Impossible? Mon œil !

Année 2017 2018

Lucile Cazade, Beverly Delannoy, Aloÿs Clef, Laurène Manry, Adèle Broussé, Mathis Van-Riel, Elisa Forsans, Maïlie Tresmontan, Manon Fouillen, élèves de troisième .

Etablissement : collège Gaston Fébus Orthez

Enseignantes : Marie Billard, Cathy Arriau.

Chercheur : Jacky Cresson, Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau

1. Présentation du sujet

Nous nous sommes intéressés cette année aux illusions d'optique. Peut-on toujours se fier à ce que l'on voit ?

Dans une première partie, nous vous présenterons le paradoxe de Hooper, puzzle dans lequel le déplacement des pièces pour obtenir la même figure de base fait apparaître un carré manquant.

Nous utiliserons trois outils mathématiques différents pour expliquer ce résultat.

Ensuite, nous verrons une illusion d'optique: un chaos dans lequel tout est finalement ordonné.

A l'aide de propriétés géométriques, nous verrons que notre œil peut nous jouer de sacrés tours !

Et pour finir, nous étudierons le célèbre triangle de Penrose, dessin d'un objet que l'on a voulu construire en 3D.

Pourquoi est-ce impossible de l'obtenir ? En enlevant certaines contraintes que nous nous fixons naturellement, pouvons-nous le réaliser ?

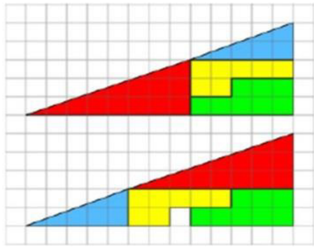
2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

Nous nous sommes demandés si ce que l'on voit est la réalité, si l'on peut se fier à l'interprétation de notre œil.

En observant le paradoxe de Hooper, il était évident que non et nous nous sommes interrogés sur l'utilité des démonstrations en mathématiques.

Nous avons obtenu différents résultats, que nous allons vous présenter tout au long de cet article.

3. Texte de l'article



A. Le paradoxe de Hooper

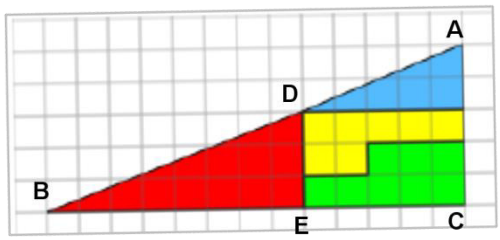
Cette figure est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent: 13 unités et 5 unités composé de plusieurs petites figures. Si on les déplace pour obtenir le même triangle de même mesure, on se rend compte qu'il manque une unité d'aire. Nous avons travaillé sur trois façons différentes pour résoudre le problème.

i. Preuve avec le théorème de Thalès

Il y a trois façons de résoudre le problème du paradoxe de Hooper. Notre groupe a choisi de le faire avec le théorème de Thalès.

Dans ce théorème, il y a deux hypothèses :

- les points sont alignés (ici B, E, C d'une part et B, D, A d'autre part)
- les droites sont parallèles (ici (DE) et (AC))



On a :

AC = 5 ; CE = 5 ; DE = 3 ; EB = 8.

$\frac{DE}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{39}{65}$ $\qquad$ $\frac{EB}{CB} = \frac{8}{13} = \frac{40}{65}$

On constate que $\frac{DE}{AC} \neq \frac{EB}{CB}$, donc une des deux hypothèses citées ci-dessus n'est pas vérifiée.

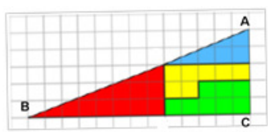
Les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires à la droite (EC), donc elles sont parallèles entre elles. Ainsi, cette hypothèse est vérifiée.

Les points B, E et C étant alignés par construction, ce sont les points B, D et A qui ne le sont pas.

ii) Preuve avec les aires

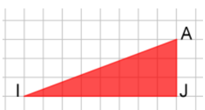
Afin de démontrer le carré manquant, nous avons travaillé sur les aires.

Tout d'abord nous avons calculé l'aire du triangle ABC.

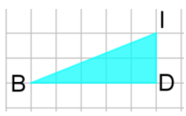


$A_{ABC} = \frac{13 \times 5}{2} = 32{,}5 \text{ unités d'aire}$

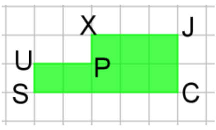
Ensuite, nous avons calculé l'aire de chaque petite pièce :



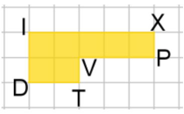
$A_{AIJ} = \frac{8 \times 3}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ unités d'aire}$



$A_{IBD} = \frac{5 \times 2}{2} = 5 \text{ unités d'aire}$



$A_{CSUPXJ} = 4 \times 2 = 8 \text{ unités d'aire}$



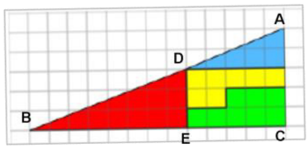
A_{DIXPVT} = 2 × 2 + 3 × 1 = 7 unités d'aire

En additionnant chacune de celles-ci, nous avons 32 unités d'aire.

Ces deux aires ne sont pas égales. On observe une différence de 0,5 unité d'aire, mais cette différence ne peut pas expliquer la totalité du carré manquant.

(1)

ii) Preuve avec la trigonométrie



Nous avons calculé l'angle $\hat{B}$ dans le petit triangle EBD et l'angle $\hat{B}$ dans le grand triangle ABC afin de justifier l'absence de ce carré.

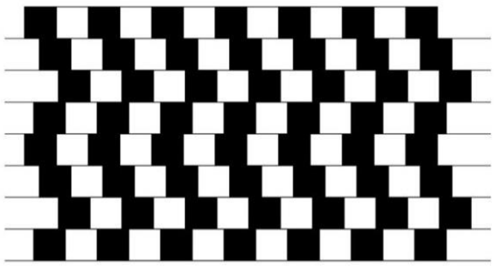
Dans le triangle ABC, rectangle en C, $\tan \hat{B} = \frac{AC}{BC}$ $\tan \hat{B} = \frac{5}{13}$ **$\hat{B}$ ≈ 21,04°**

Dans le triangle EBD, rectangle en E, $\tan \hat{B} = \frac{DE}{BE}$ $\tan \hat{B} = \frac{3}{8}$ **$\hat{B}$ ≈ 20,6°**

On constate que les deux valeurs trouvées pour le même angle ne sont pas égales.

On en conclue que le carré manquant est dû à un léger décalage au niveau du segment [BA].

B. Ces droites sont-elles parallèles ?



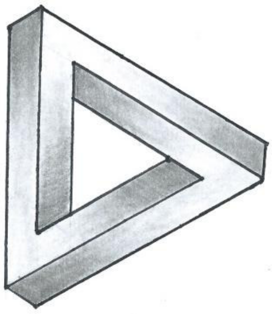
Lorsque nous regardons cette figure, nous pensons tous : « ces droites ne sont pas parallèles ».

Mais, comme nous le disions en introduction , faut-il toujours se fier à ce que l'on voit ? C'est pourquoi nous avons décidé d'étudier cette figure plus en détail.

Nous allons vous démontrer que les droites de cette figure sont bien parallèles.

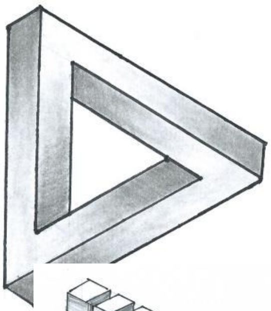
On sait qu'un côté d'un carré est perpendiculaire à un autre alors nous savons que si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles par conséquent toutes les droites de cette figure sont parallèles.

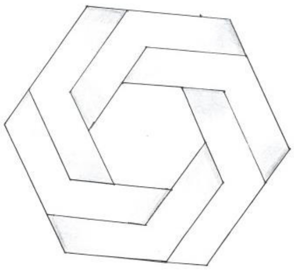
C. Peut-on construire le triangle de Penrose ?

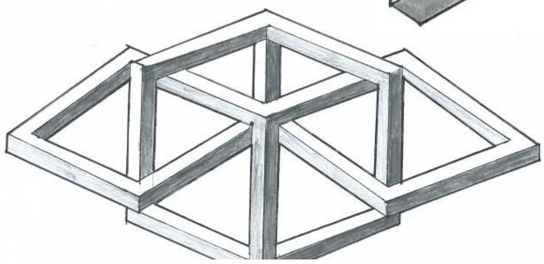


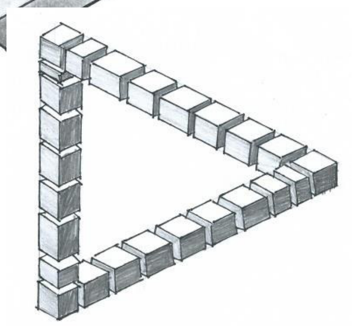
Dans cette partie, nous allons chercher si le célèbre triangle de Penrose peut être construit en un solide fermé.

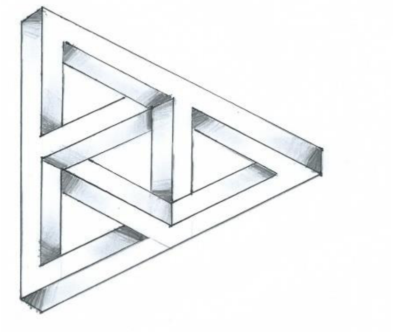
Nous avons auparavant essayé de dessiner ce triangle ainsi que d'autre figures dites « impossibles ».

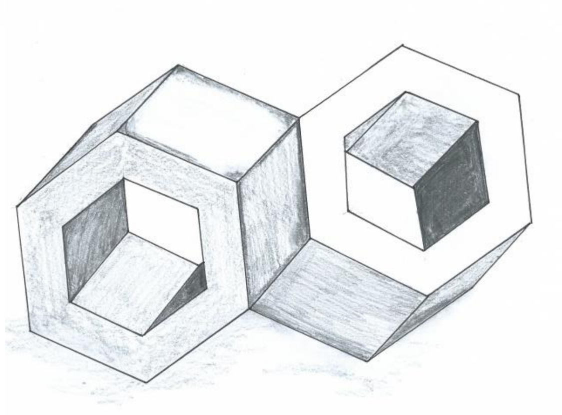




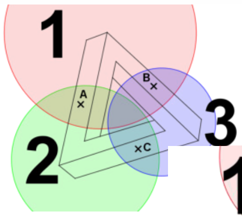




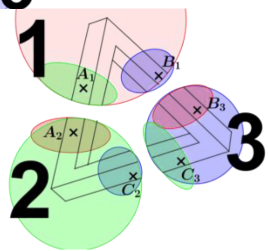




Partons du dessin du triangle de Penrose qui existe forcément.



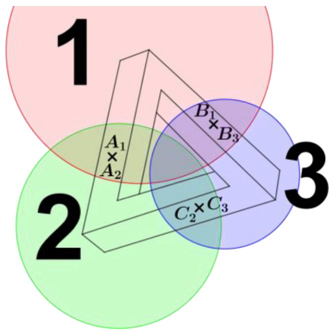
Plaçons les points A, B et C comme indiqué ci-contre.



Quand on « éclate » le dessin, le point A devient alors deux points : les points A_1 et A_2.

On procède de la même façon pour les points B et C.

Pour reconstruire le triangle, il faut arriver à recoller les trois morceaux. Il faut donc que A_1 et A_2 se superposent, de même pour B_1 et B_3, C_2 et C_3.



Appelons O l'observateur. On a donc OA_1 est la distance du point A_1 du dessin à l'observateur. De même pour OA_2, OB_1...

Notons : $d_{12} = \frac{OA_1}{OA_2}$; $d_{31} = \frac{OB_3}{OB_1}$; $d_{23} = \frac{OC_2}{OC_3}$.

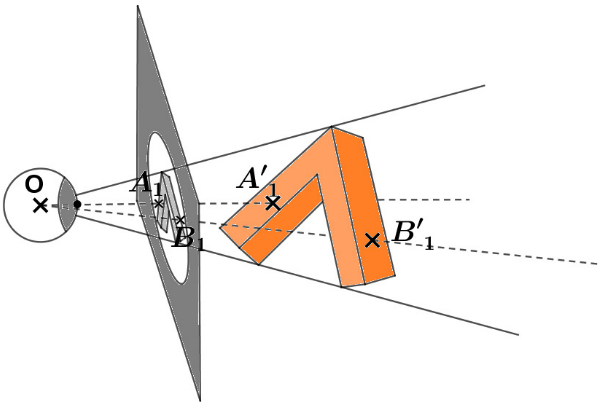
Comme le dessin existe, les points A_1 et A_2 se superposent donc $d_{12} = 1$

De même, $d_{31} = 1$ et $d_{23} = 1$

Si on veut construire le solide correspondant, on peut construire facilement chaque morceau séparément à partir de deux parallélépipèdes rectangles.

Peut-on positionner les trois objets dans l'espace de façon à former l'objet correspondant au dessin ?

Si l'on regarde l'objet. Appelons A'_1 le point correspondant au point A_1 sur le dessin, A'_2 le point correspondant au point A_2 sur le dessin, et ainsi de suite.



Nous ne savons pas où sont situés les objets dans l'espace, ils peuvent être grands et derrière ou petits et devant.

Les dimensions de l'objet 1 a été multipliées par un certain coefficient λ_1, l'objet 2 par un certain coefficient λ_2, ainsi que l'objet 3 par un coefficient λ_3.

Nous avons donc

- $OA'_1 = \lambda_1 OA_1$
- $OB'_1 = \lambda_1 OB_1$

et, de la même façon :

- $OA'_2 = \lambda_2\ OA_2$
- $OC'_2 = \lambda_2\ OC_2$
- $OB'_3 = \lambda_3 OB_3$
- $OC'_3 = \lambda_3\ OC_3$

On a donc trois nouveaux rapports de distances :

$$d'_{12} = \frac{OA'_1}{OA'_2} = \frac{\lambda 1 OA1}{\lambda_2\ OA_2.} = \frac{\lambda 1}{\lambda_2}\ d_{12}$$

$$d'_{31} = \frac{OB'_3}{oB'_1} = \frac{\lambda_3 OB_3}{\lambda 1\ OB1} = \frac{\lambda_3}{\lambda 1}\ d_{31}$$

$$d'_{23} = \frac{OC'_2}{OC'_3} = \frac{\lambda_2\ OC_2}{\lambda_3\ OC_3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\ d_{23}$$

Or, nous avons vu que $d_{12} = d_{31} = d_{23} = 1$

Donc $d'_{12} = \frac{\lambda 1}{\lambda_2}$; $d'_{31} = \frac{\lambda_3}{\lambda 1}$ et $d'_{23} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$.

Si nous décidons de multiplier ces rapports de distance, nous avons donc :

$d'_{12} \times d'_{31} \times d'_{23} = \frac{\cancel{\lambda 1}}{\cancel{\lambda_2}} \times \frac{\cancel{\lambda_3}}{\cancel{\lambda 1}} \times \frac{\cancel{\lambda_2}}{\cancel{\lambda_3}} = 1$

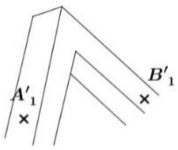
Si l'on revient à la définition de départ de d'_{12}, d'_{31} et d'_{23}, nous obtenons :

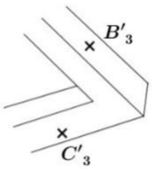
$$\frac{OA'_1}{OA'_2} \times \frac{OB'_3}{OB'_1} \times \frac{OC'_2}{OC'_3} = 1$$

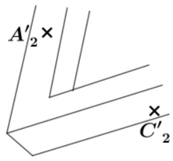
Et, en réorganisant les numérateurs et les dénominateurs,

$$\frac{OA'_1}{OB'_1} \times \frac{OB'_3}{OC'_3} \times \frac{OC'_2}{OA'_2} = 1$$

Or, en regardant les solides, nous nous rendons compte, en supposant que l'observateur est en face, que :







$OA'_1 < OB'_1$; $OB'_3 < OC'_3$ et $OC'_2 < OA'_2$.

Donc le produit de ces trois quotients est inférieur à 1.

Ainsi, nous obtenons une contradiction donc on ne peut pas recoller les trois morceaux.

Le triangle de Penrose ne peut pas être construit en un solide fermé.

Par contre, si on enlève la contrainte « le solide doit être fermé », que nous nous mettons naturellement, il est alors possible de le construire. C'est ce que nous avons fait pendant cet atelier, nous avons réussi à reconstruire le triangle en un solide ouvert en collant trois bouts de bois perpendiculairement. En les plaçant correctement par rapport à notre œil le triangle de Penrose apparaît en un solide fermé. Nous l'avons matérialisé dans une boîte où nous avons fait un trou qui permettait d'orienter l'oeil dans le bon angle.

Vue par le trou de la boîte

Vue sur le côté de la boîte

Après avoir étudié ces trois exemples, nous pouvons affirmer que nos perceptions dépendent de notre œil. Il n'est parfois pas assez précis pour détecter des erreurs d'alignement (paradoxe de Hooper), il nous fait croire que des droites ne sont pas parallèles alors qu'elles le sont, il nous permet de voir un objet différent de l'objet réel (triangle de Penrose).

Comme notre œil nous joue de mauvais tours, nous avons pris conscience de l'importance de la démonstration.

Note d'édition

(1) Si, en effet, car il y a par le même argument une différence de 0.5 unité d'aire entre l'aire du polygone ACBD dans la deuxième figure de la page 2 (on sait maintenant que A, B et D ne sont pas alignés) et l'aire du triangle ABC.