L’invasion des uns

Année 2007-2008

Auteurs : Adam Benomeur, Thomas Dabin, Julien Esnay, Victor Richman, Mathéo Miellet, Vincent Manoukian

Établissements : Collège Joseph-Paul Rambaud, Pamiers, et collège Pierre Labitrie, Tournefeuille

Encadrés par : Bruno Alaplantive, Anthony Estrade et Frédérique Fournier

Chercheur : Xavier Buff, Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier Toulouse 3.

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Les notes d’édition sont ajoutées après le texte des élèves. Elles donnent des précisions sur les tableaux pages 1, 4 et 5 et sur la méthode de multiplication.

L'INVASION DES UNS

COLLEGES RAMBAUD (PAMIERS), LABITRIE (TOURNEFEUILLE)
CHERCHEUR : XAVIER BUFF (IPS, TOULOUSE)

ELÈVES : Adam, Thomas, Julien , Victor, Mattéo, Vincent
CHERCHEUR : Xavier Buff
ENSEIGNANTS : Bruno Alaplantive, Anthony Estrade, Frédérique Fournier

1. LE SUJET

Peut-on multiplier 2007 par un nombre entier
pour obtenir un résultat ne s'écrivant qu'avec des uns ?

Par exemple :
37 x 3 = 111
271 x 41 = 11 111

Il s'agit donc de compléter l'opération : 2007 x ….. = 1111111111…..111

2. QUELQUES OBSERVATIONS ET UNE PROPRIÉTÉ SURPRENANTE

Nous avons commencé nos recherches … et trouvé quelques produits dont l'écriture ne comporte que des 1 :

EXEMPLES

Nombre de 1	Produit	Résultat
1	1 x 1	1
2	1 x 11	11
3	37 x 3	111
4	11 x 101	1 111
5	271 x 41	11 111
6	11 x 10 101 21 x 5 291 33 x 3 367	111 111

Nombre de 1	Produit	Résultat
6	39 x 2 849 ; 77 x 1 443 91 x 1 221 ; 111 x 1 001 143 x 777 ; 231 x 481 259 x 481 ; 259 x 429 273 x 407	111 111
7	Impossible	Impossible
8	11 x 1 010 101 ; 73 x 152 207 101 x 110 011 ; 137 x 81 103	11 111 111
9	3 x 37 037 037 ; 37 x 3 003 003 111 x 1 001 001 ; 333 x 33 667	111 111 111

Collèges Labitrie (Tournefeuille) et Rambaut (Pamiers)   Collèges Labitrie (Tournefeuille) et Rambaut (Pamiers)

Mais nous étions bien loin de compléter l'opération 2007 x ….. = 111111…

Certains d'entre nous se sont penchés sur ces nombres 1, 11 , 111, 1111… et ont mis à jour une propriété surprenante :

LA PROPRIETE

1 x 9 + 2 = 11

12 x 9 + 3 = 111

123 x 9 + 4 = 1111

1234 x 9 + 5 = 11111

12345 x 9 + 6 = 111111

123456 x 9 + 7 = 1111111

1234567 x 9 + 8 = 11111111

12345678 x 9 + 9 = 111111111

123456789 x 9 + 10 = 1111111111

12345678910 x 9 + 11 = 111111110201 PROBLEME !!

Collèges Labitrie (Tournefeuille) et Rambaut (Pamiers)

Mais ce que nous pensions poser problème, n'en était pas un, il suffisait de comprendre comment étaient construites ces opérations :

LA PROPRIETE

En fait : 12 = 1 x 10 + 2

123 = 12 x 10 + 3

1234 = 123 x 10 + 4

...

Donc, pour étendre la règle, on fait :

123456789 x 10 + 10 = 1234567900

Et effectivement :

1234567900 x 9 + 11 = 1111111111

12345679011 x 9 + 12 = 11111111111

123456790122 x 9 + 13 = 111111111111

1234567901233 x 9 + 14 = 1111111111111

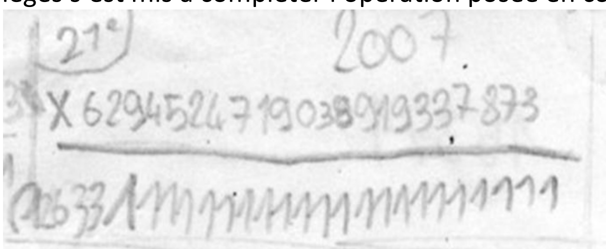
12345679012344 x 9 + 15 = 11111111111111

Collèges Labitrie (Tournefeuille) et Rambaut (Pamiers)

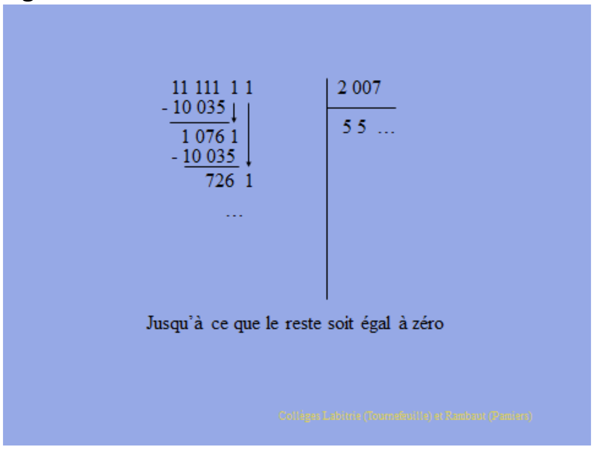
Cela ne nous aidait pas dans notre recherche … nous n'avons pas démontré cette propriété.

Deux groupes se sont formés :

-> les élèves d'un des collèges s'est mis à compléter l'opération posée en colonne :



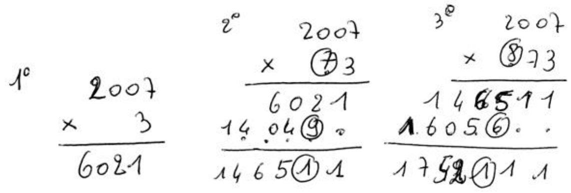
-> les élèves de l’autre collège s’est attelé à la division :

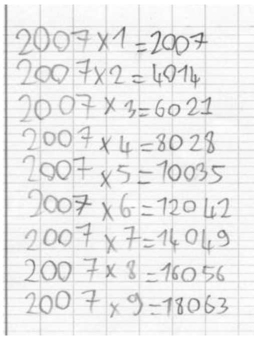


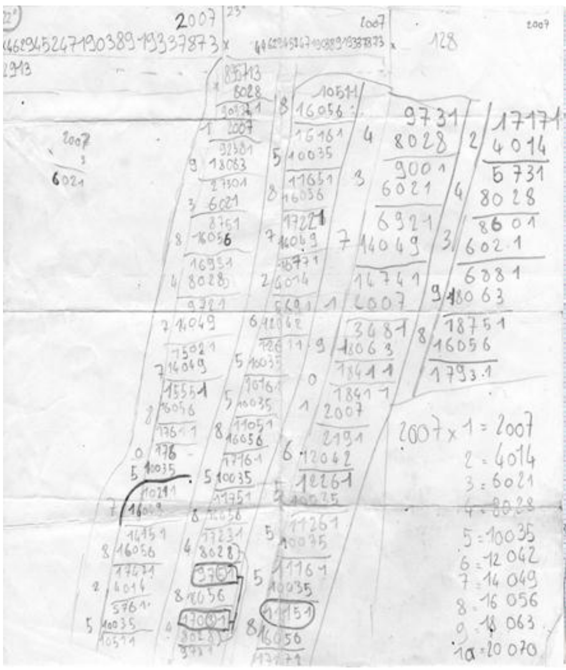
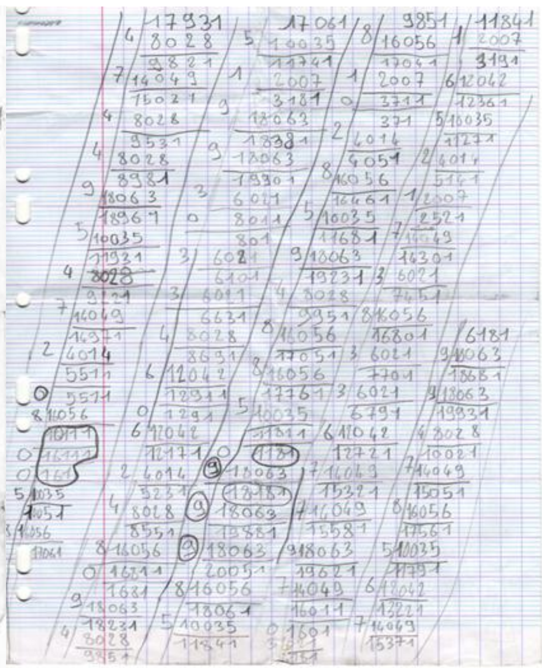
3.Méthode de recherche par multiplication

Nous voici donc partis dans des calculs, calculs, calculs …

Le principe étant d’utiliser la table de 2007 et les produits, qui après retenue donnent un 1 au chiffre des unités :

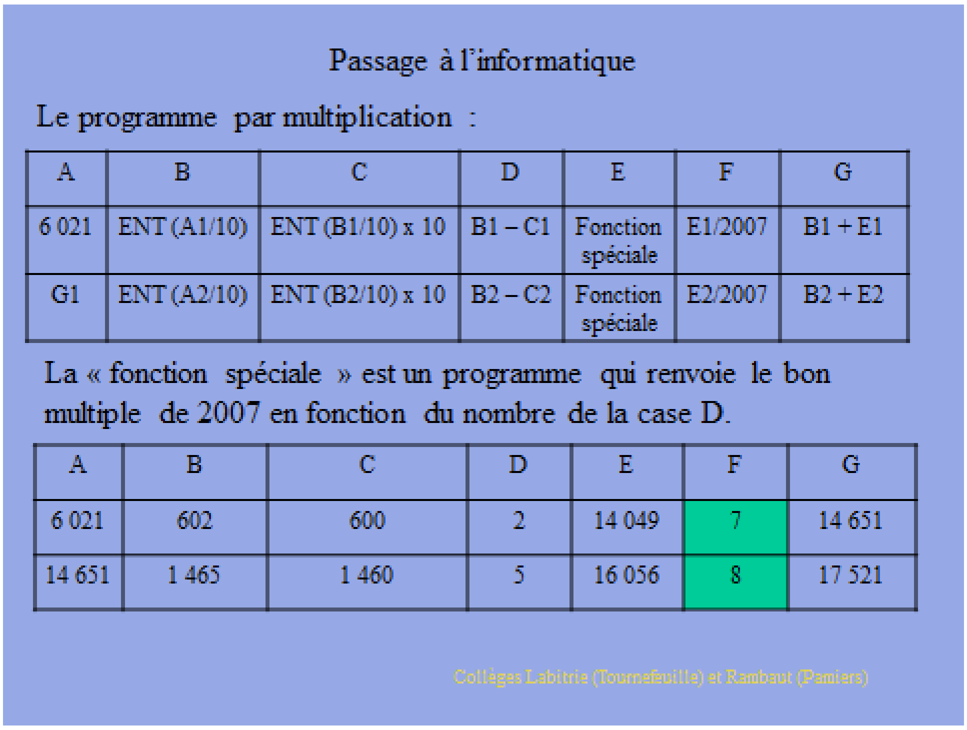




Pour au final, s’entendre dire par Xavier qu’il avait peur qu’il y ait une erreur de calcul …

L'ordinateur est venu à notre secours …



Passage à l'informatique

Le programme par multiplication :

A	B	C	D	E	F	G
6 021	ENT (A1/10)	ENT (B1/10) x 10	B1 – C1	Fonction spéciale	E1/2007	B1 + E1
G1	ENT (A2/10)	ENT (B2/10) x 10	B2 – C2	Fonction spéciale	E2/2007	B2 + E2

La « fonction spéciale » est un programme qui renvoie le bon multiple de 2007 en fonction du nombre de la case D.

A	B	C	D	E	F	G
6 021	602	600	2	14 049	7	14 651
14 651	1 465	1 460	5	16 056	8	17 521

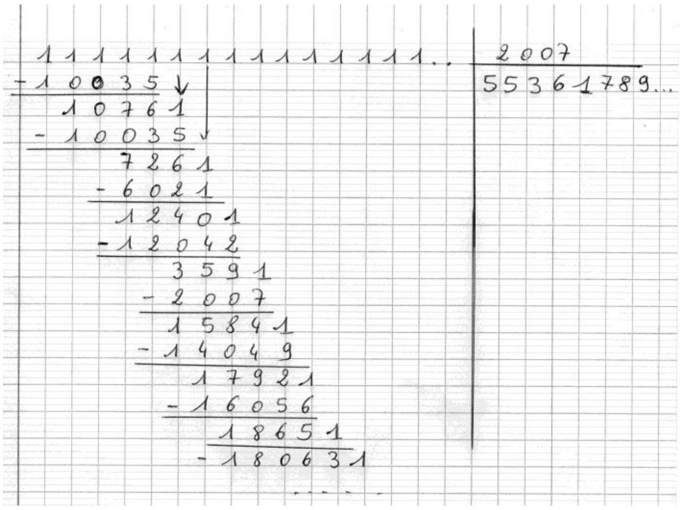
Collèges Labitrie (Tournefeuille) et Rambaut (Pamiers)

Les chiffres successifs qui s'affichent sont dans l'ordre : unité-dizaine-centaine-unité de mille ….bref, le nombre se construit de la droite vers la gauche.

En voici les premiers chiffres : ………… 337873

4. Méthode de recherche par division

La question qui s'est posée c'est celle de la fin ou non de cette division géante …



En effet :

-> si on obtient un reste égal à 0, la division s'arrête et on a trouvé notre nombre …

-> si on obtient un reste déjà rencontré, la division ne s'arrête pas et dans ce cas il n'y a pas de solution au problème …

Question : le reste 0 est-il ou non possible ?

Pour répondre à cette question nous avons dû reprendre la division et son alogorithme de calcul :

-> les restes possibles dans une division par 2007 sont au nombre de 2007 : il s'agit de tous les nombres compris entre 0 et 2006. On va noter R un reste possible.
- > dans notre division, dès qu'un reste est obtenu, on abaisse un 1
Il s'agit donc de vérifier si parmi les nombres de la forme R1 c'est à dire 10xR +1, il y a un nombre de la table de 2007.
En observant la table de 2007, on trouve la réponse :
6021 = 602 x 10 + 1 avec 602 reste possible puisque 602<2007.
Conclusion : cette division peut s'arrêter ! on a au pire 2007 divisions à effectuer …

Pas question donc de faire ces éventuelles 2007 divisions à la main ….

Passage à l'informatique

Le programme par multiplication :

A	B	C	D	E	F	G
6 021	ENT (A1/10)	ENT (B1/10) x 10	B1 – C1	Fonction spéciale	E1/2007	B1 + E1
G1	ENT (A2/10)	ENT (B2/10) x 10	B2 – C2	Fonction spéciale	E2/2007	B2 + E2

La « fonction spéciale » est un programme qui renvoie le bon multiple de 2007 en fonction du nombre de la case D.

A	B	C	D	E	F	G
6 021	602	600	2	14 049	7	14 651
14 651	1 465	1 460	5	16 056	8	17 521

Collèges Labitrie (Tournefeuille) et Rambaut (Pamiers)

Par cette méthode, nous avons construit le nombre de la gauche vers la droite, c'est-à-dire du chiffre occupant la plus grande position vers le chiffre des unités…
En voici les premiers chiffres : 55361789…

5. LE NOMBRE !

Les deux programmes tournaient en parallèle.. et nous avons dû attendre la fin des deux pour comparer les deux nombres obtenus …

Et enfin, le nombre recherché :

5536178929302995072800752920334385207329900902
3971654763881268665227260145047887947738470907
3797265127608924320434036428057354813707579028
9542158002546642307479377733488346343353817195
3717544151026961191395705586604539666722028455
9596966173946741958700105187399656756906383214
3054863533189392681171455461440513757404639317
9427559098710070309472402148037424569562088246
6921330897414604440015501301002048286203842108
1769362785806237225267120633338869512262636328
4061340862536677185406632342357304988097215301
9985605934783812212810718042407130598460942257
6537673697613906881470409123622875491335879975
6408127110668216796766871505287050877484360294
524719038919337873

Collèges Labitrie (Tournefeuille) et Rambaut (Pamiers)

UN NOMBRE DE 662 CHIFFRES POUR UN PRODUIT PAR 2007 QUI S'ÉCRIT AVEC 666 CHIFFRES 1 !!!

Notes d'édition

(1) *Tableau page 1*. Le nombre s'écrivant avec 7 chiffres égaux à 1 peut aussi être décompsé en un produit : $1111111 = 239 \times 4649$.

(2) *Méthode de multiplication et tableau page 4.* La "méthode de multiplication" est plutôt une méthode de division "à l'envers", de la droite vers la gauche : il s'agit d'obtenir de proche en proche des nombres dont le produit avec 2007 s'écrit avec de plus en plus de chiffres égaux à 1, à partir du chiffre des unités. On part de $2007 \times 3 = 6021$, puis à chaque étape, on ajoute un chiffre à gauche du multiplicateur de façon à obtenir un 1 de plus pour le produit. Il y a toujours un choix, unique, car les multiplications de 2007 par les nombres de 0 à 9 donnent une fois et une seule chaque chiffre des unités (voir le tableau à droite en milieu de page 3).

Dans le tableau ("passage à l'informatique"), on applique cette technique : en colonne A on aura le nombre formé des chiffres du produit jusqu'au dernier 1 ajouté (en partant de 6021 en A1). On supprime le 1 final, dont on n'aura plus à s'occuper, en colonne B, et on isole le nouveau chiffre des unités en colonne D. On trouve alors le multiple de 2007 par un nombre entre 0 et 9 qui additionné à ce dernier chiffre aura 1 comme chiffre des unités, grâce à la "fonction spéciale" en colonne E. La colonne F contient les chiffres par lesquels on a multiplié 2007, qui sont les chiffres à ajouter à gauche du multiplicateur.
Finalement, en G on additionne les colonnes E et B ; cela correspond à ce que l'on fait quand on pose la multiplication et que l'on effectue le calcul les chiffres du multiplicateur étant pris un par un de la gauche vers la droite.

Puis on recommence ces opérations en mettant en A2 la valeur trouvée en G1 ; et la 2e ligne est recopiée en-dessous autant de fois que nécessaire. On obtient ainsi progressivement des produits avec un nombre croissant de 1 à droite ; par exemple avec les deux lignes de calcul affichées, on trouve

$$\begin{aligned} 14651 &= 14049 + 602 = 7 \times 2007 + 602 \\ 146511 &= 140490 + 6021 = 70 \times 2007 + 3 \times 2007 = 73 \times 2007 \\ 17521 &= 16056 + 1465 = 8 \times 2007 + 1465 \\ 1752111 &= 1605600 + 146511 = 800 \times 2007 + 73 \times 2007 = 873 \times 2007 \end{aligned}$$

Si on arrive à un "reste" ne s'écrivant qu'avec des 1 on aura donc le résultat cherché, et le multiplicateur trouvé sera le nombre formé des chiffres de la colonne F, lus de bas en haut et auxquels il faut ajouter un 3 pour 6021.

(3) *Tableau page 5, méthode de la division*. Ici le programme sur tableur pour la méthode de multiplication a été inséré de nouveau par erreur. Celui pour la méthode de division doit ressembler à ceci :

A	B	C	D
11111	ENT(A1/2007)	A1-B1*2007	C1*10+1
D1	ENT(A2/2007)	A2-B2*2007	C2*10+1

On part de 11111 en A1 (pour avoir un quotient non nul) ; dans B1 on fait calculer le quotient entier de A1 par 2007, puis dans C1 le reste. Ensuite, dans D1, on multiplie le reste par 10 et on lui ajoute 1 ; comme expliqué dans le texte, ceci revient à abaisser un 1 dans la division à la main.
Puis on recommence ces opérations en mettant dans A2 la valeur trouvée en D1. De même que pour la multiplication, la 2e ligne est recopiée en-dessous autant de fois que nécessaire pour obtenir un reste égal à 0 dans la colonne C (ou au plus 2006 fois).
Si on arrive au reste 0, le quotient se lit dans la colonne B (ici de haut en bas).