Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Communication entre Grenouilles

Élèves de 3ème :
GUILLEMIN Fleur, MISSENARD Nawel, BREUIL Coline, HOSSENI Julie.

Établissement
Collège Alain Fournier, 14 rue Alain Fournier, 91402 Orsay Cedex.

Enseignants :
FERRY Florence
ASSELAIN-MISSENARD Claudie.

Chercheurs :
AGUILLON Nina et BOCHARD Pierre.

Le sujet :

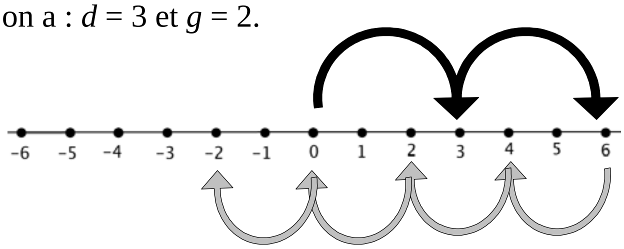
Des grenouilles sont placées en ligne, chacune sur son nénuphar. Une d'entre elles décide d'informer les autres grenouilles du dernier potin. Elle sait sauter de g nénuphars vers la gauche (exactement) et de d nénuphars vers la droite (exactement).

Pourra-t-elle informer toutes les grenouilles ?

I - Premières remarques

Nous avons placé les grenouilles sur une droite graduée, les nénuphars étant représentés par les nombres entiers de cette droite. On décide de graduer la droite de telle façon que la grenouille messagère se trouve sur le point d'abscisse zéro.

Prenons par exemple une grenouille qui fait des bonds de trois vers la droite et des bonds de deux vers la gauche ; avec les notations du sujet on a : $d = 3$ et $g = 2$.



Elle peut atteindre le 3, le 6, etc. puis en revenant vers la gauche, le 4, le 2, etc.

Mais si on s'arrête au 3, au premier déplacement à droite, la grenouille en revenant vers la gauche pourra atteindre le 1, le -1, etc.

Pour savoir si la grenouille pouvait atteindre toutes les autres grenouilles, nous avons compté ses bonds vers la droite et vers la gauche alternativement. Si sur la droite que nous avions tracée, nous arrivions à atteindre toutes les abscisses entières, nous en déduisions qu'elle pouvait toucher toutes les grenouilles.

Nous avons peu à peu essayé de remplacer les déplacements sur la droite par des calculs mathématiques.

Nous noterons :

. x le nombre de bonds à droite

. y le nombre de bonds à gauche.

x et y (de même que d et g) sont des nombres entiers positifs.

Avec nos notations, la grenouille se déplace sur les points d'abscisse : $\boldsymbol{dx - gy}$

II - Etude de cas

A - Bonds de 0

Si d ou g vaut 0, la grenouille ne se déplacera que d'un côté ou restera en 0 (dans le cas où $d = g = 0$) ; elle ne pourra donc pas atteindre toutes les grenouilles.

B - Bonds de 1

- $d = 1$ et $g = 1$

Dans ce cas, la grenouille pourra parcourir tous les nombres entiers de la droite graduée dans un sens ou dans l'autre. Elle pourra ainsi atteindre toutes les autres.

- $d = 1$ ou $g = 1$

Prenons par exemple $d = 1$. La grenouille peut informer toutes les grenouilles se trouvant à sa droite, puisqu'elle sait faire des bonds de 1 en 1. Mais elle pourra aussi informer toutes les grenouilles de l'autre côté : en effet, elle pourra faire autant de bonds qu'elle veut vers la gauche, puis elle pourra revenir de 1 en 1 et prévenir toutes les grenouilles à sa gauche. Le raisonnement sera identique si $g = 1$.

Remarque: Dès qu'une grenouille pourra, par une succession de bonds, atteindre le 1 ou le -1, elle pourra atteindre toutes les autres grenouilles.

On cherche donc à connaître x et y tels que :

$$dx - gy = 1 \text{ ou } dx - gy = -1 \qquad (1)$$

C - Bonds égaux

Si $d = g$: $dx - gy = dx - dy = d(x - y)$

x – y est un nombre entier donc *d(x-y)* est un multiple de *d*. Donc, dans ce cas, on ne pourra atteindre que les multiples de *d*.

D - Nombres pairs

Quand *d* et *g* sont pairs nous avons vu, après quelques essais, que nous ne pouvions pas atteindre toutes les grenouilles. Quand on additionne ou soustrait deux nombres pairs on ajoute ou enlève un multiple de 2. On obtient donc un autre multiple de 2. Avec ces nombres pairs, on ne touche jamais les nombres impairs.

Exemple : Soit *g* = 6 et *d* = 4

$4x-6y=2\times2x-2\times3y=2\times(2x-3y)$

2x – 3y est un nombre entier. Les nombres atteints sont tous multiples de 2, c'est à dire pairs.

Démonstration dans le cas général:

d et *g* sont pairs donc il existe *k* et *k'* entiers tels que : *d = 2k* et *g = 2k'*.

xd – yg = x2k – y2k' = 2(xk – yk')

(xk– yk') est un nombre entier et *2(xk– yk')* est un nombre pair.

La grenouille n'atteindra que les nombres pairs.

E - Nombres avec un facteur commun

Après plusieurs essais, nous avons pensé que la grenouille ne pouvait pas atteindre toutes les autres si *d* et *g* avaient un facteur commun.

Démonstration sur exemple :

Soit *d* = 6 et *g* = 9 et *x* et *y* des nombres entiers positifs qui représentent des nombres de bonds. $6x-9y=3\times2x-3\times3y=3(2x-3y)$

$2x-3y$ est un nombre entier donc, les nombres atteints seront des multiples de 3. Donc on n'arrivera pas à atteindre toutes les grenouilles si *d* et *g* ont un facteur commun.(2)

Démonstration :

Soit *F* le plus grand facteur commun de *d* et *g* autre que 1. Il existe *k* et *k'* entiers strictement positifs tels que : *d = Fk* et *g = Fk'*.

xd – gy = xFk – yFk' = F (xk – yk')

(xk – yk') est un nombre entier, donc, seuls les multiples de *F* seront atteints.

Donc si *d* et *g* ont un facteur commun autre que 1, la grenouille ne pourra pas prévenir toutes les autres ; elle ne pourra prévenir que celles se trouvant sur les nénuphars multiples du plus grand facteur commun.

F - Nombres premiers entre eux

Définition : Deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur plus grand diviseur commun est 1. (Par exemple 3 et 10 sont premiers entre eux) (3)

Exemples :

On prend deux nombres premiers entre eux, ici 3 et 7, et on fait la liste de leurs différents multiples, le but étant d'en trouver 2 qui sont des entiers consécutifs pour que leur différence fasse 1.

***d*=3**	***g*=7**	
0	0	$-1=2\times3-1\times7$ On fait 2 bonds à droite et 1 à gauche : on atteint le -1.
3	**7**	$1=5\times3-2\times7$
6	*14*	Si on fait 5 bonds à droite et 2 à gauche : on atteint le 1.
9	21	Les grenouilles sont donc toutes atteintes.
12	28	
15	35	

Voici un deuxième exemple :

***g*=3**	***d*=5**	
0	0	$-1=1\times5-2\times3$ On fait 1 bond à droite et 2 à gauche : on atteint le -1.
3	**5**	$1=2\times5-3\times3$
6	*10*	Si on fait 2 bonds à droite et 3 à gauche : on atteint le 1.
9	15	Les grenouilles sont donc toutes atteintes.
12	20	
15	25	
18	30	
21	35	

Lorsque nous avons pris des grands nombres, cette méthode est vite devenue fastidieuse mais nous trouvions à chaque fois une solution nous permettant d'atteindre toutes les grenouilles.

L'exemple *d* = 7 et *g* = 3 peut aussi être présenté sous forme de division euclidienne **:**

7	3
1	2

$1=7\times1-3\times2$

1 bond de 7 à droite et 2 à gauche : le 1 est atteint.

Pour d = 44 et g = 13

$$\begin{array}{r|l} 44 & \underline{13} \\ 5 & 3 \end{array}$$

1 bond à droite et 3 à gauche : le 5 est atteint. On peut maintenant remplacer 44 par 5 et dire que la grenouille se déplace de 5 vers la droite et de 13 vers la gauche.

$$5=44-3\times13$$

On recommence :

$$\begin{array}{r|l} 13 & \underline{5} \\ 3 & 2 \end{array}$$

Le –3 est atteint. On peut donc remplacer 13 par 3 (bonds vers la gauche)

$$-3=2\times5-1\times13$$

On recommence :

$$\begin{array}{r|l} 5 & \underline{3} \\ 2 & 1 \end{array}$$

Le 2 est atteint. On peut donc remplacer 5 par 2 (bonds vers la droite)

$$2=1\times5-1\times3$$

On recommence :

$$\begin{array}{r|l} 3 & \underline{2} \\ 1 & 1 \end{array}$$

(-1)est atteint car

$$-1=1\times2-1\times3$$

Avec cette méthode on atteint 1 ou -1. On peut aussi retrouver combien de bonds la grenouille doit faire avec les nombres de départ : 44 et 13.

$$\begin{aligned} -1&=1\times2-1\times3=1\times(5-3)-1\times3 \\ &=1\times5-2\times3=1\times5+2\times(2\times5-1\times13) \\ &=5\times5-2\times13=5\times(44-3\times13)-2\times13 \\ &=5\times44-17\times13 \end{aligned}$$

Il faut donc 5 bonds de 44 à droite et 17 bonds de 13 à gauche pour atteindre -1 et donc toutes les grenouilles.

Voici un troisième et dernier exemple avec d=56 et g=15 :

$$\begin{array}{r|l} 56 & \underline{15} \\ 11 & 3 \end{array}$$

$$11=56-3\times15$$

On remplace 56 par 11 .

$$\begin{array}{r|l} 15 & \underline{11} \\ 4 & 1 \end{array}$$

$$-4=1\times11-1\times15$$

On remplace 15 par 4.

$$\begin{array}{r|l} 11 & \underline{4} \\ 3 & 2 \end{array}$$

$$3=1\times11-2\times4$$

On remplace 11 par 3.

$$\begin{array}{r|l} 4 & \underline{3} \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$-1=1\times3-1\times4$$

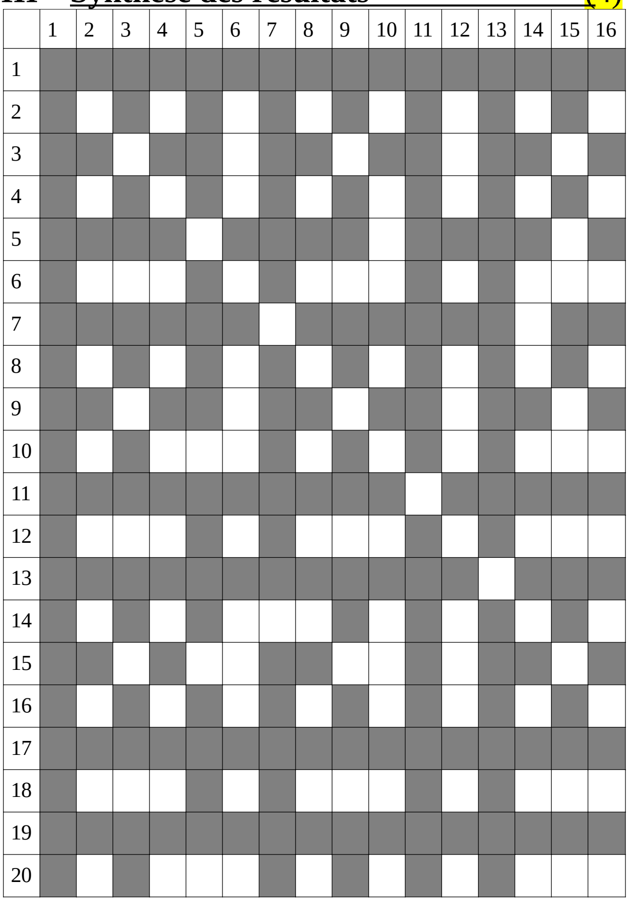
On atteint –1.

$$\begin{aligned} -1&=3-4=1\times11-2\times4-4=11-3\times4 \\ &=11-3\times(15-11)=4\times11-3\times15 \\ &=4\times(56-3\times15)-3\times15=4\times56-15\times15 \end{aligned}$$

Il faudra donc 2 bonds à droite et 9 à gauche.

Dans tous les exemples que nous avons traités, nous sommes arrivés à trouver 1 ou –1 mais nous ne savions pas si c'était toujours possible. Nos chercheurs nous ont dit qu'il existait un théorème, le théorème de Bezout, qui permettait d'affirmer que c'était toujours possible avec deux nombres premiers entre eux.

III – Synthèse des résultats (4)



Notes d'édition

(1) On cherche donc à savoir si on peut trouver x et y tels que $dx - gy = 1$ ou $dx - gy = -1$.
Cette remarque sera utilisée dans le paragraphe F.

(2) facteur commun autre que 1.

(3) Ce terme "diviseur" correspond au mot "facteur" utilisé précédemment.

(4) Légende du tableau :
En prenant d en abscisse et g en ordonnée, les cases noircies sont celles pour lesquelles il est possible d'informer les grenouilles.