

Les taches des girafes ou les diagrammes de Voronoï 2013-2014

Par Rudy BARNEOUD-CHAPELIER, François-Xavier RIPPET, Felix D'HURLABORDE, Adèle FINE
et Claire MAILLET élèves de première S et de seconde au Lycée d'Altitude de Briançon (Hautes-Alpes-
05)

Enseignants : Hubert PROAL et Mickaël LISSONDE

Chercheurs : Camille PETIT (Université de Fribourg) et Yves PAPEGAY (INRIA-Sophia Antipolis)

Présentation du sujet

Étant donnés n points $A_1, A_2, \dots, A_n$, on appelle diagramme de Voronoï de $A_1, A_2, \dots, A_n$ l'ensemble des
cellules $C_i = \{M \text{ tel que } d(M, A_i) < d(M, A_j) \text{ pour tout } j \neq i\}$

Construire et étudier les diagrammes de Voronoï.

Résultats obtenus

Les élèves sont arrivés à définir un algorithme pour réaliser le diagramme de Voronoï d'un réseau de
points quelconques. Parallèlement ils ont trouvé le nombre de médiatrices de n points (voir annexe 1). Ils
ont aussi élaboré un jeu lié au diagramme de Voronoï et proposé des stratégies gagnantes.

Valorisations des travaux

Les deux élèves de 1^{er}S ont exposé ce sujet au congrès MeJ de Berlin en 2014 et il a été validé comme
sujet de TPE.

Les trois élèves de seconde ont présenté leur sujet à des élèves de collège lors de la semaine des maths. Ils
ont présenté sous forme d'animation ce sujet durant le congrès MeJ de Lyon en 2014 et lors du salon de la
culture et des jeux mathématiques à Paris. Ils ont obtenu le premier prix au concours André Parent 2014.



I. Compréhension du sujet

a) Deux points E et G

Dans ce cas, le diagramme de Voronoï est constitué de deux cellules qui sont séparées par la médiatrice du segment $[EG]$ (figure 1).

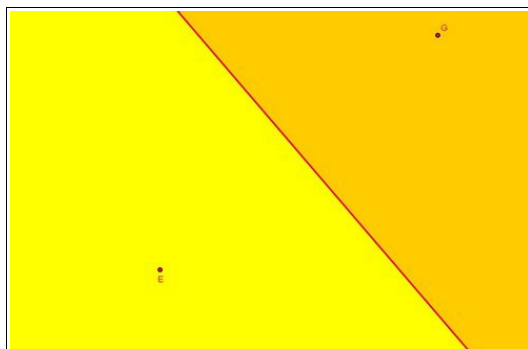


Figure 1 : diagramme de Voronoï pour deux points.

b) Trois points E, G et F

Quand nous rajoutons un point F, cela va créer une cellule prenant sur les deux zones précédentes. Pour visualiser le nouveau diagramme de Voronoï nous avons tracé les médiatrices de $[FG]$ et $[FE]$. Les trois demi-droites partant du centre du cercle circonscrit et portées par les médiatrices vont donner les frontières des trois cellules (figure 2).

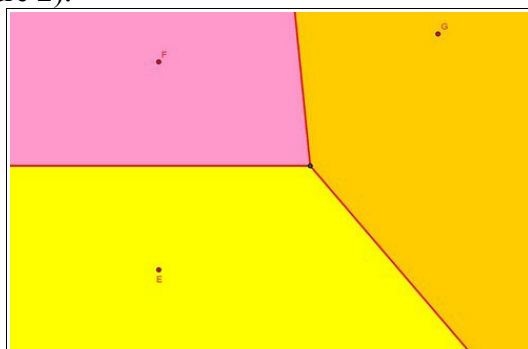


Figure 2 : diagramme de Voronoï pour trois points.

Dans le cas particulier où les trois points sont alignés, les médiatrices sont parallèles et les cellules ont la forme de bandes.

Nous constatons que les médiatrices semblent jouer un grand rôle. A partir de 4 points, les médiatrices des segments ne sont pas forcément concourantes.

c) Quatre points

Nous avons alors deux cas de figures :

Soient les 4 points forment un quadrilatère (convexe), soient trois points forment un triangle et le quatrième est à « l'intérieur » du triangle.

C1) Dans ce premier cas nous traçons les quatre médiatrices de chaque segment du quadrilatère, elles se coupent deux à deux.

Conjecture 1 : si $EJGF$ est un quadrilatère tel que $[EG]$ est la plus grande diagonale. Les intersections des médiatrices de $[EJ]$ et $[EF]$ et des médiatrices de $[FG]$ et $[JG]$ vont donner deux points U et V du diagramme de Voronoï de E, J, G et F (figures 3 et 4). Il est possible que U et V soient confondus. **(1)**

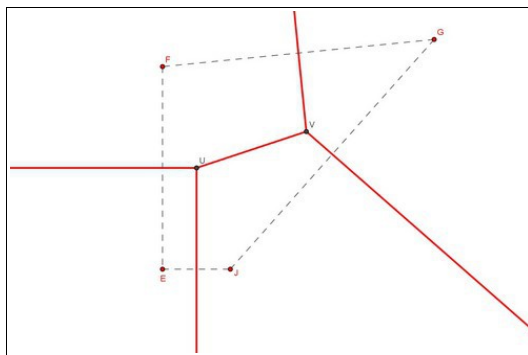


Figure 3 : frontières du diagramme de Voronoï pour quatre points en forme de quadrilatère.

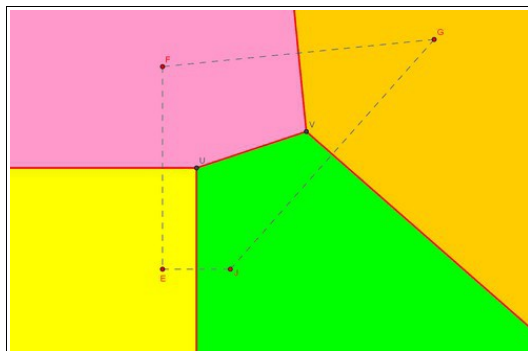
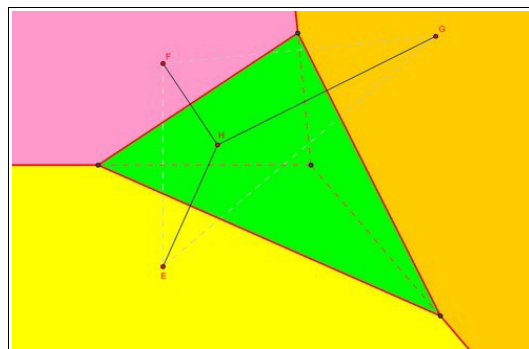
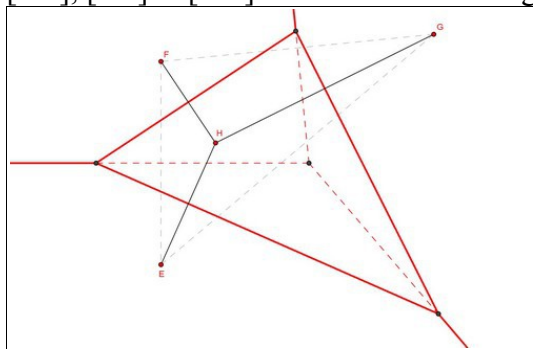


Figure 4 : diagramme de Voronoï pour quatre points en forme de quadrilatère.

C2) Dans le deuxième cas, où le nouveau point H est à l'intérieur du triangle EFG, les trois médiatrices de $[HE]$, $[HF]$ et $[HG]$ vont former un triangle qui va être la cellule attachée à H (figures 5a et 5b).



Figures 5a et 5b : diagramme de Voronoï pour quatre points en forme de triangle et un point à l'intérieur.

d) Cinq points

Lors de nos recherches nous avons traité le cas de 5 points. Ceci nous a conduits à savoir combien nous avons de médiatrices pour n points (voir annexe 1).

Les nombreuses situations possibles pour 5 points : pentagone, quadrilatère avec un point à l'intérieur, triangle avec deux points à l'intérieur, nous ont permis de réfléchir pour comprendre le cas général.

II. Le cas général à n points

Notre problème a été de savoir comment procéder pour créer le diagramme de Voronoï. Si nous traçons toutes les médiatrices cela devient illisible car nous n'arrivons plus à savoir quelle zone est attachée à quel point.

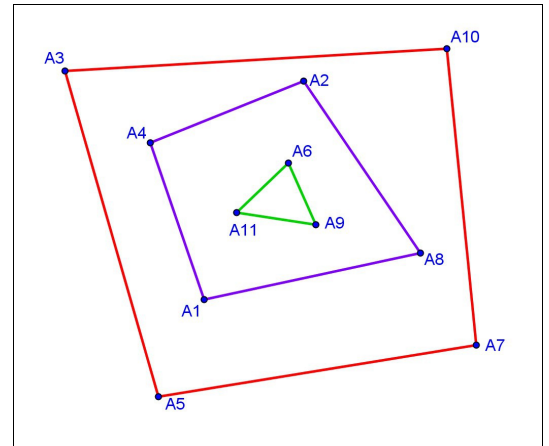
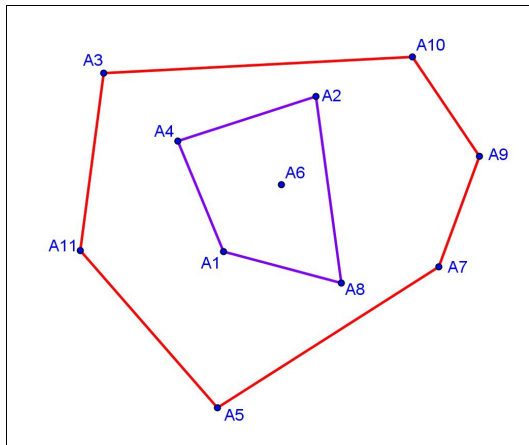
A force d'expériences, nous avons proposé une méthode.

Nous construisons le plus grand polygone avec les points du réseau.

Nous « oublions » ce polygone et nous refaisons la même démarche avec les points restants.

Nous obtenons une suite de polygones emboîtés (exemples figures 6a et 6b).

A la fin, dans le dernier polygone, il va nous rester soit 0 point, soit 1 point ou soit 2 points. Il ne peut pas rester 3 points car alors nous pourrions faire encore un polygone (un triangle).



Figures 6a et 6b : exemples d'emboîtement des polygones pour deux réseaux de 11 points.

b) Construction du diagramme de Voronoï

Une fois la suite de polygones emboîtés construite, nous partons de la structure la plus à « l'intérieur ». C'est-à-dire le point ou les deux points ou les points du dernier polygone construit avec la méthode ci-dessus.

Pour construire la cellule d'un point A, nous traçons toutes les médiatrices entre A et les autres points du réseau et le plus petit ensemble convexe délimité par les médiatrices et contenant A sera la cellule de A¹.

Remarque : il est possible que des médiatrices ne soient pas utiles dans la construction de la cellule du point A.

Par exemple pour la figure 6a, nous partons du point A6 et nous traçons les médiatrices de [A6A4], [A6A2], [A6A9], [A6A7], [A6A8] et [A6A1]. Le polygone défini par les intersections va construire la cellule de A6 (figure 7).

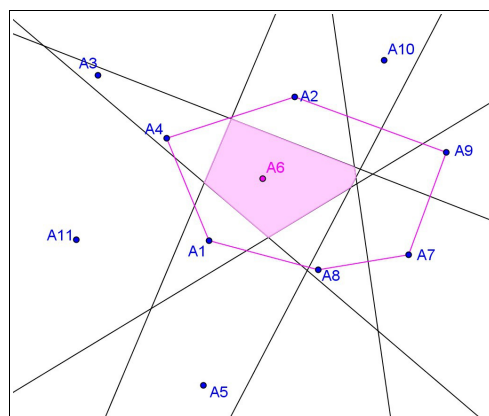


Figure 7 : construction de la cellule de A6

¹ Cette construction a mis beaucoup de temps à aboutir, nous pensions au début que pour construire la cellule de A6 il suffisait de « regarder » le polygone A1A4A2A8. Suite à une remarque de Pierre Duchet lors du concours André Parent et avec l'aide de notre chercheur nous avons proposé cette formulation. **Du coup notre méthode n'a plus besoin de la construction des poupées russes, nous pouvons construire le diagramme de Voronoï en partant de n'importe quel point du réseau.**

Pour construire les cellules des points du deuxième polygone (des poupées russes), c'est-à-dire A4A2A8A1 nous procédons comme ci-dessus avec chacun des points.

Par exemple pour déterminer la cellule de A2, nous traçons toutes les médiatrices partant de A2 jusqu'aux points voisins, puis le polygone construit avec les intersections (figure 8).

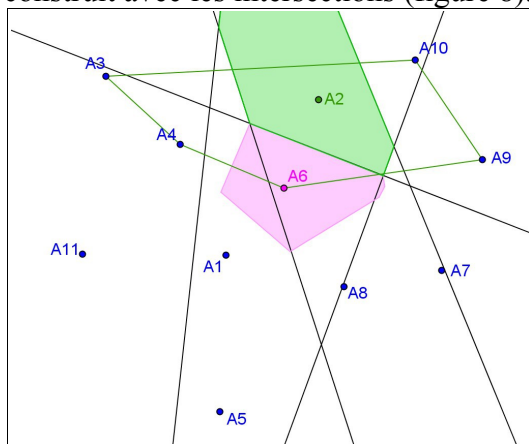


Figure 8 : construction de la cellule de A2

Nous faisons de même pour les points A8, A1 et A4 (figure 9)

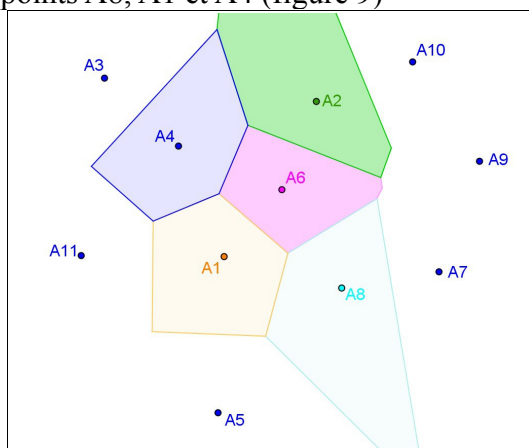


Figure 9 : construction des cellules de A8, A1 et A4

Enfin, toujours par le même procédé nous construisons les cellules des points du premier polygone A3A10A9A5A11 (figure 10)

Remarque, pour le premier polygone les cellules ne seront pas des polygones mais des zones ouvertes, c'est-à-dire dont une partie n'est pas délimitée par une frontière. (3)

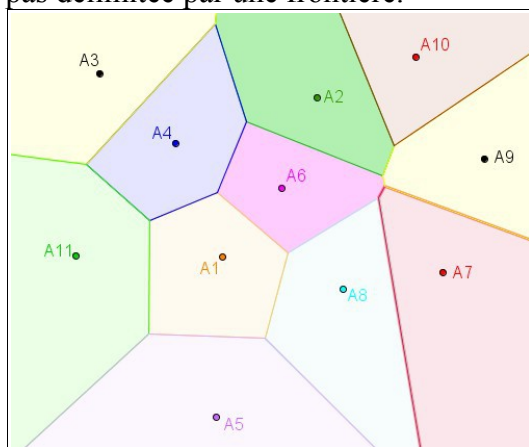
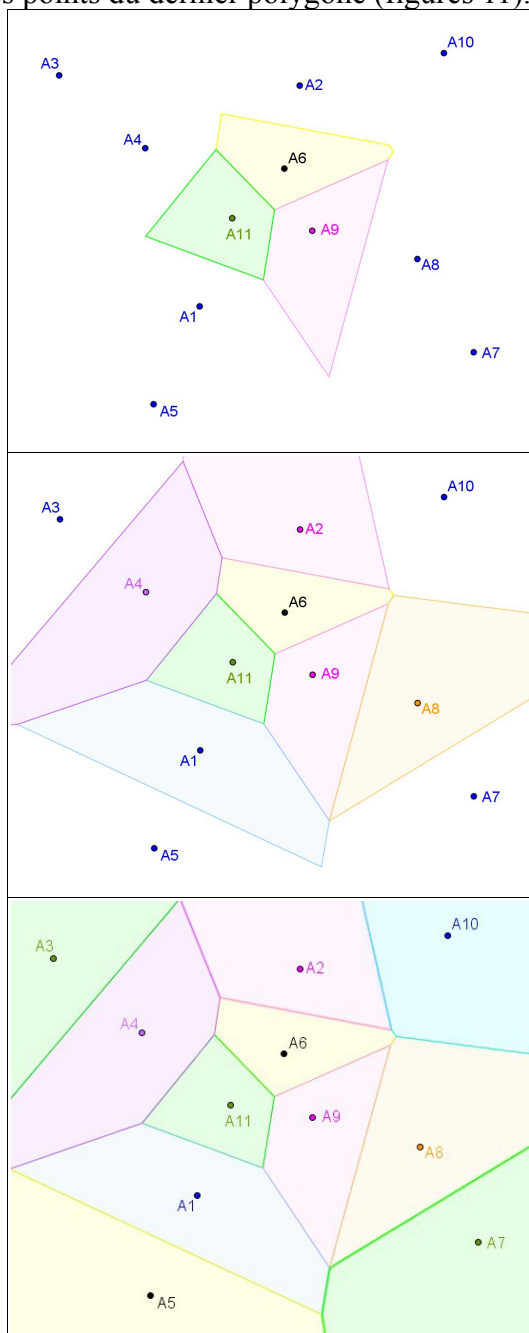


Figure 10 : diagramme de Voronoï des 11 points

Si la structure la plus à l'intérieur contient deux points, nous commençons avec la même méthode par ces

deux points et si elle ne contient aucun point (exemple figure 6b), nous commençons toujours avec la méthode décrite ci-dessus par les points du dernier polygone (figures 11).



Figures 11 : les trois évolutions de la construction des cellules pour le réseau de la figure 6b



Vidéo conférence avec un de nos chercheurs

III. Jeu de Voronoï

Les élèves de première ont pu présenter ce sujet dans le cadre de leur TPE. Leurs recherches sur internet les ont conduits à trouver un jeu sur les diagrammes de Voronoï :

<http://images.math.cnrs.fr/Jouez-avec-les-diagrammes-de.html> cet article provient d'un autre article : https://interstices.info/jcms/c_24839/jouez-avec-les-diagrammes-de-voronoi

Nous avons aussi trouvé un article très intéressant pour notre atelier car nous avons des collègues qui travaillent sur les tas de sable et les squelettes : https://interstices.info/jcms/c_12845/reconstruire-des-surfaces-pour-limagerie

A partir du jeu du diagramme de Voronoï, nous avons imaginé un autre jeu sur plateau.

Ce jeu peut se décliner en trois versions : le nombre de coups par joueur, la taille et la forme du jeu et enfin le nombre de joueurs.

Pour vous expliquer les règles, nous allons nous placer dans le cas de deux joueurs (J_1 et J_2), chacun d'eux a un seul coup à jouer et le jeu est un plateau de 8 sur 5.

Les deux joueurs posent leur pion sur le plateau (figure 12).

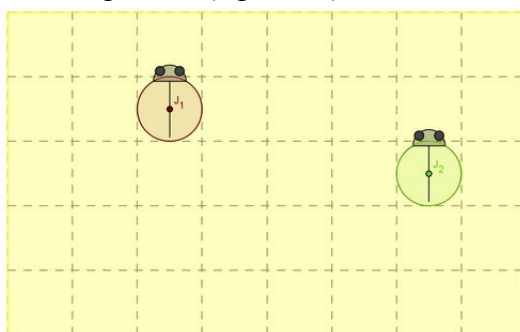


Figure 12 : grille de 8 sur 5. Les joueurs places leur pion.

Les joueurs gagnent les cases les plus proches de leur pion de départ. Le joueur qui a le plus de cases de sa couleur a gagné (figure 13).

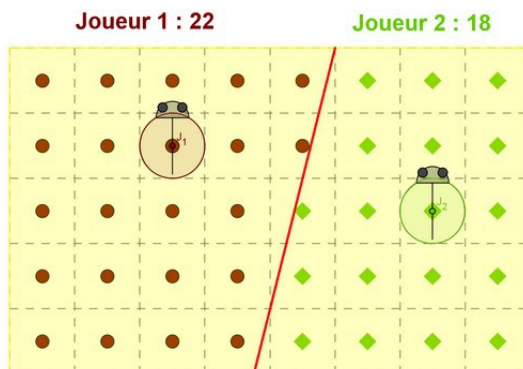


Figure 13 : le joueur 1 gagne avec 22 cases.

a) Résultats pour le jeu sur plateau

Conjecture 1 : Dans le cas de deux joueurs qui ont un seul pion, il faut essayer de se mettre au centre du plateau ; du coup, le premier joueur à l'avantage.

Conjecture 2 : si le plateau est impair x impair, le premier joueur gagne en se plaçant au centre du plateau (figure 14).

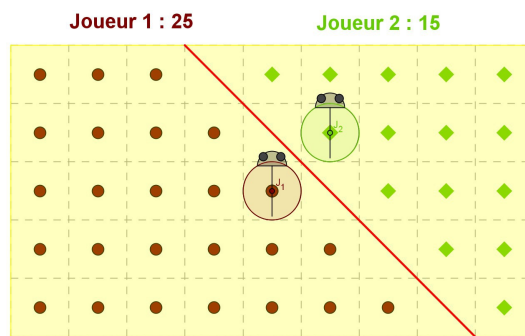


Figure 14 : plateau 5x9, le premier joueur gagnera toujours en se plaçant au centre

Conjecture 3 : si le plateau est impair $\times$ pair ou pair $\times$ pair, les deux joueurs feront toujours égalité (s'ils jouent bien) (figures 15 et 16).

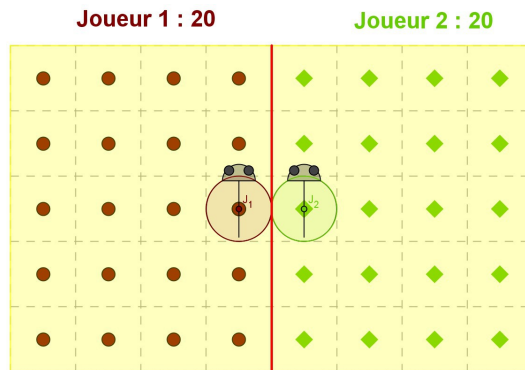


Figure 15 : plateau de 5x8, les deux joueurs feront toujours égalité

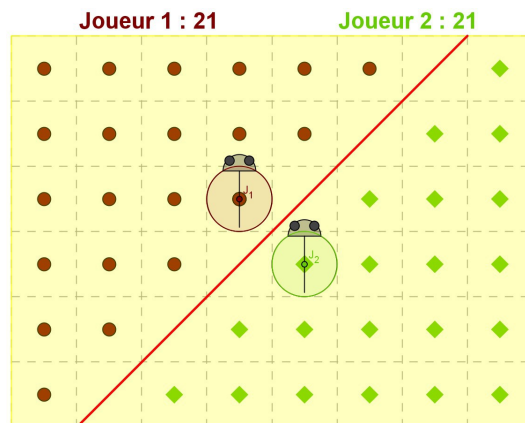


Figure 16 : plateau de 6x8, les deux joueurs feront toujours égalité

Avec deux pions :

Si les deux joueurs ont le droit de jouer deux coups, dans ce cas, même si les positions centrales restent plus avantageuses, le jeu devient plus stratégique. Les joueurs peuvent assurer la sécurité de leur zone en positionnant leur deux pions du même côté ou bien bloquer l'adversaire en posant un pion derrière le sien. Dans ce cas le premier joueur n'est pas forcément avantage (figures 17 et 18).



présentation à des collégiens pendant la semaine des maths

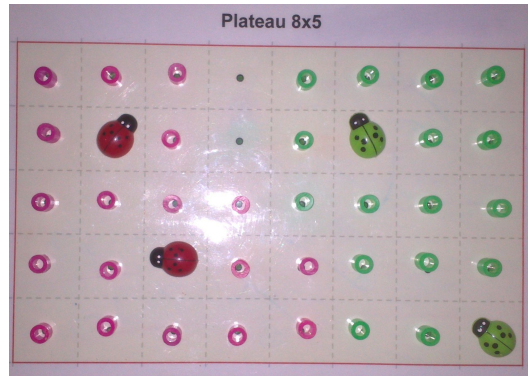


Figure 17 : les deux joueurs restent dans leur zone

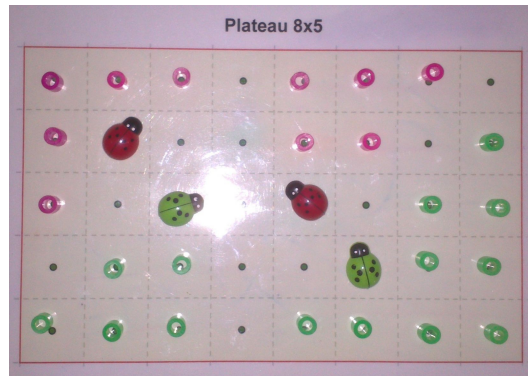


Figure 18 : les joueurs mélangent leur zone

Il est également possible de jouer avec trois pions en suivant le même principe qu'avec les deux pions (figure 19).

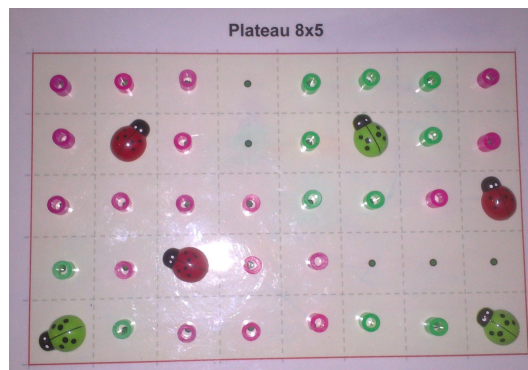


Figure 19 : Les joueurs placent leurs trois pions à tour de rôle

b) Résultats sur un jeu cylindrique

Nous revenons au cas de deux joueurs où chacun d'eux n'a qu'un seul pion à placer. Une manière de représenter un plateau cylindrique est de le représenter « à plat » en identifiant la partie de gauche à la partie de droite.

La trace des médiatrices va former des dents de scie (figures 20 et 21).

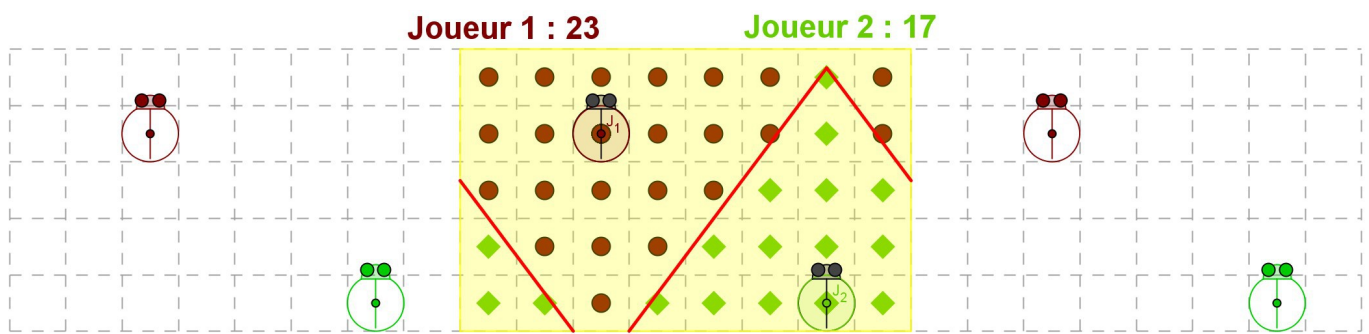


Figure 20 : jeu sur plateau cylindrique de 5x8



Figure 21 : photo d'un jeu cylindrique de 8x5

Les conjectures 1 et 2 restent valables pour des jeux cylindriques.

(4)

c) Résultats sur un jeu torique

Toujours pour deux joueurs qui ont le droit de poser un seul pion. Une manière de représenter un plateau torique est de le représenter « à plat » en identifiant la partie de gauche à la partie de droite et la partie du haut à la partie du bas (figure 22).



Exposé par les élèves de première lors du congrès MeJ de Berlin



Animation par les élèves de seconde lors du congrès MeJ de Lyon

Joueur 1 : 19

Joueur 2 : 19

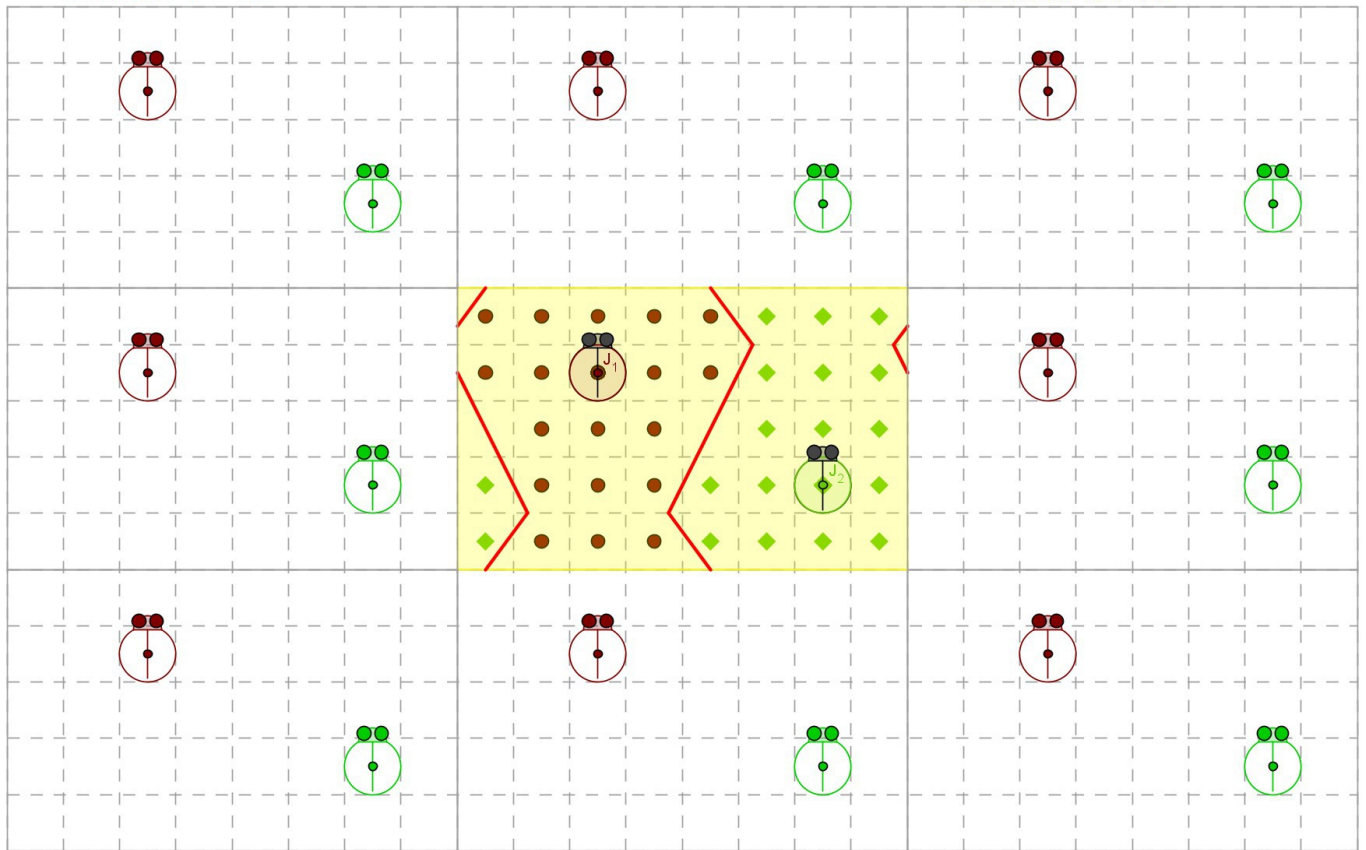


Figure 22 : jeu sur plateau torique de 5x8

Conjecture 4 : quelle que soit la taille du plateau et quelle que soit la manière de jouer, il y a toujours égalité entre les deux joueurs.



Stand lors du congrès MeJ de Lyon



Présentation lors du concours André Parent à Paris

Annexe 1 sur les diagrammes de Voronoï

Question : pour n points, combien a-t-on de médiatrices au maximum ?

Nous avons trouvé une formule: il s'agit d'une suite.

La formule est : $F(n)=F(n-1)+n-1$ où $F(n)$ est le nombre de médiatrices pour n point.

Nous arrivons à $F(n)=0+1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$

Handwritten notes on graph paper:

- 1 point = 0 médiatrices
- 2 points = 1 médiatrice
- 3 points = 3 médiatrices
- 4 points = 6 médiatrices
- 5 points = ~~4~~ 10 médiatrices.
- 6 points =
- $F(n) =$ _____
- $\downarrow$
- ~~$F(5) = 4 + 3 + 2 + 1 + 0$~~

Formule =

$$F(5) = F(n-1) + F(n+1)$$

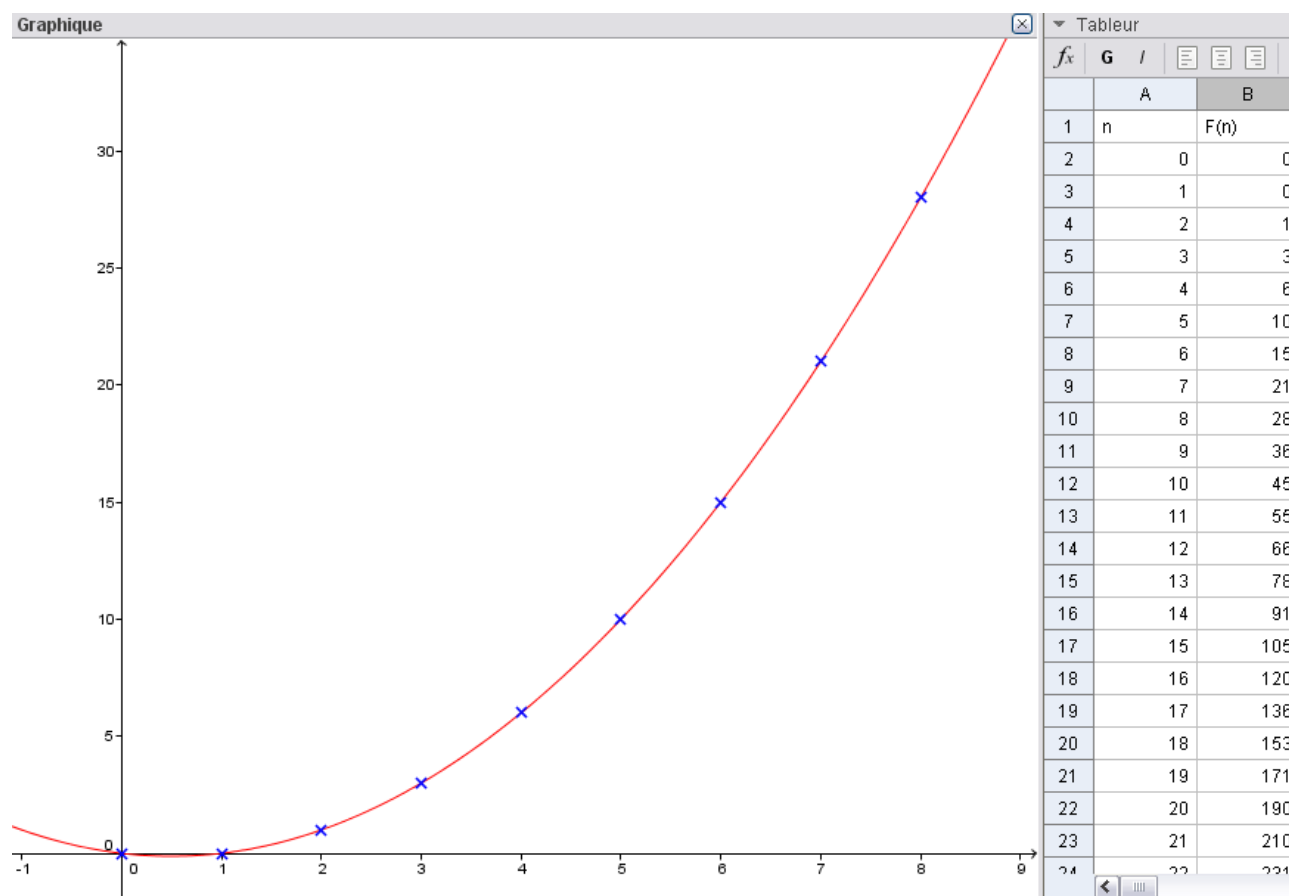
$$F(n) = F(n-1) + F(n+1)$$

$$F(n) = F(n-1) + (n-1) \text{ suite}$$

$$F(100) =$$

Extrait de leur cahier de recherches

Pour vérifier, nous avons tracé les points par la formule et la fonction $f(x)=\frac{x(x+1)}{2}$



verification avec geogebra

Notes d'édition

(1) Il est possible de montrer que la conjecture C1 est fausse. Trouver un contre-exemple est laissé au lecteur pour ne pas gâcher le plaisir des futurs chercheurs en herbe. Le terme « conjecture » est en tout cas ici bien choisi, car il indique un résultat dont on suppose la vérité, sans en avoir la certitude via une preuve.

(2) Il semble (comme indiqué en note de bas de la page4) que l'utilisation des poupées russes dans la construction ait été abandonnée dans les algorithmes présentés. L'algorithme proposé finalement revient à considérer pour chaque point du réseau toutes les médiatrices. Cet algorithme est donc équivalent à tracer toutes les médiatrices possibles entre des paires de points. Il faut néanmoins reconnaître que les algorithmes plus efficaces sont également bien plus compliqués. L'idée de partir de l'enveloppe convexe des points du réseau est néanmoins une bonne idée car il est possible de prouver que pour deux points voisins de cette enveloppe, la médiatrice de ces points intervient dans le diagramme de Voronoï. Il est ensuite envisageable de chercher en quels points ces médiatrices sont stoppées, et de « lancer » de nouvelles médiatrices à partir de ces points. L'algorithme de Fortune en deux dimensions a un fonctionnement un peu similaire.

(3) La remarque suppose que SEULS les points situés sur l'enveloppe convexe du réseau auront une cellule infinie. Cette propriété est vraie, mais n'est pas prouvée ici dans les travaux présentés. Il s'agit donc de nouveau d'une conjecture faite par les élèves.

(4) Il s'agit plutôt des conjectures 2 et 3. Si les conjectures sont similaires, il semble que les stratégies sont un peu plus complexes. Le premier joueur a plus de choix dans le placement de son pion, sans pour autant pouvoir le placer n'importe où. En particulier sur la figure 20, le joueur 2 aurait pu placer son pion juste en dessous du pion du joueur 1 et remporter la partie. Il appartient au futur chercheur en herbe de la valider ou de l'invalidier.