En hommage à la mouche

travail présenté par
Marjorie Battude, Sylvie Chamontin, Camille Fayollas, Josselin Prévost, Fabien Gabarre, Yahn Formanczak élèves au lycée Pierre Paul Riquet

encadrés par : *Xavier Buff (chercheur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse)*
Anne Copros et Boris Véron (professeurs)

dessins *Aurélie Charmeau (élève du lycée)*

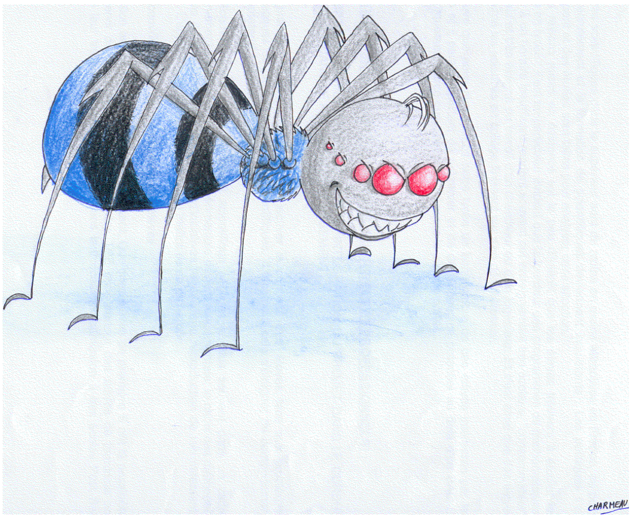
Le sujet donné était :

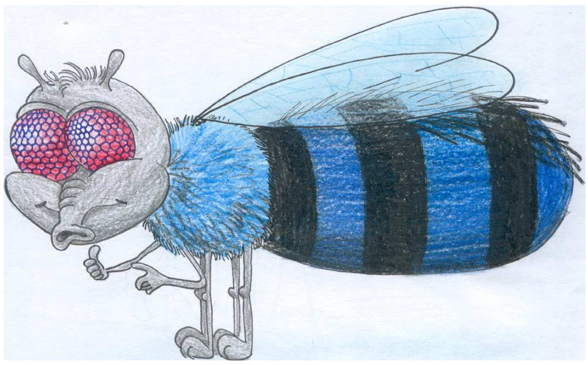
Deux araignées fâchées dans un garage veulent se placer le plus loin l'une de l'autre. Quelles positions doivent–elles choisir, en fonction des dimensions du garage ?

Autrement dit :

Où sont placés les deux points les plus éloignés sur un pavé de côtés a, b et c?

Mais avant de nous occuper de ce problème, on a commencé par résoudre ce problème simplifié :





Drame dans le gymnase du Lycée Pierre Paul Riquet.

Dans ce gymnase parallélépipédique de 30 mètres de long et de 12 mètres sur 12 pour les deux murs carrés, une mouche et une araignée ont élu domicile. La seconde, mauvaise camarade, ne songe qu'à dévorer la première. Elle se tient à l'affût à 1 mètre sous le plafond, au milieu d'un mur carré. La mouche est aux aguets à 1 mètre au-dessus du sol, au milieu du mur opposé.

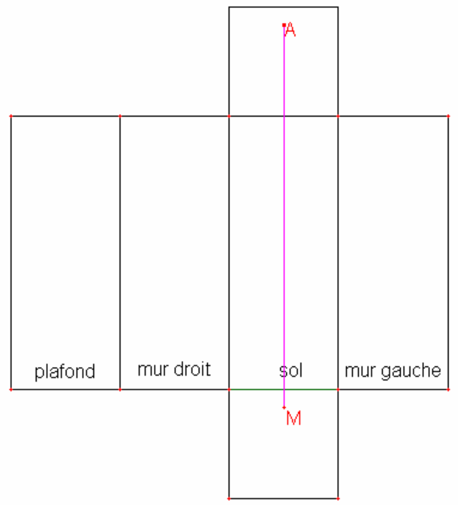
La mouche voudrait dormir et raisonne ainsi :

« Si l'araignée descend à la verticale jusqu'au sol, elle parcourra 11 mètres. Après quoi elle franchira 30 mètres sur le plancher, pour arriver juste 1 mètre au-dessous de moi. Au plus court, elle doit donc parcourir 11 + 30 + 1 = 42 mètres. Je sais qu'elle se déplace à 1 mètre par seconde ; il lui faudra donc au mieux 42 secondes pour m'atteindre. Je vais dormir en réglant mon horloge biologique sur 41 secondes, ce qui me laisse une sécurité suffisante… »

Et la mouche s'endort. Hélas ! Pour toujours. L'araignée la dévore avant qu 'elle n'ait eu le temps d'ouvrir ses beaux yeux…

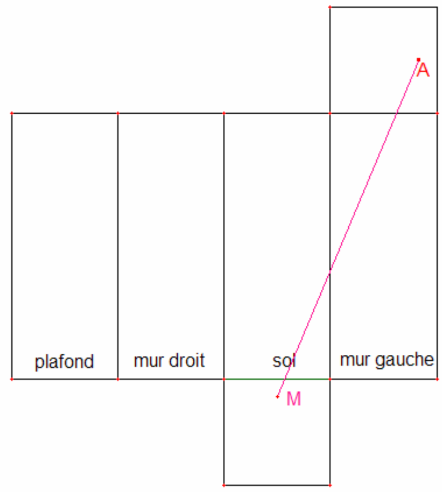
PAR OU FICHTRE EST PASSÉE L'ARAIGNÉE ? ? ? ?

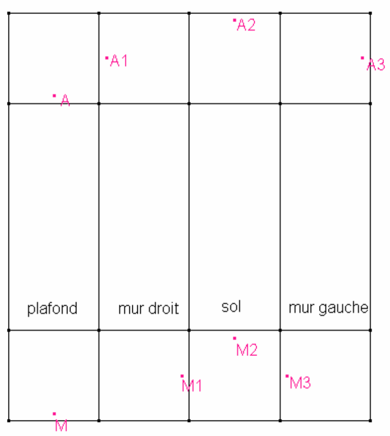
I Le chemin le plus court sur un pavé entre deux points



Pour visualiser un chemin sur un solide, le plus facile est de regarder ce chemin sur un patron : Voici donc le chemin imaginé par la mouche :

En observant ce pavé en 3 dimensions, nous avons constaté qu'il y avait d'autres chemins possibles pour relier ces deux points. C'est pourquoi nous avons reproduit les faces sur lesquelles se situent la Mouche et l'Araignée par rotations afin de compléter le patron :





chemin le plus court
sur le dessin :8,00 cm
en réalité : 40,00 m

distance araignée / plafond : 1,00 m

distance araignée / mur droit : 6,00 m

distance mouche / sol : 1,00 m

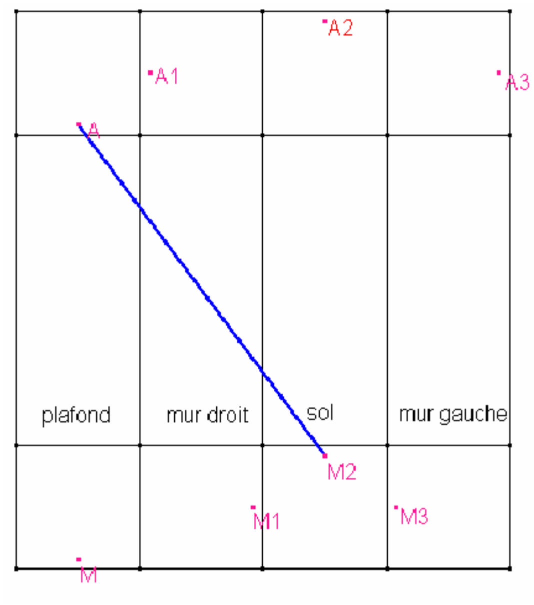
distance mouche / mur droit : 6,00 m

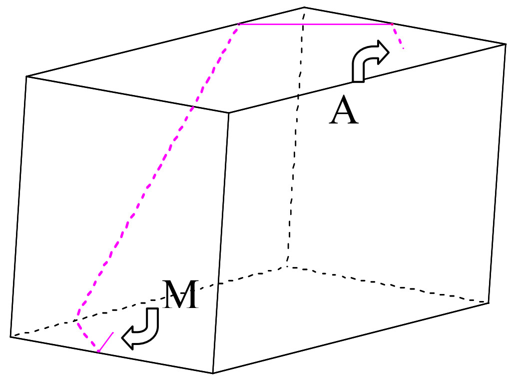
AM=8,40 cm	A1M=9,50 cm	A2M=11,45 cm	A3M=12,47 cm
AM1=8,14 cm	A1M1=8,63 cm	A2M1=9,50 cm	A3M1=9,67 cm
AM2=8,00 cm	A1M2=8,14 cm	A2M2=8,40 cm	A3M2=8,14 cm
AM3=9,65 cm	A1M3=9,67 cm	A2M3=9,50 cm	A3M3=8,63 cm

Nous avons fait ce travail sur Cabri, en utilisant un système de coordonnées pour placer les points A et M de manière à pouvoir les faire varier.

Puis nous avons fait apparaître les mesures des 16 chemins possibles ainsi que la mesure du plus petit d'entre eux. (Ils se calculent simplement grâce au théorème de Pythagore).

Appliqué au problème, on s'aperçoit que le chemin le plus court entre ces deux points mesure 40m, au lieu des 42m comme s'y attendait la Mouche.

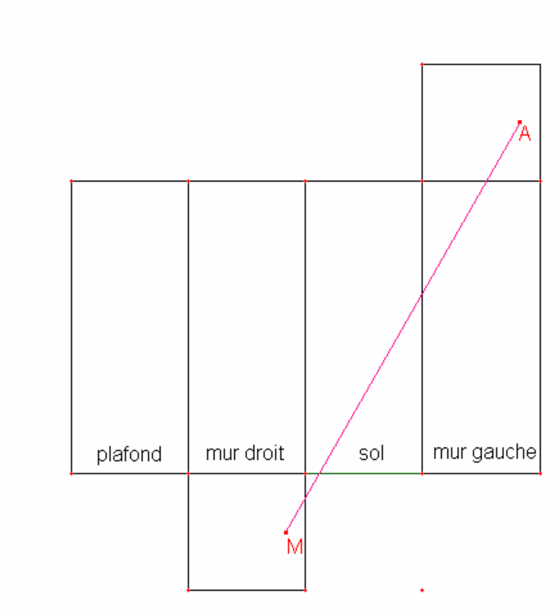




De façon surprenante, le chemin le plus court passe en même temps par le sol et le plafond.

Bien plus tard, nous avons constaté que notre méthode comportait deux défauts

Certains des chemins envisagés, comme celui–ci, n'existent pas en réalité



Dans le cas où les points A et M ne seraient pas sur un plan de symétrie du pavé, il faudrait ajouter un point M4 et un point A4, à la suite des précédents. Ils apparaîtront plus tard dans nos travaux.

. Mais ceci n'intervient pas dans la validité de nos résultats.

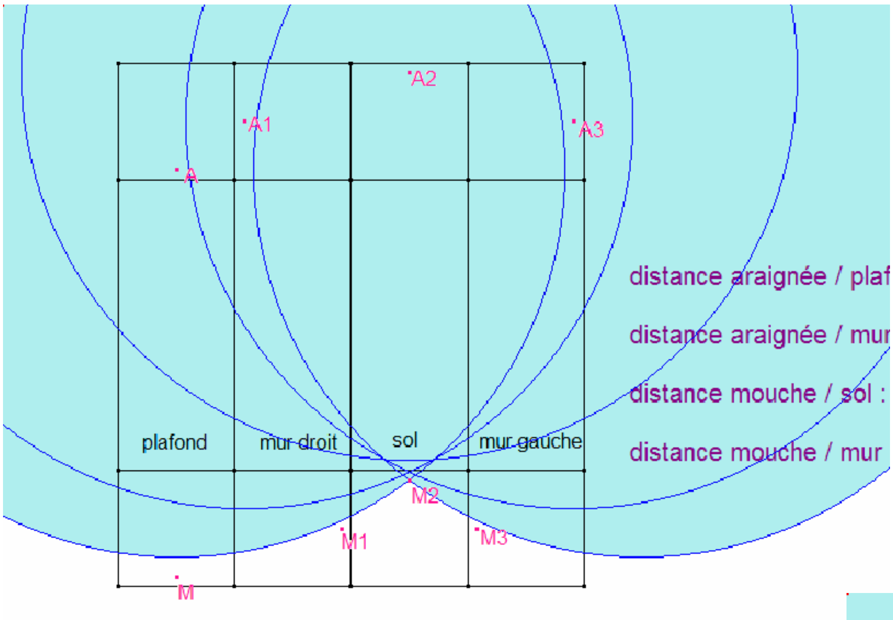
II Le point le plus éloigné d'un autre

A un moment de notre recherche, nous avons été amenés à nous poser la question suivante (dont la réponse nous avait parue évidente jusque là) :

la Mouche aurait-elle pu se placer plus loin de l'Araignée ?

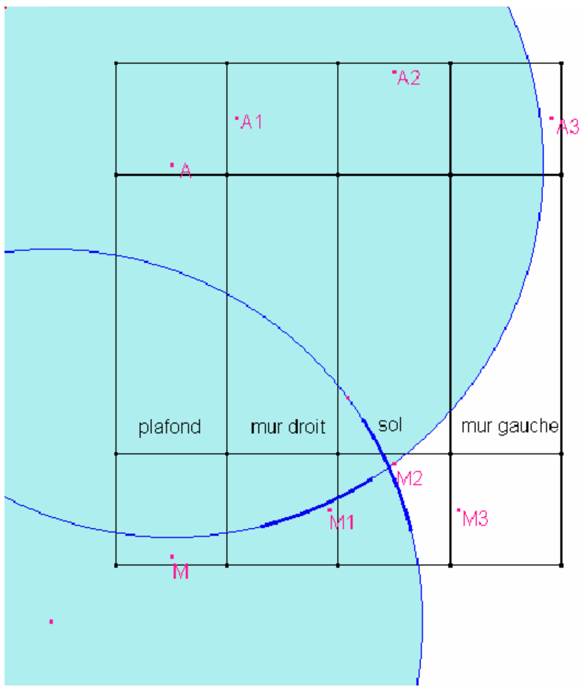
Pour cela, nous avons utilisé la propriété du cercle, qui est de placer des points équidistants par rapport au centre. Ainsi, les points extérieurs au cercle sont plus éloignés du centre que ceux qui appartiennent à ce même cercle.

Nous avons donc tracé des cercles dont les centres sont les positions de l'araignée et de rayon $AM_2 = 40$ (la distance la plus courte)
En modifiant la position de la Mouche, si un des points M rentre à l'intérieur d'un de ces cercles, ce point sera forcément moins éloigné de l'Araignée que M_2 et la Mouche se rapproche de l'Araignée.

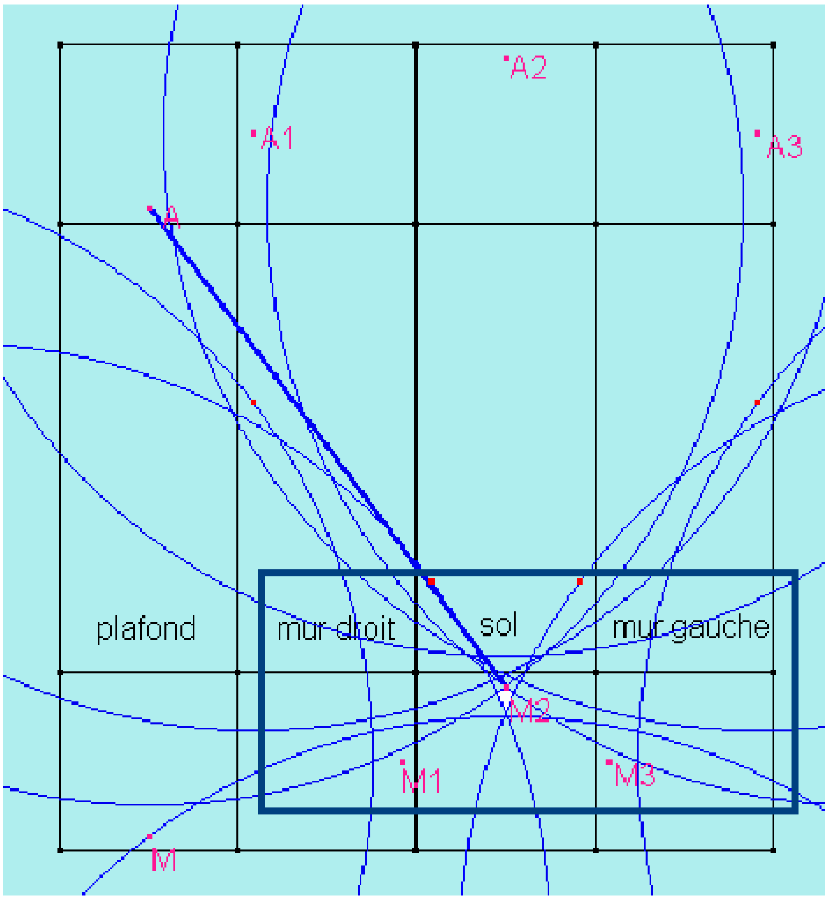


Pour trouver un point qui soit plus éloigné de A que M_2, il faut donc surveiller que les quatre points représantant la mouche restent à l'extérieur des cercles.

Afin de n'avoir plus qu'un point à surveiller, nous avons reporté par rotation ces frontières sur une même face.

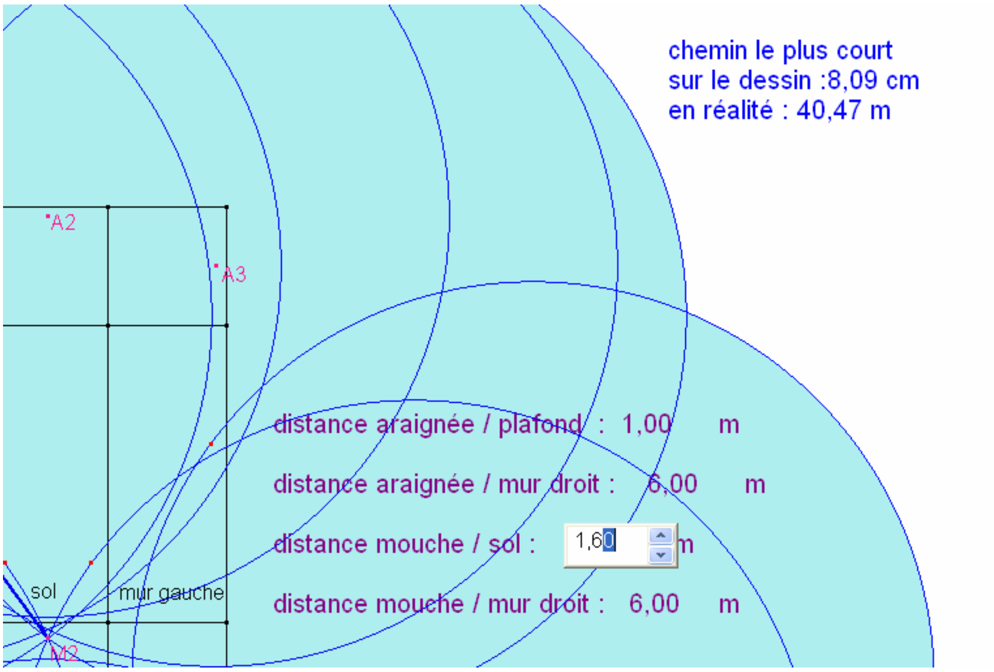


Voici ce que nous avons obtenu :



Ainsi, une zone blanche représentant l'ensemble des points plus éloignés de A que M est apparue.

En modifiant la position de la mouche, on s'aperçoit que la zone blanche s'agrandit ou se rétrécit. Ainsi, lorsque celle-ci se limite à un seul point, on peut dire que la mouche est la plus éloignée possible de l'araignée.



On constate ici qu'en se plaçant à 1,60 m du sol, elle aurait eu plus de temps pour se reposer.

<u>Conclusion :</u>

Contrairement à ce que nous avions pensé au début, le point le plus éloigné d'un point A n'est pas forcément son symétrique par rapport au centre du pavé (son point antipodal).

III Les points les plus éloignés sur un pavé

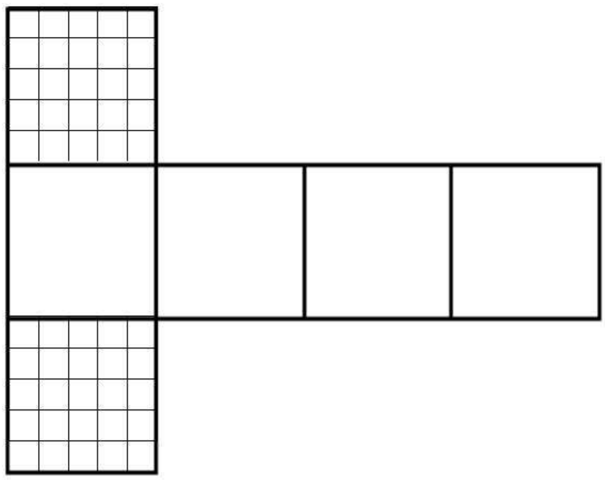
Pour répondre à la question de départ, nous avons commencé par essayer d'utiliser la figure précédente sur Cabri, c'est à dire rechercher les points les plus éloignés sur un pavé.

Mais Cabri nous a montré assez rapidement ses limites. et nous nous sommes donc orientés vers la création d'un programme en PHP, langage de programmation dynamique d'internet

1. Explication du programme

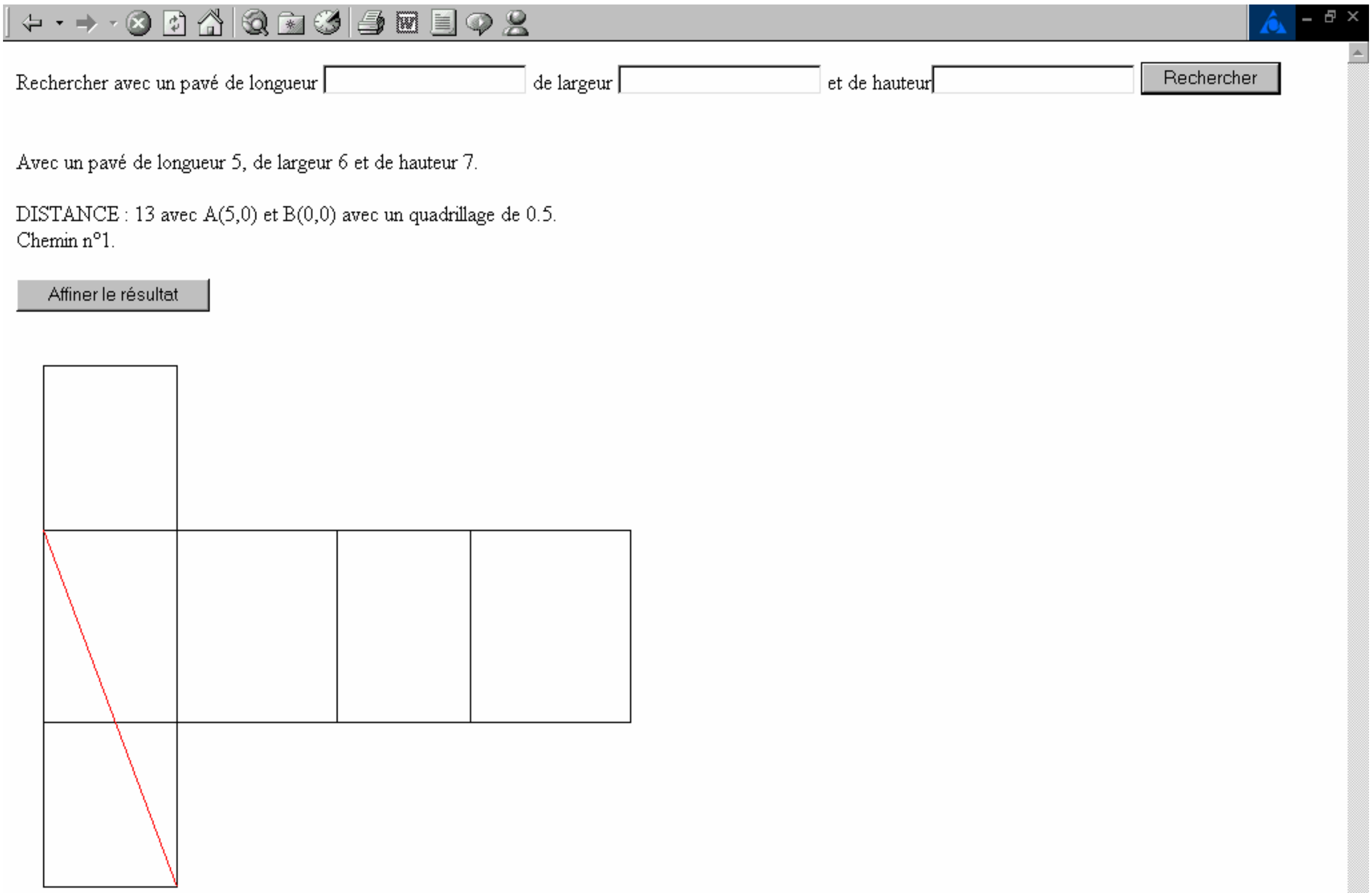
Pour le principe du programme, nous nous sommes inspirés de ce que nous avions fait sous Cabri :

- on quadrille les deux faces opposées du pavé



- -on calcule toutes les distances entre tous les nœuds des deux faces quadrillées
- -entre deux nœuds il y a 16 distances possibles : on ne garde que la plus courte.
- -une fois que nous avons toutes les distances les plus courtes entre deux nœuds, nous prenons la distance la plus longue de ces distances.
-

Nous avons ainsi la distance entre les deux points les plus éloignés ainsi que les coordonnées de ces deux points.



Cette image nous montre l'aspect final du programme.

Cependant, comme nous utilisons un quadrillage, les zones entre les nœuds ne sont pas utilisées. Pour cela, nous utilisons une fonction « affiner » qui effectue une recherche avec un quadrillage plus fin sur les quatre zones entourant le premier résultat trouvé.

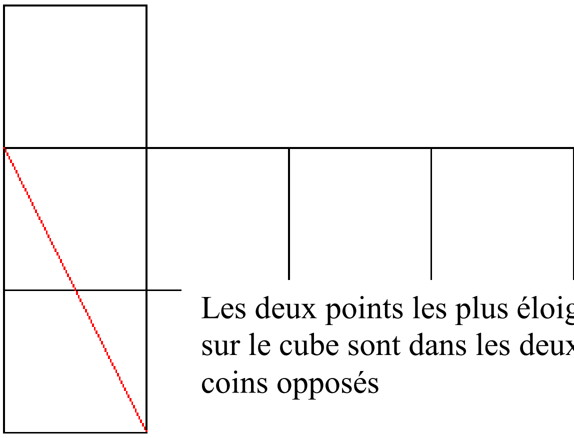
Cette méthode de recherche est néanmoins basée sur un aspect non démontré : nous sommes partis du principe que la fonction qui détermine la distance (qui contient trois variables) ne varie jamais brutalement. Ainsi les distances que l'on peut mesurer dans les zones restent très proches de celles mesurées dans les mailles voisines.

2. Test et recherche

Nous nous sommes ensuite servis de ce programme pour chercher les points les plus éloignés dans certains cas particuliers du pavé droit.

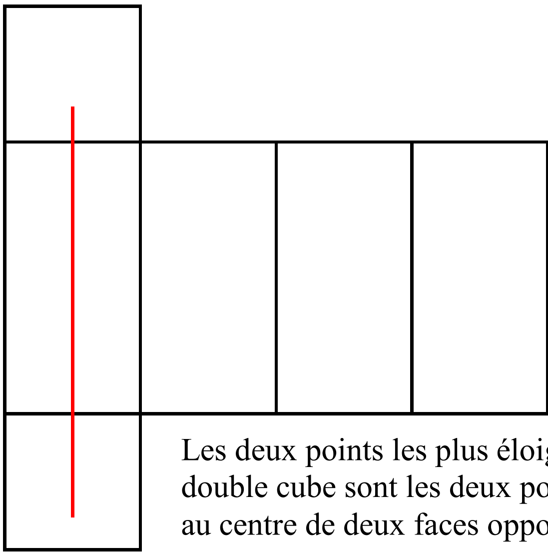
Premier cas : le cube.

.



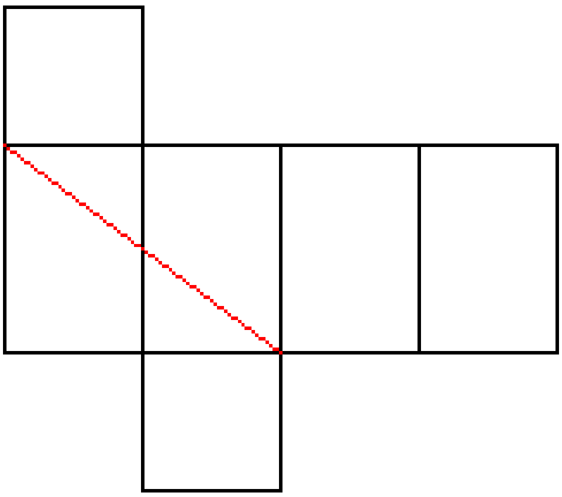
Les deux points les plus éloignés sur le cube sont dans les deux coins opposés

Deuxième cas : le double cube



Les deux points les plus éloignés sur un double cube sont les deux points placés au centre de deux faces opposées.

Troisième cas : un pavé droit où la largeur est égale à la hauteur et où la longueur est égale à 3/2 de la hauteur.



Nous avons ensuite vérifié les résultats donnés par le programme en faisant des calculs. Nous avons choisi une base carrée de côté 5. Nous avons ensuite fait varier la hauteur. Pour chaque cas nous avons calculé la distance de centre à centre et celle entre les deux sommets opposés, en tenant compte des différents chemins.

Pour H=5

Distance de centre à centre: 5+5=10
Distance entre les deux sommets opposés : $\sqrt{5^2 + 10^2} \approx 11,2$

C'est donc bien les deux sommets qui sont les plus éloignés.

Pour H=10

Distance de centre à centre : 10+5=15
Distance entre les deux sommets opposés : $\sqrt{10^2 + 10^2} \approx 14,1$

Pour H=7,5

Distance de centre à centre : 7,5+5=12,5
Distance entre les deux points opposés : $\sqrt{7,5^2 + 10^2} = 12,5$

Ainsi nous remarquons que dans ce cas la distance de centre à centre est égale à la distance entre les points des deux sommets opposés. La hauteur entre celle du cube et du double cube marque par conséquent la transition entre les deux types de points les plus éloignés dans le pavé à base carrée.

Nous nous sommes ensuite demandés si le changement des points les plus éloignés se faisait brutalement ou non. En faisant varier la hauteur entre 7 et 8 nous avons vu que, avant 7,5 les points les plus éloignés sont toujours deux sommets et après c'est les deux centres. Nous avons ensuite essayé de calculer la distance entre les deux points situés sur la diagonale de la base carrée (de celle du haut et de celle du bas), ce qui représente une position intermédiaire entre les sommets et les centres. Mais apparemment le changement est brutal.
C'est en particulier en utilisant ce programme que nous sommes aperçus que dans certains cas les deux points les plus éloignés n'étaient pas forcément antipodaux. Ce résultat au départ était sans doute lié à une erreur de programmation, mais c'est ce qui nous a donné l'idée de chercher à vérifier ce résultat.

CONCLUSION

Ainsi à l'aide du programme qui fonctionne sur un système de mesure de la distance entre deux points du quadrillage, nous avons pu voir que dans un cube les points les plus éloignés étaient les deux sommets et que dans un double cube ce sont les centre des deux faces. Nous avons pu voir que le changement semblait s'effectuer brutalement au niveau de la hauteur égale à 3/2 de celle du cube. A ce niveau la distance entre les deux sommets est égale à la distance entre les deux centres des faces. Cependant nous n'avons pas véritablement démontré que ces points étaient les plus éloignés. Et nous ne nous sommes occupés que des pavés à base carrée. Il reste encore beaucoup à chercher...