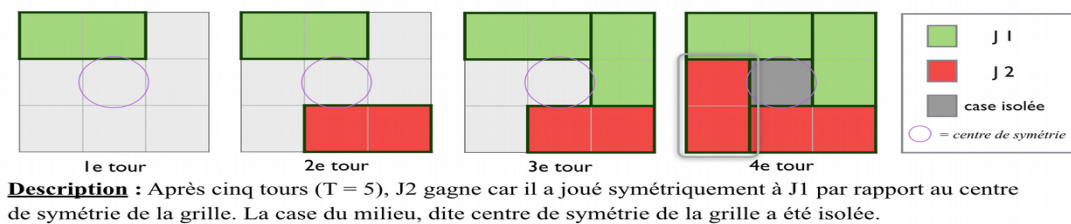


Illustration 12 : Stratégie de symétrie centrale sur grille carrée impaire avec $n = 3$ (grille 3×3). Le centre de la grille est isolé.

Conclusion générale

Après une année de recherches, et malgré quelques difficultés, nous avons résolu le problème qui nous avait été confié : nous avons découvert des stratégies gagnantes pour plusieurs types de grilles. Après avoir tâtonné, et selon les conseils des chercheurs, nous avons étudié les grilles linéaires $1 \times n$ et $2 \times n$. Cela nous a réorienté et permis une sorte de déclic. Les découvertes que nous avons faites, notamment la stratégie dite de « miroir », nous ont guidées vers la stratégie basée sur la symétrie centrale des grilles. Nous avons alors trouvé des stratégies favorables pour J1 et J2 que la grille soit carrée ou rectangulaire, paire ou impaire. En résumé, J1 est gagnant sur la majorité des lignes $1 \times n$ [6], sur les lignes $2 \times n$ (quand n est impair) et sur les grilles rectangulaires paires (quand un des facteurs est pair et l'autre impair). Quant à J2, il est gagnant sur quelques unes des lignes $1 \times n$, sur les lignes $2 \times n$ (quand n est pair), sur les grilles rectangulaires (quand n et m sont pairs), sur les grilles carrées paires et enfin sur les grilles carrées impaires (quand la case centrale est isolée). Le temps nous a manqué pour résoudre entièrement le cas des grilles carrées impaires. Suite au congrès, de nouvelles pistes concernant la résolution de ce type de grille nous ont été proposées. Malheureusement, les recherches sur cet élément n'ont pu être très poussées mais il serait intéressant de les poursuivre.

Notes d'édition :

[1] Le nombre c est associé à la grille (nombre de cases), alors que les nombres T et i sont associés à une partie sur cette grille (nombre de coups de la partie et nombre de cases isolées à la fin de la partie). Les nombres $T_{min}, T_{max}, i_{max}, i_{min}$ sont, eux, associés uniquement à la grille ; ils désignent respectivement les nombres de coups minimal et maximal, les nombres maximal et minimal de cases isolées qu'on peut obtenir en regardant toutes les parties jouables sur la grille.

[2] Dans ce cas, comme dans les cas 2 et 3, il est assez facile d'imaginer une partie qui arrive au nombre de cases isolées annoncé ; la question qui n'est pas aussi évidente est de prouver que aucune partie ne pourra aboutir à un nombre de cases isolées plus grand.

[3] Cette formule est la base de tout ce qui suit. On peut l'énoncer : $c = 2T + i$. Elle traduit que dans la partie, à chaque coup on recouvre deux cases de la grille, et qu'à la fin, il reste i cases non recouvertes.

[4] Le relecteur ne comprend pas cette assertion

[5] Cette affirmation n'est pas une conséquence de ce qui précède. Beaucoup plus simplement, si le nombre de coups de la partie est pair, c'est le joueur 2 qui joue le dernier et gagne, alors que si le nombre de coup est impair, c'est le joueur 1 qui termine et gagne. Cela n'est pas spécifique à ce jeu, mais se retrouve avec tous les jeux à deux joueurs où le dernier qui joue a gagné.

[6] Notons que la stratégie du miroir permet de prouver que le premier joueur peut toujours gagner dans le cas d'une ligne ayant un nombre pair de case. En revanche, l'analyse du cas d'une ligne avec un nombre impair n de cases est nettement plus compliquée. On peut ainsi vérifier que si on regarde les nombres impairs inférieurs à 40, si n est dans liste 1, 5, 9, 15, 21, 25, 29, 35, 39, le premier joueur perd, alors qu'il gagne pour $n=7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 31, 33, 37$. Cela montre qu'il reste sans doute encore beaucoup de recherches possibles...