Hauteur d'une pyramide de billes

année 2015-2016

Élèves Chercheurs:

BIRONNEAU Luis, DEHER Bastien, DESPORT Emilien, DUBREUIL Mathilde, DUPUIS Margot, GAUTHIER Emeline, GUILLON Maxime, GUILLON Vincent, RENIER Marine.

Établissements :

Collèges Eugène Delacroix à Saint-Amant-de-Boixe et Jean Rostand à la Rochefoucauld

Professeurs :

M. GINESTE Frédéric, Mme KEMPF Caroline, M. PETIT Jean-Guy, Mme ROBUCHON Christelle

Chercheur :

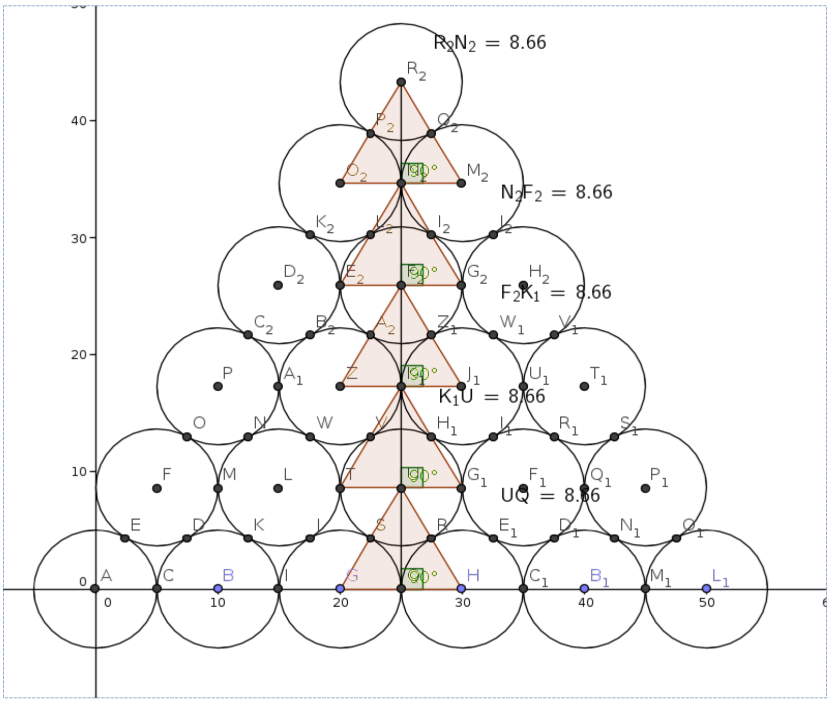
M. JAMES Nicolas, Université de Poitiers

<u>Problème :</u>

« Quelle serait la hauteur maximale d'une pyramide avec un nombre N de disques (sachant qu'un disque a pour diamètre 1 cm) ? »

<u>I Calcul de la hauteur de toutes les pyramides possibles</u>

Nous avons d'abord construit une pyramide de billes à main levée, les résultats étaient peu précis. Nous avons donc décidé de réaliser la construction sur GeoGebra avec des cercles tangents.



Grâce à cette nouvelle figure, nous avons remarqué que l'on peut relier les centres des cercles entre eux. Une fois les centres reliés on remarque qu'un triangle se forme, ce triangle est équilatéral.
En divisant ce triangle en deux, on obtient deux triangles rectangles, on peut donc calculer la hauteur du triangle grâce au théorème de Pythagore.

Avec nos calculs nous avons trouvé une hauteur de $\sqrt{75}$ mm soit environ 8,66 mm. (1)

FORMULE pour calculer la hauteur d'une pyramide :

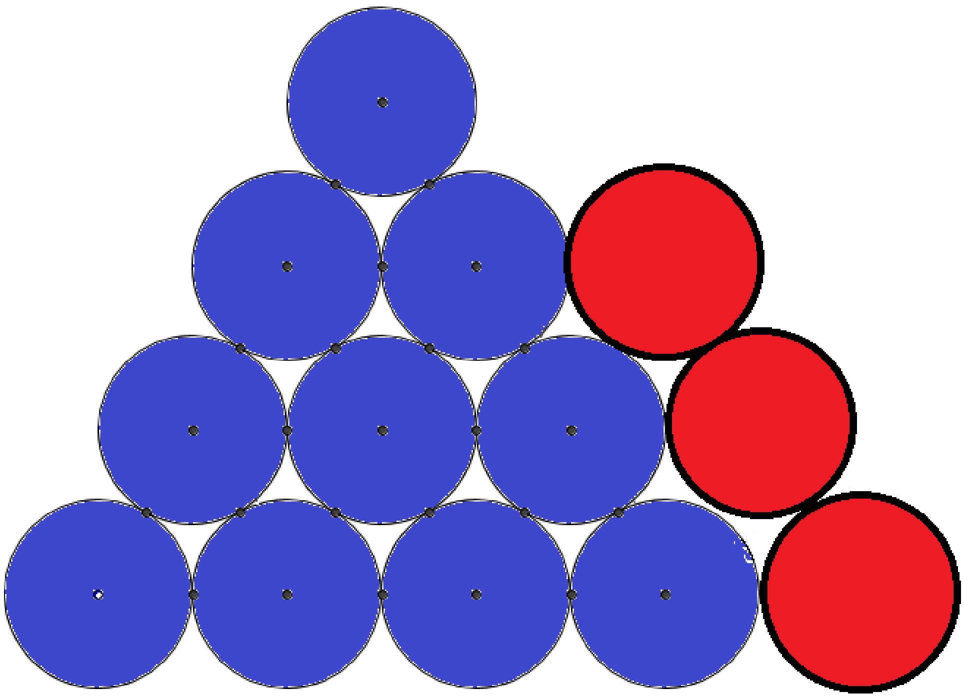
$\sqrt{75}\times$(nombre d'étages-1)+10= hauteur de la pyramide (2)

II Nombre d'étages en fonction du nombre de billes

Dans un premier temps, nous avons convenu que si le nombre de billes était infini alors la taille de la pyramide le serait aussi, nous avons alors poursuivi en tentant de trouver une formule.

Après plusieurs essais avec de petites pyramides à main levée, nous avons observé deux choses :

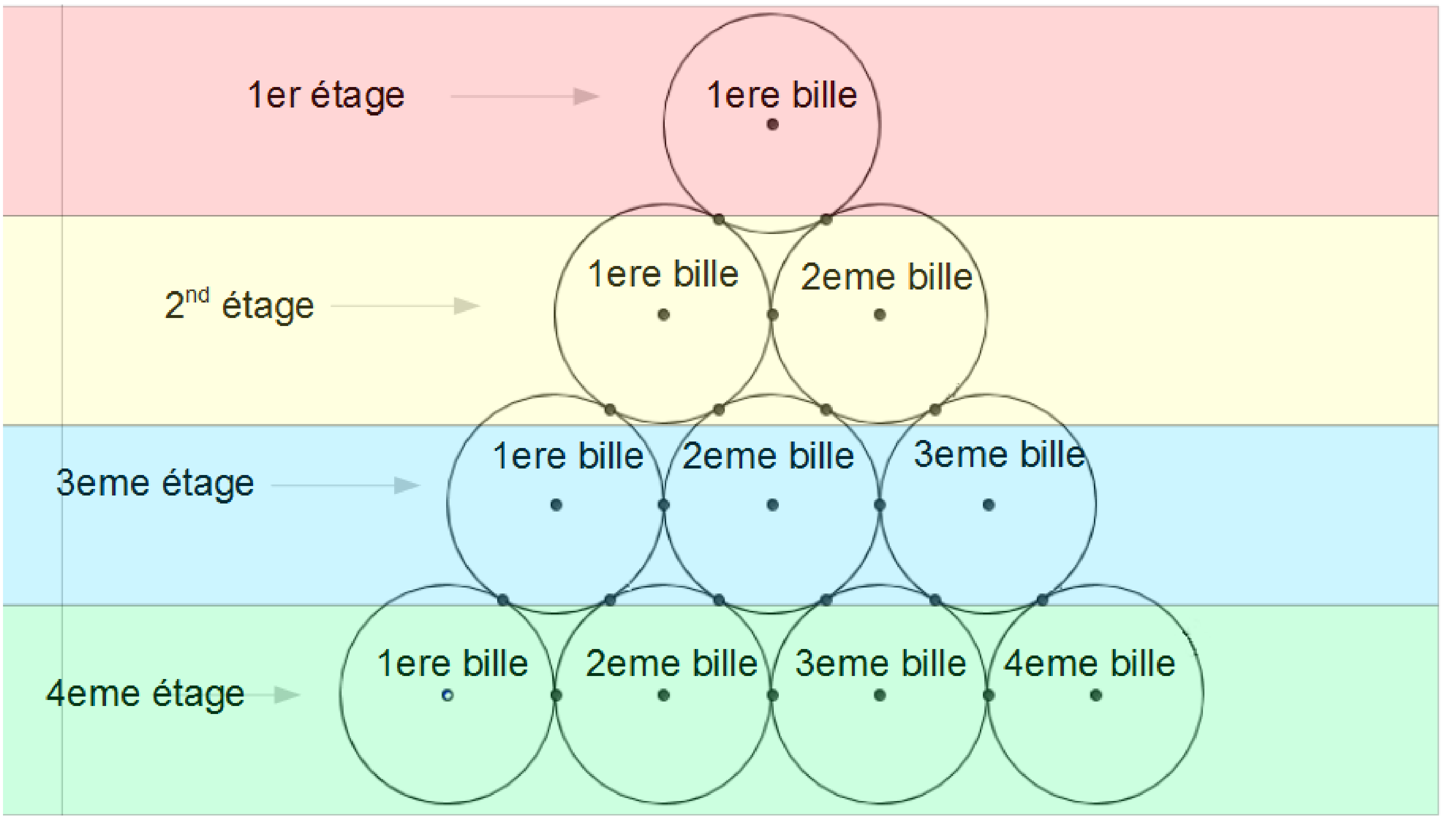
- tout d'abord, dans certains cas la pyramide n'est pas complète, c'est à dire qu'elle a des billes de reste (voir figure) :



- ensuite, quand la pyramide est complète, le numéro de l'étage correspond au nombre de billes dans cette étage.

Dans un second temps, nous avons trouvé un système pour trouver le nombre de billes en fonction du nombre d'étages, c'est à dire l'inverse du problème de départ :

Pour 3 étages on a : 3 + (3-1) + (3-1-1) + (3-1-1-1) = 6 billes
2 1 0
Et sous la forme d'une formule : n(n+1)/2 (n étant le nombre d'étages) (3)



Ayant cette formule nous avons juste eu à transformer l'équation pour obtenir la formule du problème, c'est à dire comment obtenir le nombre d'étages en fonction du nombre de billes :

(*n* étant le nombre d'étages et *k* le nombre de billes)
$n(n+1)/2 = k$
$n^2 + n = 2k$
$n^2 + n - 2k = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 1^2 - 4 * 1 * -2k$
$= 8k + 1$

$n_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/ 2a$
$= (-1 - \sqrt{(8k+1)})/ 2$

$n_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/ 2a$
$= (-1 + \sqrt{(8k+1)})/ 2$

On fait un test pour k = 6 (le nombre d'étages est normalement de 3)

$n_1 = (-1 - \sqrt{(8k+1)}) / 2$
$= (-1 - \sqrt{(8*6+1)}) / 2$
$= (-1 - \sqrt{49})/ 2$
$= -8 / 2$
$= -4$
Impossible

$n_2 = (-1 + \sqrt{(8k+1)}) / 2$
$= (-1 + \sqrt{(8*6+1)})/ 2$
$= (-1 + \sqrt{49})/ 2$
$= 6 / 2$
$= 3$
juste

La formule fonctionne donc (4) avec n2. Pour un nombre qui donnera une pyramide avec du reste (exemple avec 7 billes) cela donne :

$n_2 = (-1 + \sqrt{(8*7+1)}\ ) / 2$
$= (-1 + \sqrt{56}\ ) / 2$
$= (-1 + 2\sqrt{14}) / 2$
$= 6{,}483 / 2$
$= 3{,}2415$

Puis il faut arrondir le résultat à l'unité inférieur :

$3{,}2415 \sim 3$

Enfin pour calculer les billes de reste dans cette pyramide, il faut (5) juste réutiliser notre première formule avec l'arrondi inférieur obtenu :

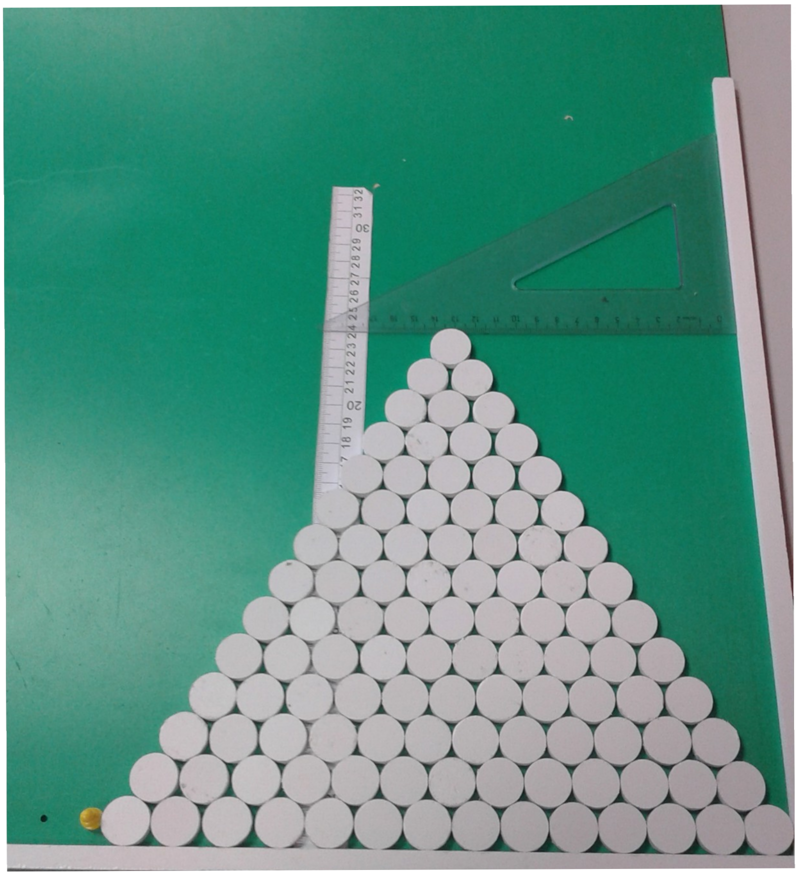
$n(n+1)/2 = 3(3+1)/2$
$= 12/2$
$= 6$

Et soustraire le premier nombre de billes (7) par ce dernier résultat (6) :

$7 – 6 = 1$ (il n'y avait donc qu'une bille de reste)

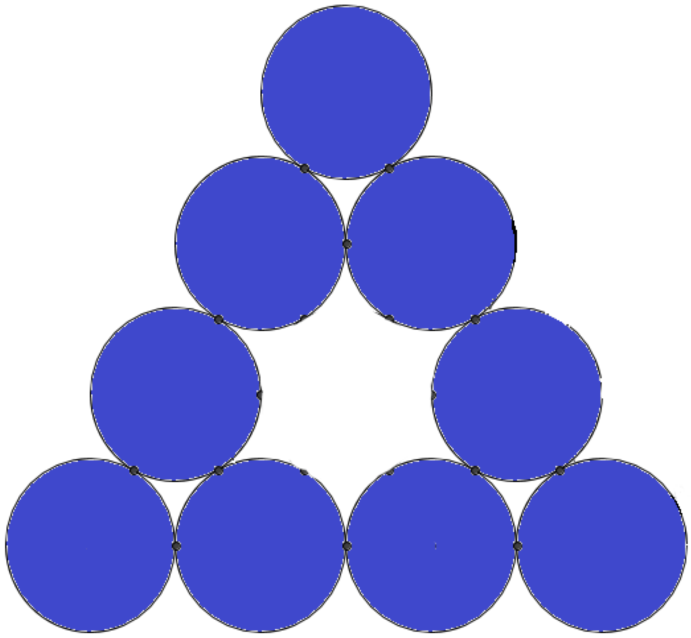
III Maquette

Pour illustrer nos recherches nous avons créé une maquette composée d'une plaque sur laquelle est collée une règle et sont déposés des petits disques de PVC de 2 cm de diamètre (elle est donc à l'échelle 2:1 par rapport au sujet).



V Pour aller plus loin

Enfin nous proposons à tous ceux qui le souhaitent et qui ont de potentielles connaissances en mécanique de continuer les recherches. En effet nous avons remarqué qu'en enlevant certains disques de notre maquette, la pyramide tenait toujours debout, donnant ainsi des motifs alvéolaires, comme ceci :



Le problème est donc toujours à approfondir…

Notes d'édition :

(1) Cette valeur correspond à la hauteur, mesurée en mm, du triangle équilatéral formé par les centres de 3 billes de diamètre 10mm accolées (par exemple le triangle $0_2M_2R_2$ de la figure).

(2) La hauteur de la pyramide est exprimée en mm. La hauteur de la pyramide formée par les centres des billes est $\sqrt{75}\times$(nombre d'étages-1). Pour obtenir la hauteur totale de la pyramide, il faut ajouter à cette valeur deux fois le rayon d'une bille (une fois en bas, une fois en haut), soit 10mm.

(3) Le raisonnement qui permet d'obtenir cette formule suppose que la pyramide est complète. La formule n'est donc valable que dans ce cas.

(4) On comprend que les auteurs aient écarté dans ce cas précis (k=6) une valeur négative pour le nombre de couches. On aimerait toutefois qu'ils précisent pourquoi on doit *toujours* prendre n_2 et écarter n_1. Il n'est pas difficile de voir que comme $k\geq 1$, on a $\sqrt{(8k+1)}\geq\sqrt{9}\geq 3$ et donc
$n_1 = 1 - \sqrt{(8k+1)} \leq 1 - \sqrt{9} < 0$.
La valeur donnée par l'expression de n_1 est donc toujours négative pour toutes les valeurs de $k\geq 1$ et pas

seulement k=6. Elle doit donc être écartée. On peut aussi se demander pourquoi cette solution négative apparaît, et pourquoi l'expression de n_2 donne souvent des valeurs non entières (voir note suivante).

(5) Les auteurs remarquent ici que l'expression de n_2 donne une valeur entière seulement quand le nombre *k* de billes permet de construire une pyramide complète. C'est que le raisonnement qu'ils ont fait pour trouver l'expression de n_2 supposait en effet que l'on était dans ce cas (voir note de la page 3). Cette formule est donc valable seulement pour les pyramides complètes. Ils remarquent cependant que pour pour connaître le nombre de couches dans les pyramide incomplètes il suffit (plutôt que « *il faut* ») d'appliquer la même formule et de prendre la partie entière du résultat. Ceci est surprenant et aurait mérité quelques explications (même si c'était compliqué).

En effet, une pyramide incomplète à n couches et k billes contient une pyramide complète à n couches et est strictement contenue dans une pyramide complète à N=n+1 couches. La petite pyramide complète comporte $k_0=n(n+1)/2$ billes, et la grande en contient $k_1=N(N+1)/2$. Vu les relations d'inclusion entre les pyramides, on a $k_0 \leq k < k_1$. Mais comme ces pyramides sont complètes, on a aussi :

$$n = -1 + \sqrt{(8k_0+1)} \quad \text{et} \quad N=-1 + \sqrt{(8k_1+1)}.$$

Les auteurs proposent, pour trouver le nombre n de couches de notre pyramide incomplète à k billes, de calculer le nombre réel $x = -1 + \sqrt{(8k+1)}$, puis de prendre sa partie entière. Autrement dit, ils affirment que le nombre de couches est le plus grand entier inférieur ou égale à x, ou encore (c'est équivalent) que x est compris entre n et n+1 :

$$n \leq -1 + \sqrt{(8k+1)} < n+1.$$

Pour justifier leur méthode, il reste à démontrer que ces deux inégalités sont vérifiées.

Que savons-nous de k ?

Nous savons que $k_0 \leq k < k_1$.

Donc $8k_0 \leq 8k < 8k_1$ (on multiplie tout par 8, qui est >0, donc les inégalités se conservent).

Donc $8k_0+1 \leq 8k+1 < 8k_1+1$ (on ajoute 1 partout, donc les inégalités se conservent).

Donc $\sqrt{(8k_0+1)} \leq \sqrt{(8k+1)} < \sqrt{(8k_1+1)}$ (on sait que si a<b alors $\sqrt{a}<\sqrt{b}$).

Donc enfin :

$$-1 + \sqrt{(8k_0+1)} \leq -1 + \sqrt{(8k+1)} < -1 + \sqrt{(8k_1+1)}.$$

Grâce aux expressions données plus haut de n et N, ceci montre que exactement que

$$n \leq -1 + \sqrt{(8k+1)} < N.$$

Comme N=n+1 on obtient ainsi le résultat cherché.