Jeu de Babylone

Année 2016-2017

Auteurs : LIZÉ Louise, ORVAIN Laura (1ère S) et RUTGERS-MAKELE Yelnick (Tale ES).
Établissement : Lycée Condorcet, Saint-Quentin (02).
Encadrés par : Fabien AOUSTIN.
Chercheur : Fabien DURAND, Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée, LAMFA, UMR CNRS 7352, Université de Picardie Jules Verne.

1) PRÉSENTATION DU JEU

Il y a 12 tablettes (3 par couleur). En début de jeu aucune tablette n'est empilée sur une autre.
À chaque tour de jeu, chacun des deux joueurs doit déplacer une pile complète vers une autre.
Pour cela les deux piles doivent avoir au moins une caractéristique commune :

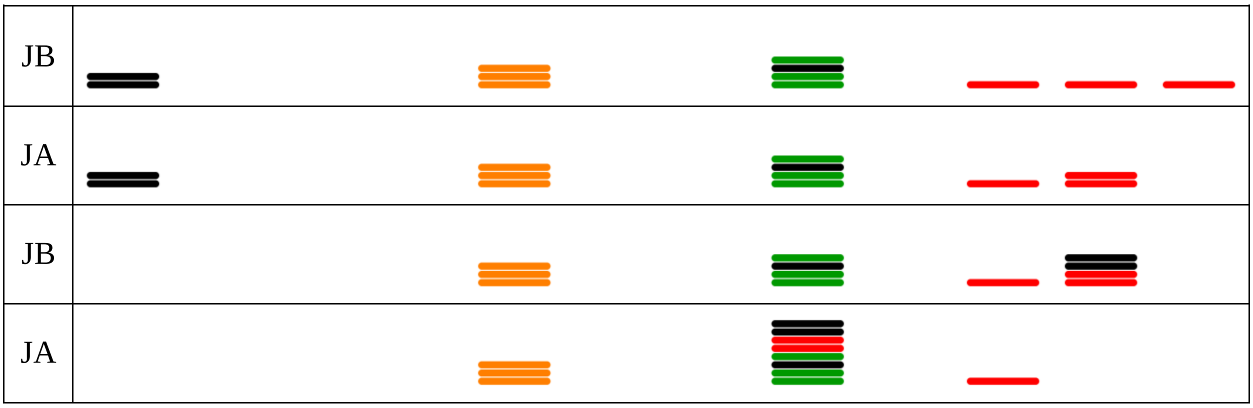
- la couleur de la tablette la plus haute ;
- la hauteur de la pile.

Le dernier joueur à pouvoir jouer a gagné.
Le jeu a été inventé par Bruno Faidutti.

Exemple de partie :
La partie commence ainsi :

Les joueurs A et B jouent à tour de rôle :

JA	
JB	
JA	
JB	
JA	



Le joueur B ne peut plus jouer, il a perdu.

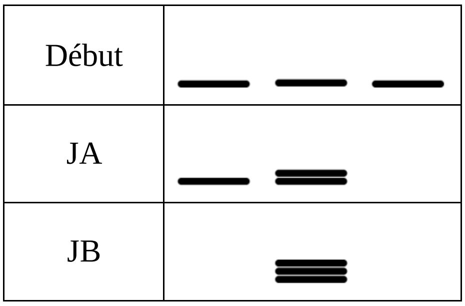
Nous nous sommes demandé s’il y avait une stratégie gagnante pour un des deux joueurs.
Et si oui, laquelle ?

Analyser le jeu semble trop compliqué !
Nous avons donc essayé de le simplifier pour commencer...

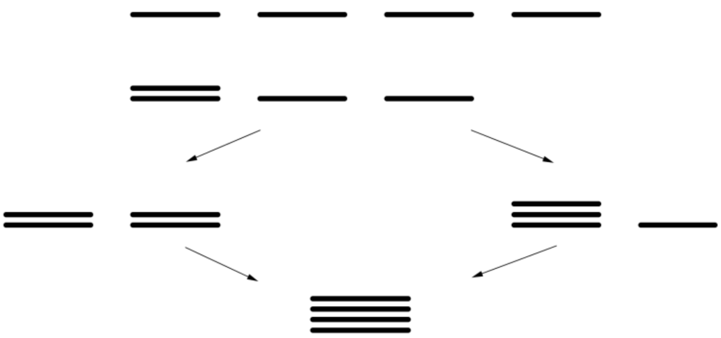
2) AVEC UNE SEULE COULEUR

Pour simplifier le jeu, on peut jouer avec n tablettes d’une seule couleur.
Les piles peuvent alors toujours être empilées les unes sur les autres.
À chaque coup, il y a une pile de moins. Pour n tablettes, il y a donc $n - 1$ coups.

Si le nombre de tablettes n est **impair**, le joueur **B** gagne.
Exemple :



Si le nombre de tablettes n est **pair**, le joueur **A** gagne.
Exemple :



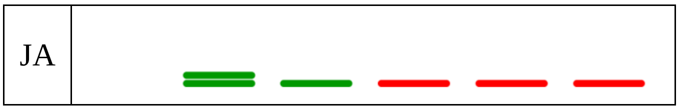
3) AVEC 2 COULEURS ET 3 TABLETTES

On part de la situation suivante :

Le joueur A a deux possibilités : il peut empiler :

- ► Cas n° 1 : deux tablettes de la même couleur ;
- ► Cas n° 2 : deux tablettes de couleur différentes.

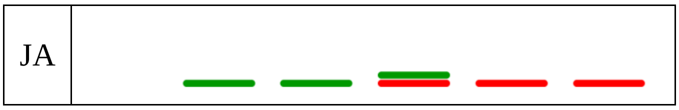
Étude du cas n° 1 :



Le joueur B empile alors une tablette de la même couleur que celle jouée par A sur une tablette de l'autre couleur.

Le joueur B est ainsi sûr de gagner car le joueur A n'a que 2 choix :
► soit il empile les deux piles de deux étages et ainsi le joueur B empile les deux tablettes rouges.
► soit il empile les deux tablettes rouges et le joueur B empilera ensuite les deux piles vertes de deux étages.
Dans tous les cas, on a la même situation finale.

Étude du cas n° 2 :



Le joueur B empile alors les deux tablettes de la même couleur que celle jouée par le joueur A.

Le joueur B est ainsi sûr de gagner car on retrouve la même situation qu'à la fin du cas n° 1.

Conclusion :
Dans tous les cas, le joueur B est sûr de gagner.

4) DES ARBRES ET UNE NOTATION

Nous avons essayé d'analyser d'autres configurations en faisant des arbres.
À chaque nœud, nous dessinions la situation du jeu mais cela était trop long...
Nous avons donc imaginé une notation pour représenter le jeu.
Chaque pile est représentée par une lettre correspondant à la couleur située au sommet.
En indice, on indique le nombre d'étages de la pile.
Devant la lettre, on indique combien de piles il y a.

Exemple :

(A_1, B_1, $2A_2$, B_2, C_4)

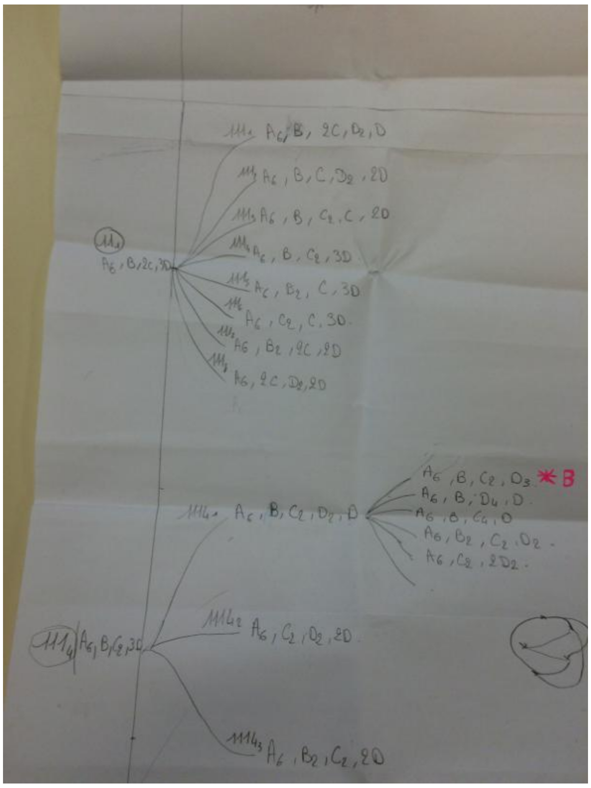
(on a noté A pour noir, B pour rouge et C pour orange)

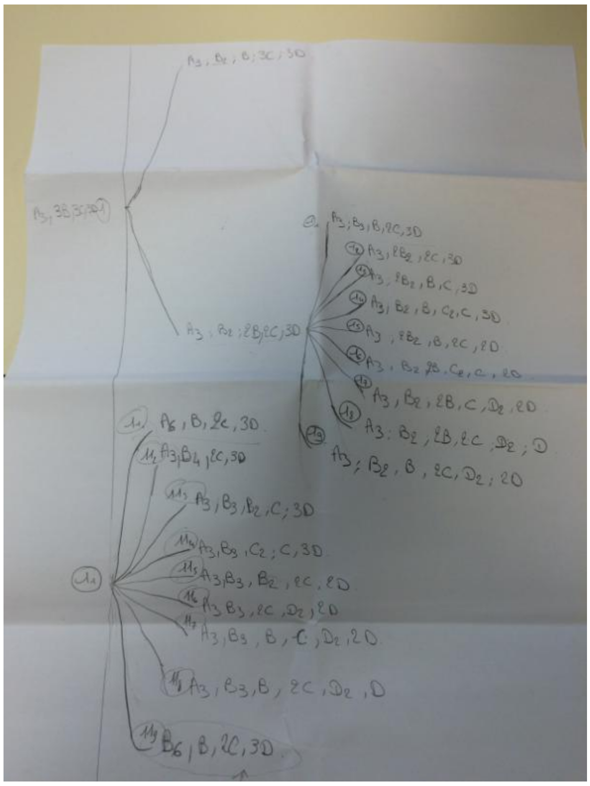
Deux opérations sont possibles sur ces piles :

- si la lettre est la même, on peut additionner les indices.
  Exemple :
  (A_3, B_3, B_4) donne (A_3, B_7).

- Si l'indice est le même, on choisit la lettre qu'on veut et on double l'indice.
  Exemple :
  (A_3, B_3, B_4) donne (A_6, B_4) ou (B_6, B_4).

Nous avons ensuite commencé l'arbre pour le jeu original en utilisant notre notation.
C'était hélas encore beaucoup trop long à la main !





Et nous n'avons fait que la première branche à chaque fois !

Nous avons réalisé l'arbre dans des cas plus simples.
Voici par exemple l'arbre pour le jeu avec 3 couleurs et 2 tablettes par couleurs :

2A, 2B, 2C	A_2, 2B, 2C	A_2, B_2, 2C	A_4, 2C	A_4, C_2 *	
			A_2, B_2, C_2	A_4, C_2 *	
		A_2, B, B_2, C	A_4, B, C	A_4, B_2 *	
			B_4, B, C	B_5, C *	
				B_4, C_2 *	
				B_4, B_2	B_6 *
			A_2, 2B_2	A_4, B_2 *	
				A_2, B_4 *	
				B_4, B_2	B_6 *
			A_2, B_2, C_2	A_4, C_2 *	
	A, A_2, B, 2C	A_3, B, 2C	A_3, B_2, C *		
			A_3, C_2, C	A_3, C_3	A_6 *
		2A_2, 2C	A_4, 2C	A_4, C_2 *	
			2A_2, C_2	A_4, C_2 *	
				A_4, A_2	A_6 *
		2A_2, B, C	A_4, B, C	A_4, B_2 *	
			2A_2, B_2	A_4, B_2 *	
				A_4, A_2	A_6 *
		A, A_2, B_2, C	A_3, B_2, C *		
			2A_2, B_2	A_4, B_2 *	
				A_4, A_2	A_6 *
			A_2, B_2, C_2	A_4, C_2 *	
			A_4, A, C	A_5, C *	
				A_4, A_2	A_6 *
				A_4, C_2 *	
			B_4, A, C	B_4, A_2 *	
		A, A_2, C_2, C	A_3, C_2, C	A_3, C_3	A_6 *
			2A_2, C_2	A_4, C_2 *	
				A_4, A_2	A_6 *
			A_4, A, C	A_5, C *	
				A_4, A_2	A_6 *
				A_4, C_2 *	

Les étoiles indiquent que la partie est terminée.
On observe ici que le joueur B peut toujours choisir un chemin qui le mènera à la victoire. (1)

En effet, intéressons-nous au premier coup possible du joueur A, soit $A_2, 2B, 2C$, alors si le joueur B joue $A_2, B_2, 2C$, alors les chemins qui s'ensuivent ne laissent que la possibilité d'une partie gagné par le joueur B !

$2A, 2B, 2C$	$A_2, 2B, 2C$	$A_2, B_2, 2C$	$A_4, 2C$	A_4, C_2 *	← B gagne
			A_2, B_2, C_2	A_4, C_2 *	← B gagne
		A_2, B, B_2, C	A_4, B, C	A_4, B_2 *	
			B_4, B, C	B_5, C *	
				B_4, C_2 *	
				B_4, B_2	B_6 *
			$A_2, 2B_2$	A_4, B_2 *	
				A_2, B_4 *	
				B_4, B_2	B_6 *
			A_2, B_2, C_2	A_4, C_2 *	

Puis si nous nous intéressons au deuxième coup possible du joueur A, c'est-à-dire $A, A_2, B, 2C$, le joueur B a plusieurs façons de jouer pour pouvoir gagner. Étudions un cas (connaitre un seul cas est suffisant pour gagner), celui où B joue par la suite $2A_2, 2C$, et peu importe ce que le joueur A joue, il devra finir par A_4, C_2.

	$A, A_2, B, 2C$	$A_3, B, 2C$	A_3, B_2, C *		
			A_3, C_2, C	A_3, C_3	A_6 *
		$2A_2, 2C$	$A_4, 2C$	A_4, C_2 *	← B gagne
			$2A_2, C_2$	A_4, C_2 *	← B gagne
				A_4, A_2	A_6 *
		$2A_2, B, C$	A_4, B, C	A_4, B_2 *	
			$2A_2, B_2$	A_4, B_2 *	
				A_4, A_2	A_6 *
		A, A_2, B_2, C	A_3, B_2, C *		
			$2A_2, B_2$	A_4, B_2 *	
				A_4, A_2	A_6 *
			A_2, B_2, C_2	A_4, C_2 *	
			A_4, A, C	A_5, C *	
				A_4, A_2	A_6 *
				A_4, C_2 *	
			B_4, A, C	B_4, A_2 *	
		A, A_2, C_2, C	A_3, C_2, C	A_3, C_3	A_6 *
			$2A_2, C_2$	A_4, C_2 *	
				A_4, A_2	A_6 *
			A_4, A, C	A_5, C *	
				A_4, A_2	A_6 *
				A_4, C_2 *	

5) SANS LA RÈGLE DES ÉTAGES

Pour simplifier le jeu initial, on décide de ne garder que la règle des couleurs.
On joue avec *m* couleurs et *n* tablettes par couleur.

On a déjà vu que s'il n'y a qu'une seule couleur, le premier joueur gagne si *n* est pair et le deuxième joueur gagne si *n* est impair.

Avec *m* couleurs et *n* tablettes :

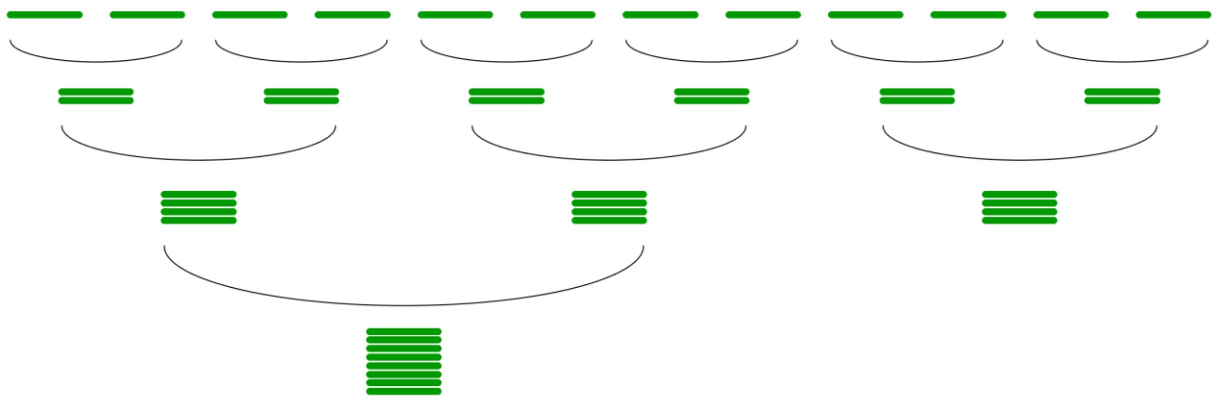
- ► Le joueur A gagne donc si *n* est pair et *m* est impair.
- ► Le joueur B gagne donc si *n* impair ou, si *n* est pair et *m* aussi. (2)

Exemple :
Supposons ici qu'on joue avec $m = 2$ couleurs et $n = 3$ tablettes par couleurs.
On ne joue pas avec la règle des étages. On ne peut donc empiler que des tablettes de la même couleur. On peut donc jouer les couleurs les unes après les autres. On part de 3A, 3B, 3C.
Le joueur A joue A_2, A, 3B, 3C puis le joueur B joue A_3, 3B, 3C.
Le joueur A joue A_3, B_2, B, 3C puis le joueur B joue A_3, B_3, 3C.
Le joueur A joue A_2, B_3, C_2, C puis le joueur B joue A_3, B_3, C_3.
C'est dont le joueur B qui a gagné.

6) SANS LA RÈGLE DES COULEURS

Pour simplifier le jeu initial, on décide de ne garder que la règle des étages.
Cela revient à jouer avec un seule couleur mais seules des piles comptant le même nombre d'étages peuvent être empilées.
Le nombre d'étages d'une pile est donc toujours une puissance de 2.

Exemple avec 12 tablettes :



Dans ce cas, c'est le joueur B qui gagne.

Pour déterminer quel joueur gagne pour un nombre de tablettes données, nous avons mis au point un algorithme. La méthode à suivre est la suivante.
Nous prenons *n* tablettes (soit 12 dans notre exemple) que nous divisons par 2 afin de savoir combien de piles de deux tablettes nous pouvons faire. Nous réitérons cette action avec le résultat précédent (soit 6 dans notre exemple) pour trouver le nombre de piles de quatre étages et ainsi de suite jusqu'à ce que nous ne puissions plus faire de piles.

Nous additionnons ensuite les quotients entre eux. Dans notre exemple cela donne : 6 + 3 + 1 = 10. Si le résultat est impair alors c'est le joueur A qui gagne sinon c'est le joueur B qui gagne.
Voici l'algorithme que nous avons programmé pour des parties de 1 à 100 tablettes.
On peut facilement modifier l'algorithme pour jouer encore plus de parties.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  e EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR e ALLANT_DE 1 A 100
    DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR 0
    n PREND_LA_VALEUR e
    AFFICHER n
    TANT_QUE (n!=1) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      n PREND_LA_VALEUR floor(n/2)
      x PREND_LA_VALEUR x+n
      FIN_TANT_QUE
    SI (x/2==floor(x/2)) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER " joueur b gagne"
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        AFFICHER "joueur a gagne"
        FIN_SINON
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Voici les résultats que nous avons obtenus.

1 joueur b gagne	21 joueur b gagne	41 joueur b gagne	61 joueur b gagne	81 joueur b gagne
2 joueur a gagne	22 joueur a gagne	42 joueur a gagne	62 joueur a gagne	82 joueur a gagne
3 joueur a gagne	23 joueur a gagne	43 joueur a gagne	63 joueur a gagne	83 joueur a gagne
4 joueur a gagne	24 joueur b gagne	44 joueur a gagne	64 joueur a gagne	84 joueur a gagne
5 joueur a gagne	25 joueur b gagne	45 joueur a gagne	65 joueur a gagne	85 joueur a gagne
6 joueur b gagne	26 joueur a gagne	46 joueur b gagne	66 joueur b gagne	86 joueur b gagne
7 joueur b gagne	27 joueur a gagne	47 joueur b gagne	67 joueur b gagne	87 joueur b gagne
8 joueur a gagne	28 joueur a gagne	48 joueur b gagne	68 joueur b gagne	88 joueur a gagne
9 joueur a gagne	29 joueur a gagne	49 joueur b gagne	69 joueur b gagne	89 joueur a gagne
10 joueur b gagne	30 joueur b gagne	50 joueur a gagne	70 joueur a gagne	90 joueur b gagne
11 joueur b gagne	31 joueur b gagne	51 joueur a gagne	71 joueur a gagne	91 joueur b gagne
12 joueur b gagne	32 joueur a gagne	52 joueur a gagne	72 joueur b gagne	92 joueur b gagne
13 joueur b gagne	33 joueur a gagne	53 joueur a gagne	73 joueur b gagne	93 joueur b gagne
14 joueur a gagne	34 joueur b gagne	54 joueur b gagne	74 joueur a gagne	94 joueur a gagne
15 joueur a gagne	35 joueur b gagne	55 joueur b gagne	75 joueur a gagne	95 joueur a gagne
16 joueur a gagne	36 joueur b gagne	56 joueur a gagne	76 joueur a gagne	96 joueur b gagne
17 joueur a gagne	37 joueur b gagne	57 joueur a gagne	77 joueur a gagne	97 joueur b gagne
18 joueur b gagne	38 joueur a gagne	58 joueur b gagne	78 joueur b gagne	98 joueur a gagne
19 joueur b gagne	39 joueur a gagne	59 joueur b gagne	79 joueur b gagne	99 joueur a gagne
20 joueur b gagne	40 joueur b gagne	60 joueur b gagne	80 joueur b gagne	100 joueur a gagne

Nous n'avons pas trouvé de règle simple pour déterminer à l'avance qui de A ou de B gagnera la partie dans ce cas.

Notes d'édition

(1) L'arbre peut sembler incomplet au lecteur attentif car dans la colonne 2 n'apparaissent pas les configurations B_2, 2A, 2C et C_2, 2A, 2B. En fait toutes les configurations manquantes s'obtiennent à partir des deux configurations données en permutant les lettres A, B et C.

(2) Ce résultat est donné sans preuve mais l'exemple permet de le comprendre. Le lecteur désirant trouver une preuve commencera par déterminer le nombre de coups d'une partie .