Jeu de Société 2

Année 2022 – 2023

Mathis Colin, Yiwen Le Blay, François-Xavier Sabatier,
élèves de Terminale

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay

Encadré·es par : Cécile Chipot, Hélène Cochard

Chercheuse : Blandine Galiay, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

1. Présentation du sujet

Bob a inventé un nouveau jeu de société. Il dispose sur la table n^2 billes, où $n \geq 3$, en remplissant les coordonnées entières d'un carré de taille $n \times n$.
Il explique les règles à Alice : tout d'abord, elle doit sélectionner un sous-ensemble de billes S. Puis, pour chaque couple de billes contenues dans S , elle doit retirer toutes les billes du carré qui sont sur la droite les reliant. Le but pour Alice est de choisir S tel qu'elle puisse retirer toutes les billes de la grille.
Comme le jeu est trop facile (il suffit de prendre S l'ensemble de toutes les billes de la grille), Bob demande à Alice de choisir un ensemble S contenant le moins de billes possibles. Pouvez-vous l'aider ?

Nous disposons donc d'un carré de n billes de côté. Le but est de choisir le moins possible de ces billes tel que tous les points du carré soient alignés avec 2 points choisis au début.

Voici un exemple pour un carré avec $n = 3$ billes de côté

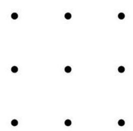


Schéma 1 : exemple avec trois billes

Si nous choisissons les billes dans les 4 coins du carré (en rouge dans le schéma), chaque bille sera soit choisie, et donc retirée, soit alignée avec 2 billes choisies au début (en bleu dans le schéma), et donc retirée également.

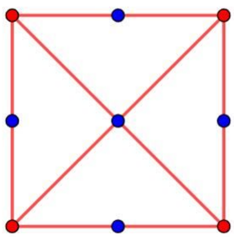


Schéma 2 : on choisit les 4 billes rouges

2. Résultats

2.1. Quelques solutions trouvées pour différents carrés de côtés n

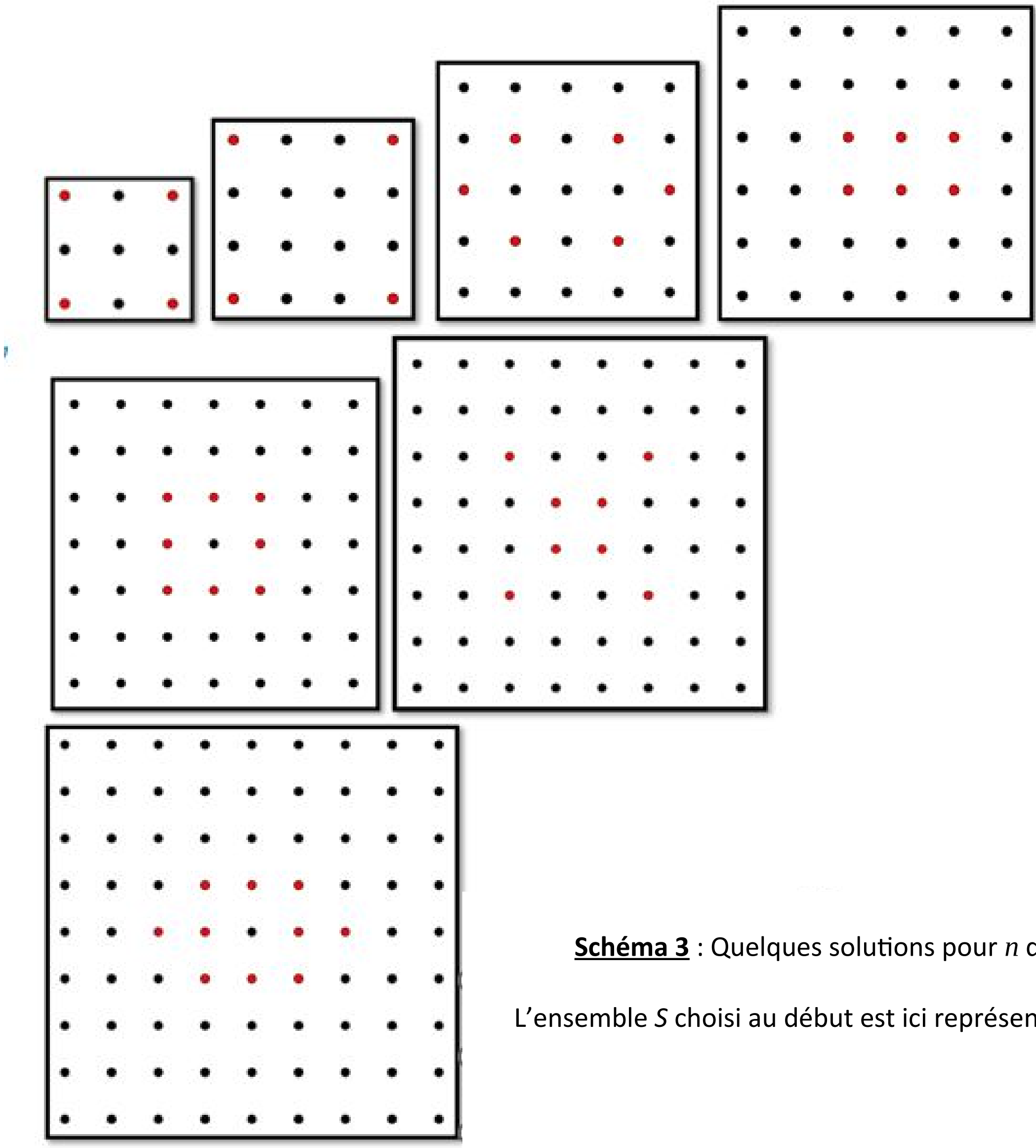


Schéma 3 : Quelques solutions pour n de 3 à 9

L'ensemble S choisi au début est ici représenté en rouge.

Il est possible de constater qu'une solution n'est pas toujours unique pour certains carrés, comme pour le carré $n = 4$, où l'on peut aussi choisir les billes centrales pour arriver au même résultat.

Pour les carrés $n = 3$ et $n = 4$, il s'agit de solutions au problème.

Pour les autres, ces ensembles S choisis sont les meilleurs que nous ayons trouvés, mais il n'est pas prouvé qu'ils soient solutions au problème, il est donc possible qu'il existe de meilleurs ensembles S.

2.2. Encadrement du nombre de billes σ_n à choisir, solution au problème

Nos recherches nous ont permis de trouver un nombre λ_n de billes à choisir au début en dessous duquel il n'est pas possible de trouver une solution pour un carré de côté n, avec

$$\lambda_n = \left\lceil \frac{n-4+2\sqrt{\Delta}}{2n-4} \right\rceil \quad \text{et} \quad \Delta = \left(2-\frac{n}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{2}-1\right)n^2 = 2n^3 - \frac{15}{4}n^2 - 2n + 4 \cdot$$

Il existe aussi un nombre μ_n de points pour lequel il est sûr de pouvoir trouver au moins un moyen de retirer toutes les billes, avec

$$\mu_n = 2n-(3+(-1)^n)$$

(que l'on peut aussi écrire $\mu_n = 2n-4$ si n pair et $\mu_n = 2n-2$ si n impair).

Cela donne donc un encadrement du nombre σ_n de points à choisir solution : $\lambda_n \leq \sigma_n \leq \mu_n$.

2.3. Majoration du nombre de points sur une droite

Afin de trouver un encadrement plus précis de la solution, nous avons majoré le nombre de billes sur une droite formées par 2 billes choisies au départ. Pour cela nous avons dissocié différents cas :

– Si la droite est parallèle à l'un des côtés du carré, la droite contient n billes.

– Si la droite forme un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'un des côtés, la droite contient au maximum n billes.

– Dans les autres cas, la droite contiendra au maximum $\left\lceil \frac{n}{\beta} \right\rceil$ billes (1), avec β le maximum entre la différence d'ordonnée et la différence d'abscisse entre les 2 points de départ si on place le carré dans un repère orthonormé avec tous les points à des coordonnées entières.

3. Texte de l'article

3.1. Premières remarques

En traitant le sujet, nous avons établi que pour qu'un ensemble S soit solution, il faut :

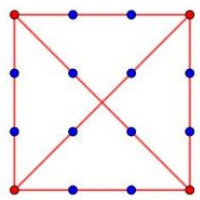
– que l'on puisse retirer toutes les billes (condition 1)

– qu'il ne soit pas possible de remplir la condition 1 avec un ensemble plus petit (condition 2).

Nous avons tout d'abord fait de nombreux tests pour se familiariser avec le sujet, et nous avons pu remarquer plusieurs choses.

Tout d'abord, une remarque assez évidente est que le nombre de billes à choisir au début est croissant au sens large, et que si un ensemble S retire toutes les billes pour un carré de côté n, alors le même ensemble S (s'il existe) retirera toutes les billes pour des carrés de côté n plus petits (2).

Une autre remarque est qu'une solution n'est pas toujours unique pour un même carré de côté n. Par exemple, pour n=4, il est possible de choir les 4 billes dans les coins :



mais il est aussi possible de prendre les 4 billes au centre :

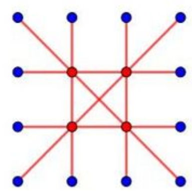


Schéma 4 : exemple de non-unicité des solutions

Enfin, une remarque qui est restée à l'état de simple conjecture, est que le nombre de billes de départ doit être pair pour qu'un ensemble puisse être solution.

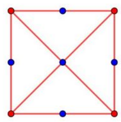
3.2. Preuve que les ensembles trouvés pour $n = 3$ et $n = 4$ sont solutions

Une fois avoir trouvé différents ensembles remplissant la condition 1 (toutes les billes ont été retirées), nous avons donc essayé de démontrer que ces ensembles sont des solutions au problème.

Pour cela, nous avons utilisés un raisonnement par l'absurde.

Soit α_n le cardinal de S pour un carré de côté n (donc le nombre de billes choisies au départ).

<u>Pour $n = 3$:</u> Nous avons trouvé une solution avec $\alpha_3 = 4$:

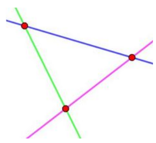


<u>Schéma 5</u> : une solution avec $\alpha_3 = 4$

Montrons qu'il n'est pas possible que $\alpha_3 < 4$.

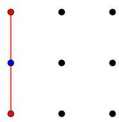
Supposons que $\alpha_3 < 4$. On a alors $\alpha_3 = 1$ ou $\alpha_3 = 2$ ou $\alpha_3 = 3$.

- **Si** $\alpha_3 = 1$, on ne peut pas former de droites donc on ne retire qu'une bille sur les 9. Absurde.
  Donc $\alpha_3 > 1$.
- **Si** $\alpha_3 = 2$, on peut former une seule droite, et une droite contient au maximum $n = 3$ billes. On ne retire donc que 3 billes sur les 9. Absurde.
  Donc $\alpha_3 > 2$.
- **Si** $\alpha_3 = 3$, on peut alors former 3 droites.



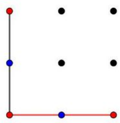
<u>Schéma 6 a</u> : les trois droites formées

La première droite contient au maximum $n = 3$ billes, on retire donc 3 billes.



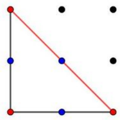
<u>Schéma 6 b</u> : la première droite

La deuxième droite contient elle aussi au maximum $n = 3$ billes, mais une de ces billes est déjà comptée car il s'agit d'une des billes que l'on a utilisé pour former la première droite, on retire donc 2 billes.



<u>Schéma 6 c</u> : la deuxième droite

La troisième droite contient elle aussi au maximum $n = 3$ billes, mais comme pour la deuxième droite, il y a 2 billes déjà comptées, on retire donc une seule bille.



<u>Schéma 6 d</u> : la troisième droite

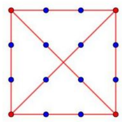
Ce qui fait que l'on retire $3 + 2 + 1 = 6$ billes sur les 9. Absurde.

Donc $\alpha_3 > 2$.

Donc $\alpha_3 = 4$.

Il est possible de faire de même avec $n = 4$:

<u>Pour $n = 4$:</u> Nous avons trouvés une solution avec $\alpha_4 = 4$:



<u>Schéma 7</u> : une solution avec $\alpha_4 = 4$

Montrons qu'il n'est pas possible que $\alpha_4 < 4$.

Supposons que $\alpha_4 < 4$. On a alors $\alpha_4 = 1$ ou $\alpha_4 = 2$ ou $\alpha_4 = 3$.

- **Si** $\alpha_4 = 1$, on ne peut pas former de droites donc on ne retire qu'une bille sur les 16. Absurde.
  Donc $\alpha_4 > 1$.
- **Si** $\alpha_4 = 2$, on peut former une seule droite, et une droite contient au maximum $n = 4$ billes.

On ne retire donc que 4 billes sur les 16. Absurde.

Donc $\alpha_4 > 2$.

- **Si** $\alpha_4 = 3$, on peut alors former 3 droites.

La première droite contient au maximum $n = 4$ billes, on retire donc 4 billes.
La deuxième droite contient elle aussi au maximum $n = 4$ billes, mais une de ces billes est déjà comptée car il s'agit d'une des billes que l'on a utilisées pour former la première droite, on retire donc 3 billes.
La troisième droite contient elle aussi au maximum $n = 4$ billes, mais comme pour la deuxième droite, il y a 2 billes déjà comptées, on retire donc une seule bille.

Ce qui fait que l'on retire $4 + 3 + 2 = 9$ billes sur les 16. Absurde.

Donc $\alpha_4 > 3$.

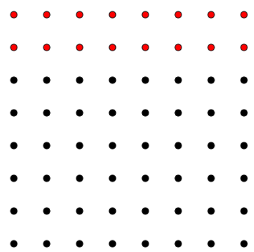
Donc $\alpha_4 = 4$.

Pour $n \geq 5$, il n'est cependant plus possible de prouver de cette manière qu'un ensemble n'est pas solution car la majoration du nombre de points sur une droite est trop grande.

Cependant, cette preuve nous a permis de trouver un seuil en dessous duquel il n'est pas possible de trouver une solution.

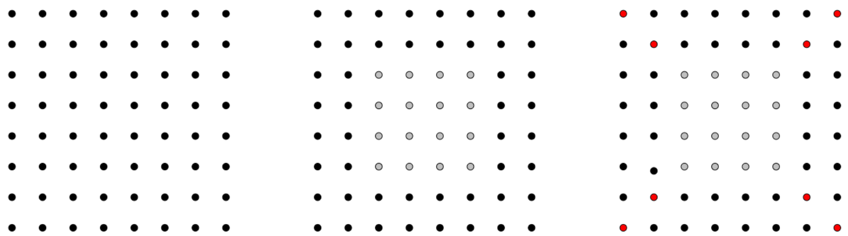
3.3. Détermination d'un intervalle du nombre de billes à choisir au début

Pour trouver un intervalle du nombre de points à choisir au début, il nous faut un majorant μ_n et un minorant λ_n.
Pour le majorant μ_n, il suffit de prendre un nombre pour lequel il existe un ensemble vérifiant la condition 1.
Un choix assez simple de S n'ayant pas un nombre de billes trop grand est de choisir toutes les billes d'une ligne parallèle à un des côtés, ainsi que toutes les billes d'une autre ligne parallèle à la première, ce qui permet de retire toutes les billes du carré. On pourrait donc poser $\mu_n = 2n$.



<u>Schéma 8</u> : illustration d'une solution avec $2n$ billes

Il est possible de réduire légèrement ce α_n en se représentant le carré comme étant un plus petit (par exemple de côté 3 pour les impairs un 4 pour les pairs) auquel on ajoute successivement un certain nombre de carrés vides plus grands. On peut alors retirer les billes rajoutées en choisissant les 4 billes des coins.



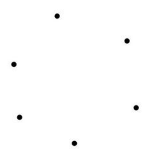
<u>Schéma 9</u> : recherche d'une solution pour $n = 8$ en partant d'un carré de longueur 4

Ce qui donne $\mu_n = 2n - 4$ si n est pair et $\mu_n = 2n - 2$ si n est impair, que l'on peut aussi écrire

$$\mu_n = 2n - (3 + (-1)^n) .$$

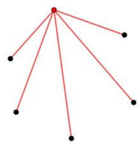
Pour le minorant, il faut prendre un nombre pour lequel il n'est pas possible de trouver un ensemble vérifiant la condition 1 dont le cardinal est strictement inférieur.

Pour trouver un minorant, nous nous sommes donc inspirés de notre preuve par l'absurde.
Prenons un nombre α_n de points choisis au début.



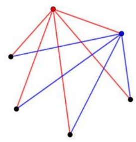
<u>Schéma 10</u> : les α_n points initiaux

À partir d'une première bille, il sera possible de tracer $\alpha_n - 1$ droites en le reliant avec les autres billes.



<u>Schéma 11</u> : les $\alpha_n - 1$ droites

À partir d'une deuxième bille, il sera possible de tracer $\alpha_n - 2$ droites car la droite avec la première bille a déjà été tracée.



<u>Schéma 12</u> : les $\alpha_n - 2$ droites

On continue ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ne puisse plus faire qu'une droite avec l'avant dernière bille.
Le nombre de droites que l'on peut former avec α_n billes est donc égal à la somme des entiers naturels jusqu'à $\alpha_n - 1$, soit $\dfrac{\alpha_n(\alpha_n-1)}{2}$.

Une droite retirant au maximum n billes, il n'est pas possible de retirer plus de $\dfrac{\alpha_n(\alpha_n-1)}{2}\times n$ billes.

Cependant, certaines billes ont été comptées plusieurs fois. En effet, la bille à partir de laquelle les droites ont été tracées a été comptée $\alpha_n - 1$ fois, il faut donc retirer $\alpha_n - 1$ pour chaque bille, mais il faut quand même les compter une fois, et donc rajouter 1 pour chaque bille.

Les droites formées par α_n billes contiennent donc au maximum $\dfrac{\alpha_n(\alpha_n-1)}{2}\times n-\alpha_n(\alpha_n-2)$ billes.

Un minorant du nombre de points à choisir au début est donc α_n solution de l'inéquation (M), avec

$$(\mathrm{M}):\quad \frac{x(x-1)}{2}\times n-x(x-2)\ \geq\ n^2.$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{M}) &\Leftrightarrow\ \frac{x(x-1)}{2}\times n-x(x-2)-n^2\geq\ 0\\ &\Leftrightarrow\ \frac{n}{2}x^2-\frac{n}{2}x-x^2+2x-n^2\geq\ 0\\ &\Leftrightarrow\ \left(\frac{n}{2}-1\right)x^2+\left(2-\frac{n}{2}\right)x-n^2\geq\ 0.\end{aligned}$$

Nous obtenons une fonction polynôme du second degré. Posons $a=\dfrac{n}{2}-1,\ b=2-\dfrac{n}{2}$, et $c=-n^2$.

$$\begin{aligned}\Delta &=b^2-4ac\\ &=\left(2-\frac{n}{2}\right)^2-4\left(\frac{n}{2}-1\right)\times(-n^2)\\ &=\left(2-\frac{n}{2}\right)^2+4n^2\left(\frac{n}{2}-1\right)\end{aligned}$$

Pour tout $n\in \mathbb{N}\setminus\{0;1;\ 2\}$, $(2-n)^2\geq 0$ et $4n^2\left(\dfrac{n}{2}-1\right)>0$ donc $\Delta > 0$.

Cette fonction polynôme admet deux racines $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$a > 0$, et α_n est le premier entier naturel solution de (M).

Donc (3) $\alpha_n \geq \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2na} = \dfrac{-\left(2-\frac{n}{2}\right)+\sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \dfrac{n-4+2\sqrt{\Delta}}{2n-4}$,

ou $\alpha_n \leq \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2na} = \dfrac{-\left(2-\frac{n}{2}\right)-\sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \dfrac{n-4-2\sqrt{\Delta}}{2n-4}$.

Déterminons le signe des racines.

Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1;\ 2\}$, $2n-4>0$, les racines seront donc du signe du numérateur.

$$\Delta = \left(2-\frac{n}{2}\right)^2 + 4n^2\left(\frac{n}{2}-1\right)$$
$$= 4-2n+\frac{n^2}{4}+2n^3-4n^2 = 2n^3-\frac{15}{4}n^2-2n+4.$$

Soit f la fonction telle que $f(x)=2x^3-\frac{15}{4}x^2-2x+4$.

La fonction f est définie, continue et dérivable sur $[3\ ;+\infty[$, en tant que fonction polynôme.

Donc $f'(x)=6x^2-\frac{15}{2}x-2$. C'est une fonction polynôme de degré 2 et dont le coefficient de x^2 est strictement positif.

$$\Delta_f = b^2-4ac = \left(-\frac{15}{2}\right)^2-4\times6\times(-2) = \frac{417}{4}.$$

$\Delta_f > 0$ donc f' admet deux racines $x_1=\dfrac{15-\sqrt{417}}{24}$ et $x_2=\dfrac{15+\sqrt{417}}{24}$, avec $x_1 \approx -0{,}2$ et $x_2 \approx 1{,}5$ à 10^{-1} près.

Donc f' est strictement positive sur $[3\ ;+\infty[$, donc f est strictement croissante sur $[3\ ;+\infty[$.

Donc Δ sera de plus en plus grand si l'on augmente les valeurs de n, donc $\sqrt{\Delta}$ aussi.

$\alpha_n \in \mathbb{N}$, on cherche donc $\alpha_n > 0$.

- $n-4+2\sqrt{\Delta}$ prendra donc sa valeur minimale pour $n = 3$.

Pour $n = 3$:

$$n-4+2\sqrt{\Delta} = 3-4+\sqrt{2\times3^3-\frac{15}{4}\times3^2-2\times3+4} = -1+\sqrt{\frac{73}{4}} \approx 3{,}27 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1;2\}$, $\dfrac{n-4+2\sqrt{\Delta}}{2n-4} > 0$.

- $n-4-2\sqrt{\Delta} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{n-4}{2} \geq \sqrt{\Delta}$

Pour $n = 3$,

$$n-4-2\sqrt{\Delta} = 3-4-\sqrt{2\times3^3-\frac{15}{4}\times3^2-2\times3+4} = -1-\sqrt{\frac{73}{4}},$$

et $-1-\sqrt{\dfrac{73}{4}} < 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1;2;3\}$, $\frac{n-4}{2} \geq 0$ et $\sqrt{\Delta} \geq 0$, donc

$$\frac{n-4}{2} \geq \sqrt{\Delta} \Leftrightarrow \left(\frac{n-4}{2}\right)^2 \geq \sqrt{\Delta}^2.$$

En remplaçant Δ par $2n^3 - \frac{15}{4}n^2 - 2n + 4$,

$$\left(\frac{n-4}{2}\right)^2 \geq \sqrt{\Delta^2} \Leftrightarrow \frac{n^2}{4} - 2n + 4 \geq 2n^3 - \frac{15}{4}n^2 - 2n + 4 \Leftrightarrow -2n^3 + 4n^2 \geq 0 \Leftrightarrow n^2(-2n+4) \geq 0$$

$n^2 \geq 0$ et $-2n+4 \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 2$,

Donc pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1;2\}$, $\frac{n-4-2\sqrt{\Delta}}{2n-4} < 0$.

$\alpha_n \in \mathbb{N}$, on cherche $\alpha_n > 0$. Donc $\alpha_n \geq \frac{n-4+2\sqrt{\Delta}}{2n-4}$.

Donc on peut poser

$$\lambda_n = \left\lceil \frac{n-4+2\sqrt{\Delta}}{2n-4} \right\rceil.$$

Nous avons donc un majorant μ_n et un minorant λ_n du nombre α_n de billes à choisir au début pour les solutions au problème. Cela donne donc un encadrement du cardinal σ_n d'un ensemble S solution : $\lambda_n \leq \sigma_n \leq \mu_n$, avec

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \left\lceil \frac{n-4+2\sqrt{\Delta}}{2n-4} \right\rceil \\ \Delta &= 2n^3 - \frac{15}{4}n^2 - 2n + 4 \\ \mu_n &= 2n - 3 + (-1)^n. \end{aligned}$$

3.4. Majoration du nombre de billes sur une droite

La minoration précédente prend en compte qu'une droite contient au maximum n billes, or une grande partie des droites que l'on va former ne comporteront pas n billes. Nous avons donc essayé de majorer le nombre de billes sur une droite en fonction de la droite.

Pour cela, nous allons d'abord placer le carré dans un repère orthonormé de tel sorte que chaque bille ait des coordonnées comprises au sens large entre 0 et $n - 1$.

Soit P_n le carré de côté n étudié.

Soit D la droite étudiée.

Soient $(x_0 ; y_0)$ les coordonnées d'une des billes choisies au début pour former cette droite.

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul tels que le rapport a/b soit égal au coefficient directeur de la droite, avec a et b premiers entres eux.

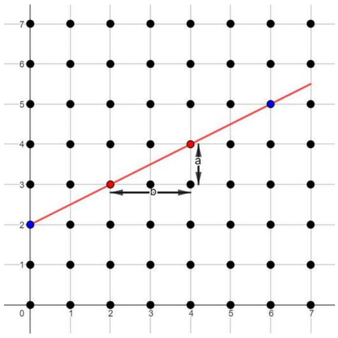


Schéma 13 : droite de coefficient directeur $\frac{a}{b}$

On a donc

$$D \cap P_n = P_n \cap \{(x_0 + kb\,;\,y_0 + ka),\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Cas particulier : Si la droite D est parallèle à l'axe des ordonnées, le nombre de points de P_n compris dans cette droite est de n.

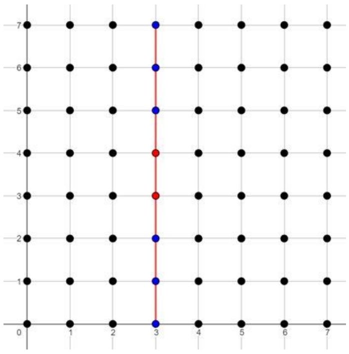


Schéma 14 : droite parallèle à l'axe des ordonnées

Nous avons donc

$$\begin{cases} 0 \leq x_0 + kb \leq n-1 & (1) \\ 0 \leq y_0 + ka \leq n-1 & (2) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$a \in \mathbb{Z}$ donc nous devons étudier : si $a = 0$,
si $a > 0$,
si $a < 0$.

Si $a = 0$, La droite D est parallèle à l'axe des abscisses donc elle compte n points.

Si $a > 0$, $b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, donc $(1) \Leftrightarrow -\frac{x_0}{b} \leq k \leq \frac{n-1-x_0}{b}$,

$a > 0$ donc $(2) \Leftrightarrow -\frac{y_0}{a} \leq k \leq \frac{n-1-y_0}{a}$.

Donc $\max\left(-\frac{y_0}{a}; -\frac{x_0}{b}\right) \leq k \leq \min\left(\frac{n-1-y_0}{a}; \frac{n-1-x_0}{b}\right)$ soit :

$$-\min\left(\frac{y_0}{a}; \frac{x_0}{b}\right) \leq k \leq \min\left(\frac{n-1-y_0}{a}; \frac{n-1-x_0}{b}\right).$$

- Si $a > b$, $\frac{y_0}{a} < \frac{x_0}{b}$ et $\frac{n-1-y_0}{a} < \frac{n-1-x_0}{b}$ donc $\frac{y_0}{a} \leq k \leq \frac{n-1-y_0}{a}$ donc $\left[\frac{n}{a}\right]$ valeurs possibles pour k (4).
- Si $a < b$, $\frac{y_0}{a} > \frac{x_0}{b}$ et $\frac{n-1-y_0}{a} > \frac{n-1-x_0}{b}$ donc $\frac{x_0}{b} \leq k \leq \frac{n-1-x_0}{b}$ donc $\left[\frac{n}{b}\right]$ valeurs possibles pour k.
- Si $a = b$, la droite D forme alors un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec les côtés, il y a donc n valeurs possibles pour k au maximum

Si $a < 0$, il suffit alors de prendre la symétrie de carré par rapport à l'axe des abscisses, puis de définir un nouveau repère et on retombe alors sur le cas précédent où $a > 0$.

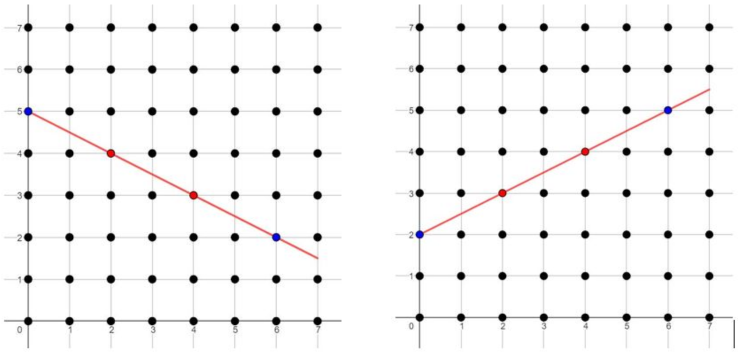


Schéma 15 : passage au symétrique pour $a < 0$

Cela nous donne donc une majoration du nombre de billes sur la droite en fonction de la droite. Cependant, pour pouvoir utiliser cette majoration dans notre encadrement, il faudrait pouvoir prendre en compte les différentes droites que l'on forme à partir du nombre de billes que l'on a choisi, ce que nous n'avons pas réussi à faire.

3.5. Pistes non exploitées

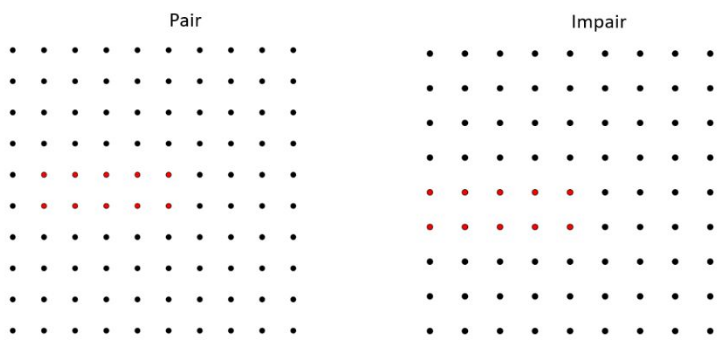
Dans cet article, nous avons détaillé les différents résultants que nous avons obtenus et que nous avons présentés lors du congrès. Mais suite aux échanges que nous avons eus lors du congrès et aux réflexions qui se sont poursuivies lors de la rédaction de cet article, de nouvelles idées nous sont venues à l'esprit, et nous n'avons pas pu les exploiter faute de temps.

Afin de déterminer un minorant plus précis (*3.3. Détermination d'un intervalle du nombre de billes à choisir au début*), il nous est venu à l'idée de prendre en compte que l'on ne peut faire que $2n + 2$ droites comptant n billes (les droites parallèles au côtés et les diagonales), et de considérer ainsi de suite le nombre de droites récupérant le plus de billes possibles (4 droites parallèles à une des diagonales avec $n - 1$ billes , 4 autres avec $n - 2$ billes, etc jusqu'à arriver à $n/2$, où l'on considérerait alors les droites avec un coefficient directeur de $1/2$).

Nous pensons également qu'il serait peut-être possible d'utiliser notre majoration du nombre de billes en fonction des droites (*3.4. Majoration du nombre de billes sur une droite*) dans cette méthode.

Nous avons également trouvé une méthode pour choisir un ensemble qui semble être très efficace pour retirer toutes les billes.

Cette méthode consiste, pour les carrés de côté n pair, à choisir les 4 billes du centre, puis à choisir successivement 2 billes sur les lignes du milieu perpendiculaires à un côté jusqu'à arriver aux 2 billes formant le côté, et en ne choisissant pas ces dernières.
Pour les carrés de côté n impair, il suffirait d'appliquer cette méthode au carré de côté $n+1$, et de retirer toutes les billes de 2 côtés de manière à former le carré de côté n. Ainsi, si la méthode fonctionne pour les carrés de côtés pairs, cela fonctionnera pour les carrés de côté impair.



Cette méthode permettrait, s'il s'avère qu'elle retire bien toutes les billes pour n'importe quel carré de côté n, d'obtenir un majorant de α_n plus petit, qui serait n pour les nombres pairs, et $n+1$ pour les nombres impairs.

Conclusion

Nos recherches nous ont donc permis de déterminer un encadrement du nombre de billes qu'il est nécessaire de choisir au début pour qu'un ensemble S soit solution. Nous avons des pistes pour réduire cet encadrement, mais malheureusement nous n'avons pas eu le temps de développer nos dernières idées.

Cependant, nous n'avons pas trouvé lors de nos recherches une méthode pour déterminer un ensemble S qui serait solution, ni une méthode pour trouver un ensemble qui soit très efficace et qui se rapproche de l'ensemble S solution.

Notes d'édition

(1) $\lceil x \rceil$ désigne la partie entère supérieure du réel x (le plus petit entier supérieur ou égal à x).

(2) "Le même ensemble S (s'il existe)", c'est-à-dire si S est contenu dans une grille plus petite. Si on n'a pas de solution contenue dans une grille plus petite, la remarque ne s'applique pas ; il n'est donc pas évident que le nombre de billes à choisir croisse avec la taille de la grille.

(3) Le coefficient de x^2 étant positif, la fonction polynôme est négative entre ses racines et positive en dehors de l'intervalle des racines, d'où les deux possibilités pour α_n.
Mais on peut remarquer tout de suite que sa valeur en 0, $c = -n^2$, est négative donc que la plus petite des racines est négative et la plus grande positive. Comme $\alpha_n > 0$, la seconde inéquation n'est jamais vérifiée et on peut donner le minorant λ_n sans plus de calculs.

(4) Il y a une erreur ici : selon x_0 et y_0, les inégalités $y_0/a < x_0/b$ et $(n-1-y_0)/a < (n-1-x_0)/b$ ne sont pas nécessairement vérifiées. Mais on a bien $y_0/a \leq k \leq (n-1-y_0)/a$ et donc *au maximum* $\lceil n/a \rceil$ valeurs possibles de k.
De même pour le cas $a < b$.