Billard et problème d'illumination

Année 2015-2016

Clément CHAFAIE, Arthur SALLES, Sacha ADJEDJ, Ethan ISRAËL, Antoine PERRIN élèves de 1ère S

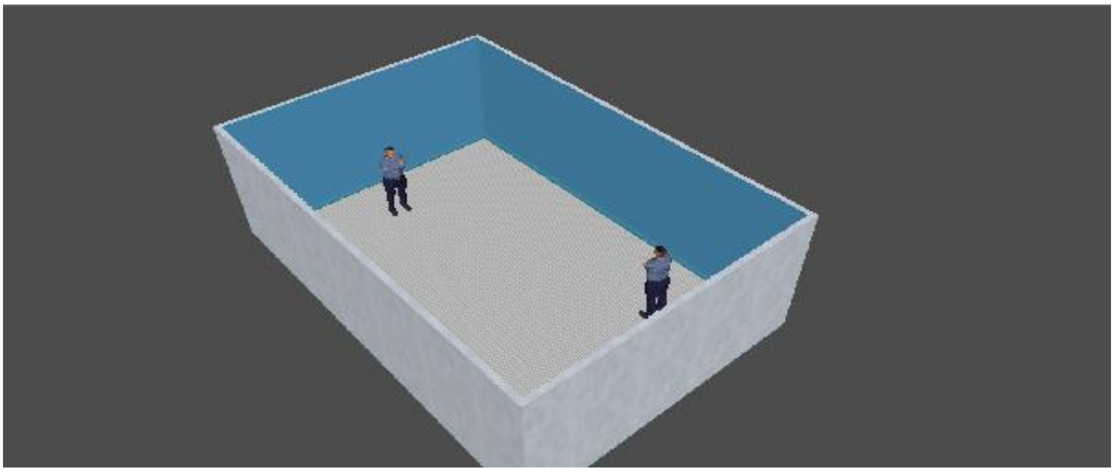
Encadrés par Mme ORDINES

Établissement : Lycée de Provence (Marseille)

Chercheur : Pascal HUBERT, Université Aix – Marseille

Présentation du sujet

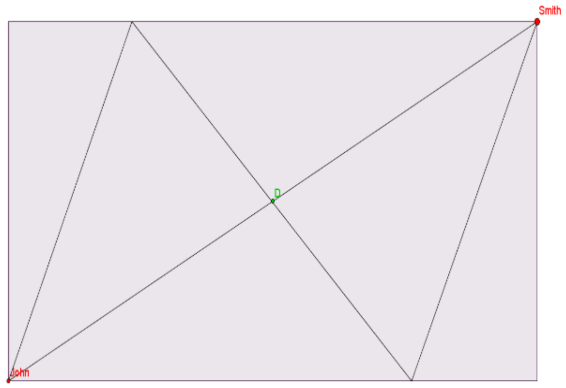
Les professeurs Smith et John ne peuvent pas se supporter et vont se trouver ensemble pour une réunion dans une pièce rectangulaire dont les murs sont des miroirs. Smith demande à ses étudiants de se placer de telle façon qu'il ne voit pas John. Où doivent se placer les étudiants de Smith ?
On peut se demander combien d'élèves sont nécessaires pour bloquer tous les rayons lumineux entre Smith et John.



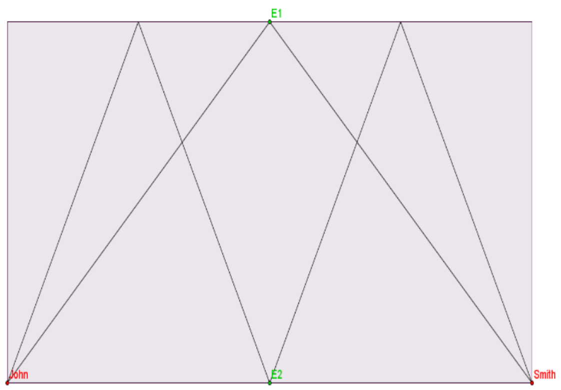
1. Dans le cas d'une salle rectangulaire…

Cas particuliers :

Avant de placer John et Smith de manière aléatoire dans la pièce, on s'intéresse à deux cas particuliers :



Lorsque John et Smith sont situés sur des coins opposés, seuls les rayons dont le nombre de rebonds est pair peut atteindre Smith : comme tous ces rayons passent par le centre du rectangle, il suffit d'un seul étudiant placé au centre de la pièce.



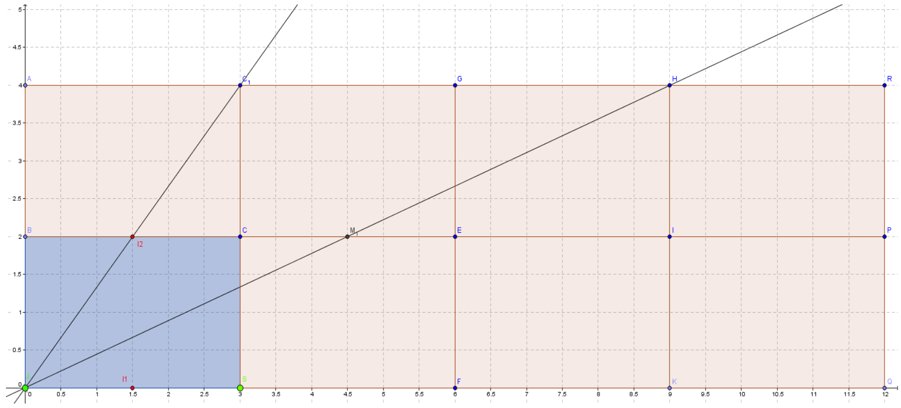
Inversement, lorsque les deux rivaux sont sur deux coins consécutifs : seuls les rayons au nombre de rebonds impair peuvent aller de John à Smith : comme tous ces rayons passent par l'un ou l'autre des centres du côté les reliant et du côté opposé, il suffit de 2 étudiants pour bloquer définitivement tous les rayons.

Cas général :

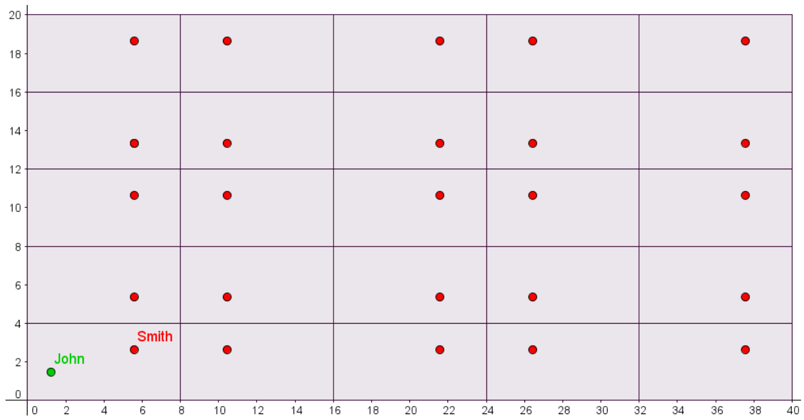
Soit un rectangle JBCS, John et Smith sont situés respectivement en J et S. Nous prenons ce rectangle que l'on déplie à l'aide des symétries axiales d'axes (CS) et (BC). Dans le repère (J, JS, JB), J a pour coordonnées (0 ; 0), les représentants de S ont pour coordonnées S (2k+1 ; 2l) où k et l appartiennent à IN.

Cas général :

Soit un rectangle JBCS, où John et Smith sont situés respectivement en J et S. Nous prenons ce rectangle que l'on déplie à l'aide des symétries axiales d'axes (CS) et (BC) : cette configuration nous permettra de travailler sur des droites, et non sur des lignes brisées, grâce aux propriétés des rayons lumineux dont l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion d'après la loi de Snell-Descartes, comme l'illustre la capture ci-dessous :



Dans le repère (J, JS, JB), J a pour coordonnées (0 ; 0), et les représentants de S (Smith) ont pour coordonnées (2k+1 ; 2L) (k et L appartiennent à IN) :



On commence par chercher les coordonnées de I_1 tel que I1=m([JS]), à partir duquel on déterminera les coordonnées des autres points qui doivent être occupées par des étudiants. On trouve :

x_1= (2k+1+0) /2 = k+1/2

y_1= (2L+0) /2 = L

D'où le point I_1 de coordonnées (k+1/2 ; L), où l'ordonnée entière L implique que le milieu I se reporte par symétrie sur l'axe d'équation y=0 ou y=1. De plus x_1 se reporte en x_2=1/2.

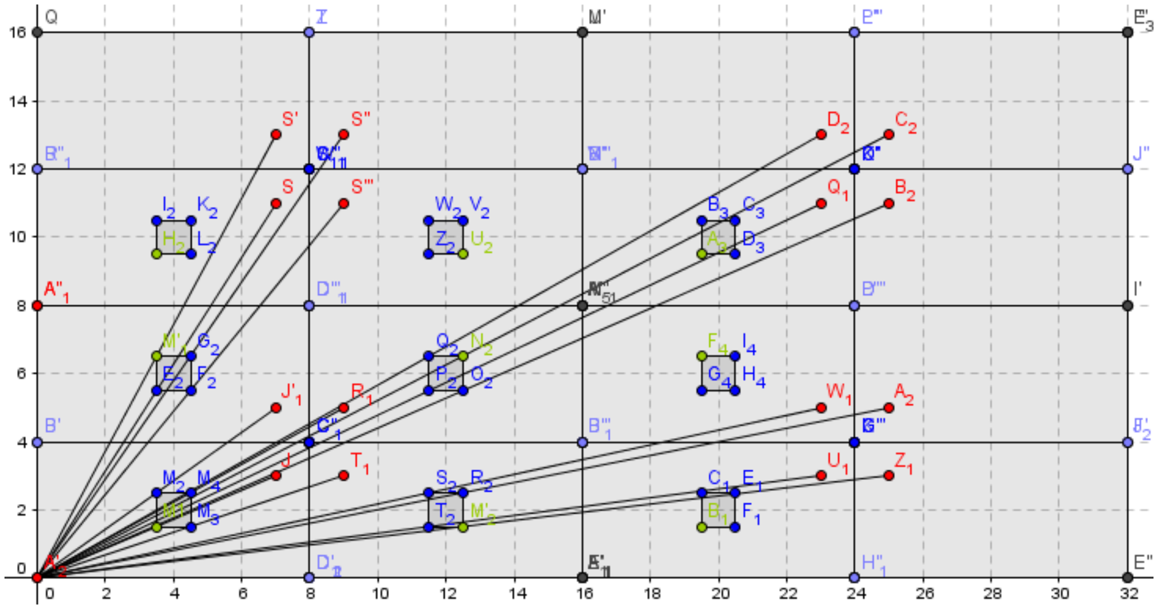
Grâce aux propriétés de la symétrie axiale on en déduit que I devient le milieu du segment [JS] ou [BC].

Donc :

$y_1 = L \equiv 0[1]$

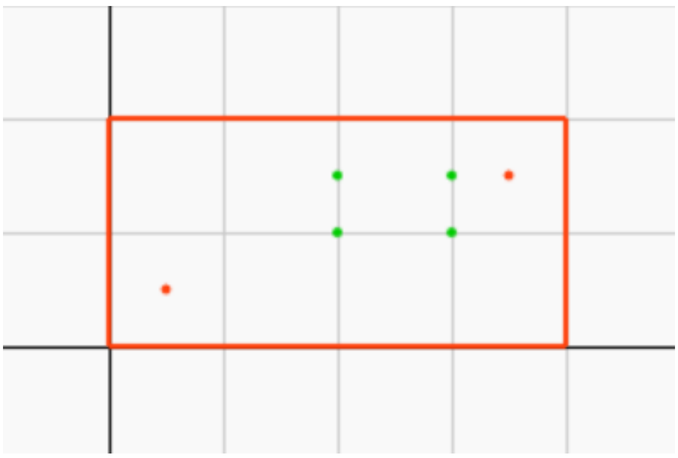
$x_1 = k+½ \equiv ½[1]$

Par simulation Géogébra, on parvient au résultat suivant, où chaque rayon est effectivement bloqué :



De plus nous avons réussi à mettre au point un algorithme dont le code et le fonctionnement sont illustrés ci-dessous, permettant de déterminer les positions des étudiants en fonction des positions relatives de John et Smith, ici dans un repère défini sur [0 ; 8] pour les abscisses et [0 ; 4] pour les ordonnées.

```
VARIABLES
  xJ EST_DU_TYPE NOMBRE
  yJ EST_DU_TYPE NOMBRE
  xS EST_DU_TYPE NOMBRE
  yS EST_DU_TYPE NOMBRE
  xMin EST_DU_TYPE NOMBRE
  xMax EST_DU_TYPE NOMBRE
  yMin EST_DU_TYPE NOMBRE
  yMax EST_DU_TYPE NOMBRE
  X EST_DU_TYPE NOMBRE
  Y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Coordonnées de John :"
  LIRE xJ
  LIRE yJ
  AFFICHER "Coordonéées de Smith :"
  LIRE xS
  LIRE yS
  TRACER_SEGMENT (0,0)->(8,0)
  TRACER_SEGMENT (8,0)->(8,4)
  TRACER_SEGMENT (8,4)->(0,4)
  TRACER_SEGMENT (0,4)->(0,0)
  xMin PREND_LA_VALEUR (xJ+xS-abs(xJ-xS))/2
  xMax PREND_LA_VALEUR (xJ+xS+abs(xJ-xS))/2
  yMin PREND_LA_VALEUR (yS+yJ-abs(yS-yJ))/2
  yMax PREND_LA_VALEUR (yS+yJ+abs(yS-yJ))/2
  X PREND_LA_VALEUR (xMin+xMax)/2
  Y PREND_LA_VALEUR (yMin+yMax)/2
  TRACER_POINT (xMin,yMin)
  TRACER_POINT (xMax,yMax)
  TRACER_POINT (X,Y)
  TRACER_POINT (8-(1/2)*X,Y)
  TRACER_POINT (8-(1/2)*X,4-(1/2)*Y)
  TRACER_POINT (X,4-(1/2)*Y)
FIN_ALGORITHME
```



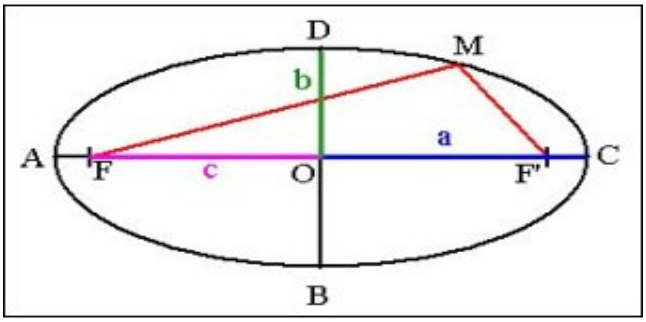
2. Dans le cas d’une ellipse

1° Rappels sur l’ellipse

DÉFINITION

L’ellipse est l’ensemble des points M du plan dont la somme des distances à deux points fixes du même plan est une constante donnée.
Les deux points fixes F et F’ sont appelés foyers.

Pour tout point M de l’ellipse MF+MF’=2a
AC : grand axe
BD : petit axe
O : centre
F et F’ : foyers
a : longueur du demi grand axe
b : longueur du demi petit axe
c : distance du centre au foyer



L’ellipse se définit aussi par son excentricité, comprise entre 0 et 1
Ainsi, plus celle-ci est faible, plus l’ellipse tend vers le cercle.

POINT DE DÉPART

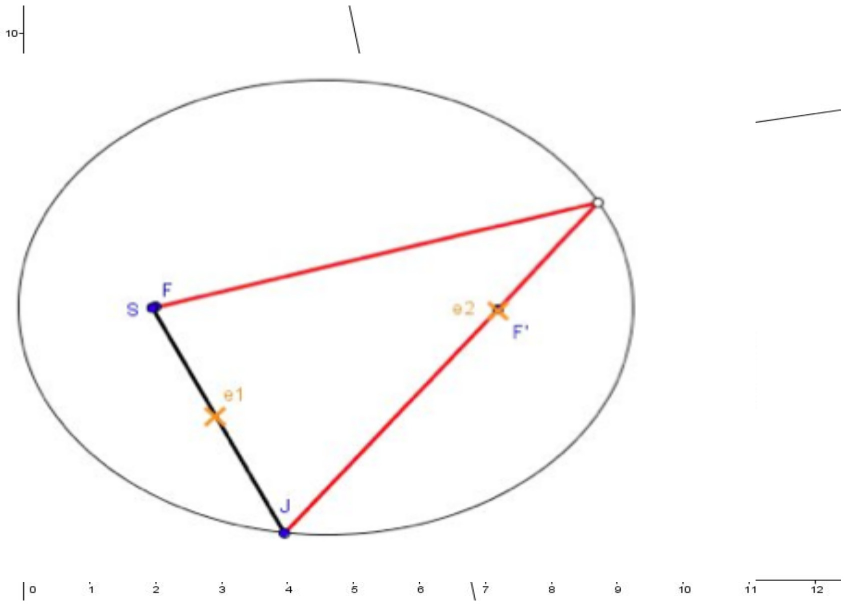
Nous nous sommes tout de suite basés sur une propriété fondamentale de l’ellipse pour résoudre le problème :
Si un rayon émerge d’un foyer, il va automatiquement être réfléchi en passant par le deuxième foyer.
On en a aussi déduit que la somme de ce rayon émergent et de ce rayon réfléchi donnait une constante

2° Démonstration

1° CAS...

On a d'abord cherché à résoudre le problème dans le cas où John et Smith sont situés précisément sur les deux foyers de l'ellipse.

Soit F et F' les foyers de cette ellipse. John est placé sur le point F et Smith sur le point F' ; On a M un point quelconque situé sur celle-ci. D'après les propriétés de l'ellipse, tout rayon qui part d'un foyer arrive toujours sur le second en effectuant au maximum 1 rebond. Il y a donc une infinité de solutions : il est donc impossible de bloquer tous les rayons émergeants de John avec un nombre d'élèves défini.



2° CAS...

Cela fait, nous nous sommes intéressés au cas où un des deux professeurs est situé sur un foyer et l'autre sur un point quelconque de l'ellipse.

Tout d'abord, il est évident que l'on doit placer un élève e1 sur la trajectoire « directe » en noire sur le schéma. Soit un rayon émergent de John et passant par le foyer non occupé, or d'après la définition de l'ellipse, tout rayon passant par un des foyers est redirigé vers l'autre foyer, ici en rouge. On place donc un second élève, e2, sur ce foyer. Soit maintenant un rayon émergent de John sans passer par le foyer f'. On a vu que seul un rayon émergent d'un foyer peut atteindre l'autre. John n'étant pas positionné sur le foyer F', le rayon émergent de ce dernier n'atteindra pas Smith. Il faut donc deux élèves pour bloquer tous les rayons allant de Smith à John.

3° CAS...

Nous nous sommes enfin intéressés au cas où John et Smith sont tous deux sur des points quelconques de l'ellipse.

Faute de temps et d'idées, nous n'avons pas pu résoudre le problème dans ce cas précis.

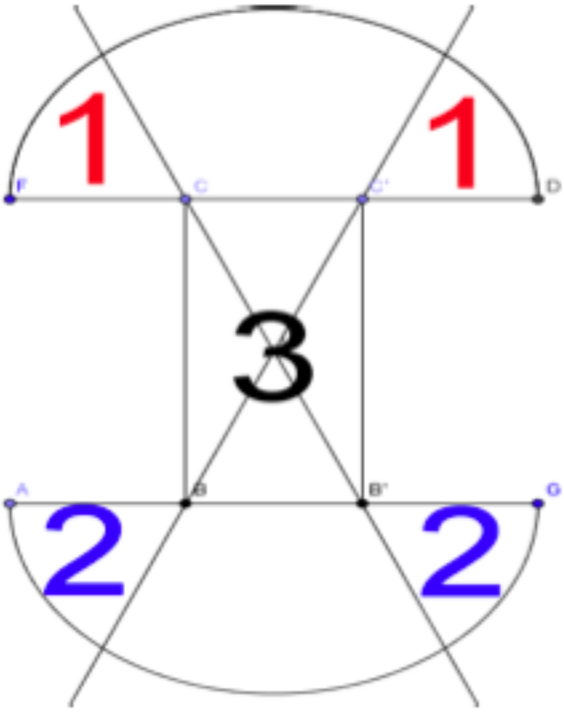
3. Un cas plus complexe : la table de Penrose

1° Définition

La table de billard de Penrose est une figure géométrique complexe qui réunit nos deux figures précédentes en une seule. Elle est composée de 2 demi-ellipses reliées par deux segments passant précisément par les foyers de l'ellipse.
Cette figure possède une propriété surprenante, en effet tout rayon issu de la demi-ellipse « supérieure » n'illuminera jamais les extrémités de la demi-ellipse « inférieure », délimitées par les diagonales. Cependant nous n'avons pas réussi à démontrer cette propriété mais nous nous en sommes servis pour étudier un autre cas d'illumination entre John et Smith.
Nous avons donc déterminé, 3 zones distinctes de la figure, elles même tracées grâce aux diagonales du rectangle et de leurs prolongements.

Ainsi on obtient trois zones :

- Deux zones d'ombres 1 et 2
- Une zone centrale



2° Réflexion

1° CAS...

Si John et Smith se trouvent tous les deux dans la zone 1 et qu'un rayon émerge de l'un des deux alors il existe une trajectoire directe entre les deux. Un élève suffirait donc pour la bloquer.

2° CAS...

Si John se trouve dans la zone 1 et Smith dans la zone 2, il n'existe aucun rayon émergeant de l'un ou l'autre qui les relient .

Conclusion

Cet A.P « Maths en Jeans » nous a permis de découvrir le monde de la recherche en mathématiques. Nous avons pu apprendre tout en s'impliquant dans une démarche de recherche en groupe. Bien que nous n'ayons pas pu résoudre tout le problème, nous en conserverons une excellente expérience et des connaissances accrues.

Nous souhaitons remercier Mme Ordines et Mr Hubert d'une part pour nous avoir proposé ce parcours de découverte au sein de l'établissement et d'autre part pour leur implication