# LES INTERRUPTEURS DÉFECTUEUX

TRIMOREAU Vincent, 1ère S
BOUDET Corentin, 1ère S

Cité Scolaire Môquet-Lenoir

1 Rue de l'Europe 44146 Chateaubriant

Enseignant : Mr GREAU

Chercheur : Mr DUCROT

## Énoncé du problème

Un réseau électrique est équipé avec des interrupteurs défectueux. Chaque interrupteur peut être soit ouvert, soit fermé. Malheureusement, à cause de faux contacts, lorsque l'on appuie sur le bouton d'un interrupteur, cela modifie non seulement son état, mais aussi celui de tous les interrupteurs immédiatement voisins. Initialement tous les interrupteurs sont fermés.

Peut-on arriver, en appuyant successivement sur un certain nombre d'interrupteurs, à ouvrir tous les interrupteurs ?

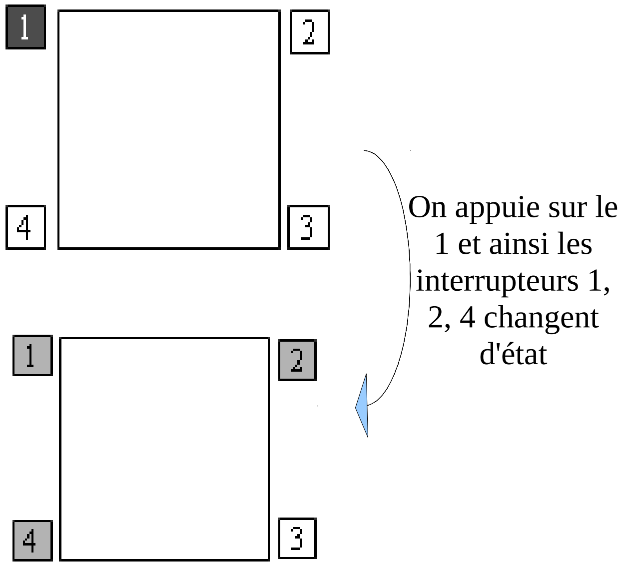
## Introduction

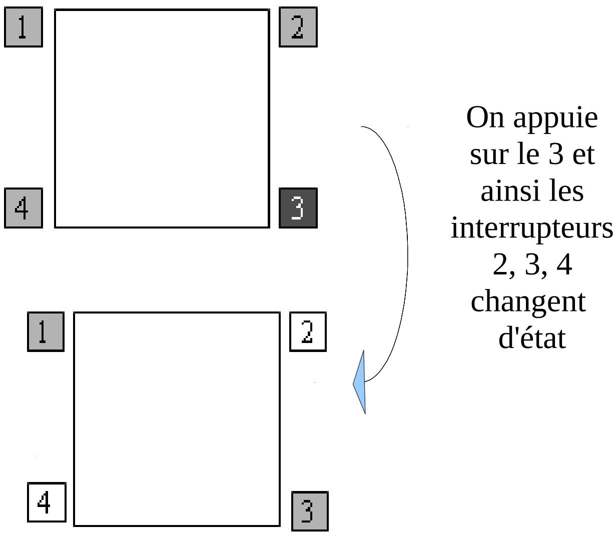
Nous n'avons pas pu traiter le problème dans toute sa généralité et nous avons donc essayé d'étudier des cas particuliers en remarquant qu'un réseau d'interrupteurs à une structure de graphe. Cela nous a permis de transformer chaque problème en un tableau à doubles entrées.

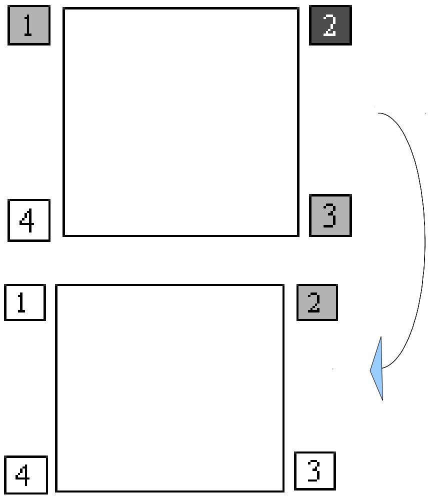
## Cycle d'interrupteurs

**Définition :**
Un cycle d'interrupteurs est un ensemble d'interrupteurs reliés en série

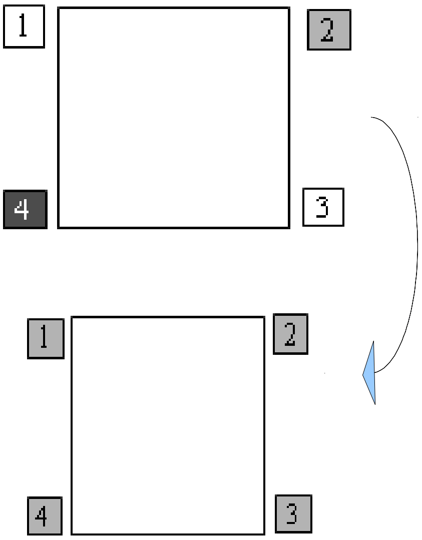
**Exemple :**
Voici la résolution d'un cycle de quatre interrupteurs:





On appuie sur le 2 et ainsi les interrupteurs 1 , 2 , 3 changent d'état



On appuie sur le 4 et ainsi les interrupteurs 1, 3, 4 changent d'état

**Légende**

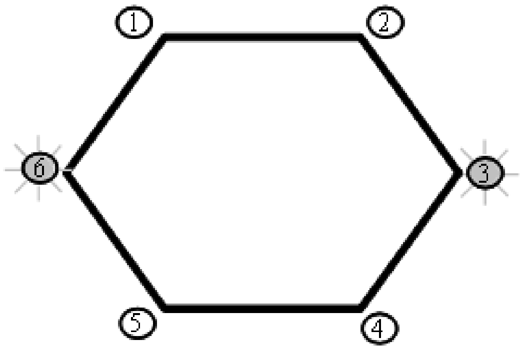
Interrupteur éteint

Interrupteur où l'on appuie

Interrupteur allumé

Pour résoudre ce cycle de quatre interrupteurs, on a appuyé sur tous les interrupteurs du cycle. En généralisant cette méthode, on remarque que si l'on appuie sur tous les interrupteurs dans un cycle alors tous les interrupteurs sont allumés.

**<u>Remarque</u> :**
Voici la résolution d'un cycle de six interrupteurs :



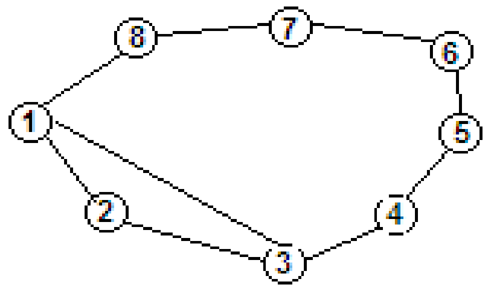
On numérote de 1 à 6 les interrupteurs et on appuie sur le 3 et le 6 pour résoudre plus rapidement ce cycle.

Ainsi, en généralisant là encore la méthode, on remarque que tous les cycles ayant une nombre d'interrupteurs multiple de trois se résolvent en appuyant successivement sur tous les interrupteurs numérotés par un multiple de 3 (3, 6, 9, 12...). (1)

On a aussi remarqué que l'ordre dans lequel on appuie sur les interrupteurs n'a pas d'importance. Pour le démontrer, on a représenté les graphes correspondants aux réseaux d'interrupteurs sous forme de tableaux à double entrée. Dans ce tableau, on place un 1 dans la case (i;j) si les interrupteurs i et j sont reliés par un fil, sinon on place un 0. (2)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Le tableau précédent correspond au réseau suivant :




Ainsi, pour qu'un interrupteur soit ouvert , il doit changer d'état un nombre impair de fois (ex : ouvert , éteint, ouvert ) .

Avec ce tableau, on remarque qu'appuyer sur l'interrupteur i revient à sélectionner la colonne i du tableau. Dans l'exemple suivant, si l'on appuie sur les interrupteurs 1, 2, 3 et 6 alors chaque interrupteur a changé d'état un nombre impair de fois.

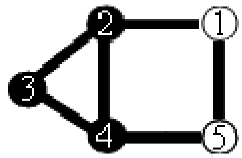
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | = 3 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | = 3 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | = 3 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | = 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | = 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | = 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | = 1 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | = 1 |

On remarque donc que l'ordre n'a pas d'importance puisque il n'intervient pas dans la résolution du problème. C'est le nombre de fois où l'interrupteur change d'état qui compte.

## Avec deux cycles d'interrupteurs

Nous allons démontrer à l'aide d'un exemple que lorsque deux cycles de tailles quelconques ont une unique partie commune, on peut se ramener à une situation plus simple.

Considérons le réseau de cinq interrupteurs ci-dessous:

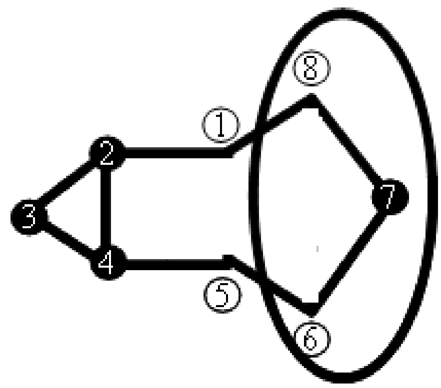



Ce réseau est composé de deux cycles:

- le premier est composé des interrupteurs 2, 3 et 4;
- le second des interrupteurs 1, 2, 4 et 5.

On remarque que ces deux cycles ont deux interrupteurs en commun. Pour résoudre ce système, il suffit d'appuyer sur les interrupteurs numérotés : 2, 3 et 4.

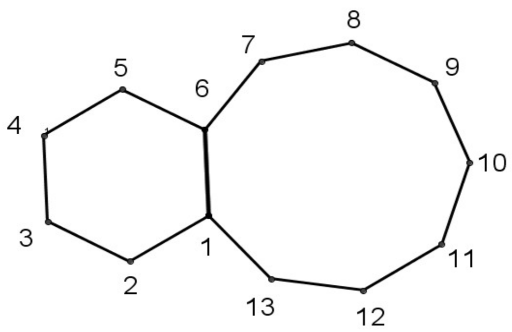
Si l'on rajoute trois interrupteurs : soit sur le cycle de gauche composés de trois interrupteurs ou soit sur le cycle de droite composé de quatre interrupteurs cela ne change pas la résolution du système, en effet, pour résoudre ce nouveau système, on appuie comme précédemment sur les interrupteurs 2, 3 et 4 et sur l'interrupteur situé au milieu des trois interrupteurs rajoutés (le 7).



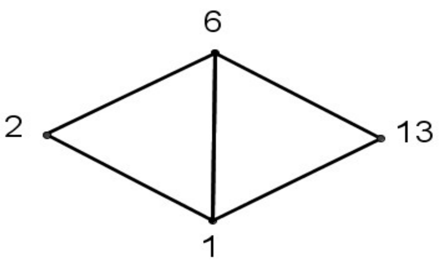

Ainsi, lorsque l'on ajoute trois interrupteurs reliés en série et qui se suivent sur un cycle d'un réseau, on utilise la même méthode qu'avant l'ajout des interrupteurs et on appuie sur l'interrupteur situé au milieu des trois rajoutés pour obtenir la solution du nouveau système.
Ajouter trois interrupteurs reliés en série sur un

réseau ne change pas la méthode pour ouvrir tous les interrupteurs du réseau donc tous les réseaux se simplifient alors en enlevant des multiple de trois interrupteurs reliés en série et qui se suivent. (3)

On considère alors l'exemple ci-dessous :




En appliquant la méthode décrite précédemment on enlève les trois triplets d'interrupteurs suivants: (3-4-5) , (7-8-9) et (10-11-12).
On obtient le système suivant qui se résout en appuyant simplement sur l'interrupteur 1:




Le système de départ se résout donc en appuyant sur les interrupteurs 1, 4, 8 et l1.

**Notation :**
On introduit une notation pour les réseaux composés de deux cycles collés.
- n est le nombre d'interrupteurs à gauche.
- p est le nombre d'interrupteurs à droite.
- q le nombre d'interrupteurs communs.

**Exemple :**
Le réseau de l'exemple précédent est ainsi noté (6;9;2), il se résume à un réseau noté (3;3;2),

**Remarque :**
On note que les interrupteurs en communs sont comptés aussi dans les deux cycles qui composent le réseau.

Ainsi tous les réseaux composés de deux cycles collés se résume à un des réseaux suivants: (4)

(3;3;1)
(3;4;1)
(3;5;1)
(4;4;1)
(4;5;1)
(5;5;1)

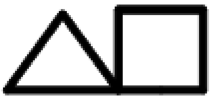
(3;3;2)
(3;4;2)
(3;5;2)
(4;4;2)
(4;5;2)
(5;5;2)

(3;3;3)
(3;4;3)
(3;5;3)
(4;4;3)
(4;5;3)
(5;5;3)

## Solutions lorsque q=1

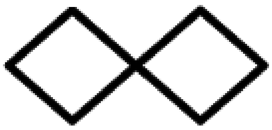
**Réseau de la forme (3 ; 3 ; 1) :**
Appuyer sur l'interrupteur commun.

**Réseau de la forme (3 ; 4 ; 1) :**
Appuyer sur tous les interrupteurs



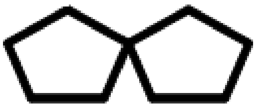
**Réseau de la forme (3 ; 5 ; 1) :**
Il faut appuyer sur 3 des 4 interrupteurs reliés à l'interrupteur commun.

**Réseau de la forme (4 ; 4 ; 1) :**
Il faut appuyer sur tous les interrupteurs.



**Réseau de la forme (4 ; 5 ; 1) :**
Il faut appuyer sur tous les interrupteurs.

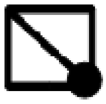
**Réseau de la forme (5 ; 5 ; 1):**
Il faut appuyer sur tous les interrupteurs.



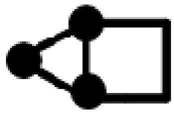
**Remarque :**
Dans chaque cas, appuyer sur tous les interrupteurs du réseau permet de tous les allumer.

## Solutions lorsque q=2

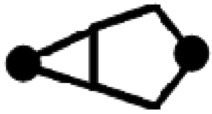
**Réseau de la forme (3 ; 3 ; 2) :**
Appuyer sur un des interrupteurs communs.



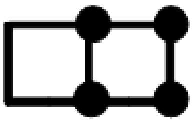
**Réseau de la forme (3 ; 4 ; 2) :**
Appuyer sur tous les interrupteurs du cycle de taille 3.



**Réseau de la forme (3 ; 5 ; 2) :**
Appuyer sur les interrupteurs en gras.



**Réseau de la forme (4 ; 4 ; 2) :**
Appuyer sur tous les interrupteurs d'un des deux cycles.

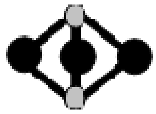


**Réseau de la forme (4 ; 5 ; 2) :**
Appuyer sur tous les interrupteurs du cycle de taille 5.

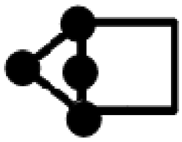
**Réseau de la forme (5 ; 5 ; 2) :**
Appuyer sur un des interrupteurs communs, puis sur les deux interrupteurs reliés directement à l'autre interrupteur commun.

# Solutions lorsque q=3 (5)

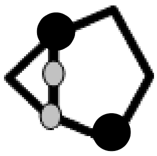
**Réseau de la forme (3 ; 3 ; 3) :**
Appuyer sur le point commun du milieu , puis sur les interrupteurs voisins aux interrupteurs communs extérieurs.



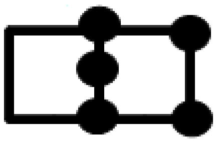
**Réseau de la forme (3 ; 4 ; 3) :**
Appuyer sur tous les interrupteurs du cycle de taille 3.



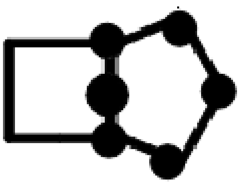
**Réseau de la forme (3 ; 5 ; 3) :**
Appuyer sur les interrupteurs en gras.



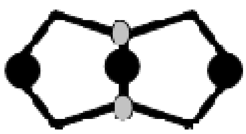
**Réseau de la forme (4 ; 4 ; 3) :**
Appuyer sur tous les interrupteurs d'un des deux cycles.



**Réseau de la forme (4 ; 5 ; 3) :**
Appuyer sur tous les interrupteurs du cycle de taille 5.



**Réseau de la forme (5 ; 5 ; 3) :**
Appuyer sur les interrupteurs en gras.



**Notes d'édition**

(1) Les interrupteurs étant numérotés en respectant l'ordre donné par le cycle.

(2) On place aussi un 1 sur toutes les cases (i ; i).

(3) Attention, ce n'est pas toujours sur l'interrupteur du milieu qu'il faut appuyer. Cela marche dans l'exemple précédent car la résolution avant l'ajout des trois interrupteurs ne fait pas intervenir les interrupteurs 1 et 5. Par contre, on n'obtient pas de solution en ajoutant trois interrupteurs entre les interrupteurs 2 et 3 et en appuyant seulement sur l'interrupteur du milieu. Il est tout de même possible d'obtenir dans chaque cas une solution en appuyant sur d'autres interrupteurs que celui du milieu.

(4) Pour obtenir cette liste, il faut remarquer que dès qu'il y a au moins quatre interrupteurs en commun ou qu'il en reste au moins trois sur un des cycles on peut réduire le problème en enlevant trois interrupteurs. Notons que certains cas peuvent se réduire ici comme (5;5;1) et donc que cette liste n'est pas minimale.

(5) Dans cette partie, les codages ne sont pas bons, il faut ajouter un aux deux premières composantes. Les sommets gris ne jouent pas de rôle particulier, ce sont des points ordinaires.