LE GERRYMANDERING

MATh.en.JEANS

2019 - 2020

ELEVES

Sioban NIERADZIK-KOZIC, 1ère générale
Justine MICHEL, 1ère générale

PROFESSEURS

Olivier CRÉCHET
Guillaume PELLETIER
Nathalie HERMINIER

CHERCHEUR

Benjamin NGUYEN

ETABLISSEMENT SCOLAIRE

Lycée Marguerite de Navarre, Bourges

Sommaire

Introduction : présentation du problème

Le problème s'intitule « Le redécoupage électoral ou *Gerrymandering* ». Avant toute chose, il convient d'expliquer ce qu'est le redécoupage électoral.

Le redécoupage électoral, ou *Gerrymandering*, s'inscrit dans le contexte d'élections, plus particulièrement législatives (pour élire les députés) ; il est parfois nommé *charcutage électoral*. Les départements français sont divisés en circonscriptions, cantons, communes et bureaux de vote. Les circonscriptions ne sont pas fixes : leurs limites peuvent être changées. Il est possible de modifier la configuration des circonscriptions pour avantager un parti ou un candidat. Le mot « Gerrymandering » a été inventé au début du XIX^{e} siècle aux États-Unis après qu'un gouverneur ait été accusé d'avoir modifié une circonscription à son avantage avant les élections présidentielles ; le nom de ce gouverneur est *Gerry* et la circonscription en question avait la forme d'une salamandre (*salamander* en anglais), d'où le nom *Gerrymandering*...

Notre objectif est d'étudier les stratégies qui permettent d'avantager un parti et de les appliquer à des élections législatives pour en modifier le résultat. Nous avons d'abord cherché à prévoir les résultats d'élections grâce à des matrices. Puis nous avons construit une marche à suivre pour modifier les circonscriptions efficacement, avant d'appliquer la méthode à un département imaginaire.

I – Comment prévoir l'issue des élections avec les matrices ?

A – Pourquoi avoir besoin de prévoir le résultat du second tour des élections à partir des résultats du premier tour ?

Il est nécessaire de prévoir quel sera le résultat final des élections pour telle ou telle configuration afin de déterminer laquelle est la plus avantageuse. Pour modifier avantageusement les circonscriptions, on s'appuie sur les sondages ou sur les résultats d'élections précédentes (on suppose que les citoyens revoteront de la même façon, ou que les sondages sont fiables).

On considère que ces données prédisent le résultat du premier tour des élections. Il s'agit ensuite de prévoir le résultat du second tour pour lequel il ne reste plus que deux candidats.

Pour prévoir le résultat du second tour à partir du résultat du 1er tour, on établit des **coefficients de report** : ils indiquent par exemple le pourcentage d'électeurs de gauche au 1er tour qui ont voté à droite au second tour. Soient trois partis : les rouges, les bleus et les verts. On peut supposer que tous ceux qui ont voté pour les rouges revoteront pour les rouges au second tour si les rouges passent au second tour ; ou encore que, si les rouges ne passent pas au second tour, la moitié des rouges votera pour les bleus au second tour et l'autre moitié votera pour les verts. On regroupe ces proportions dans des **matrices**.

Élaborer ces matrices de coefficients de report est trop complexe avec des élections réelles. En effet, le nombre de partis est important et tous les partis ne sont pas représentés dans toutes les circonscriptions d'un même département. Nous avons donc travaillé avec un pays imaginaire nommé « Mathland » qui donne des données simplifiées par rapport à de réelles élections.

B – Comment trouver les coefficients de report des voix ?

Prenons des élections factices dans un pays imaginaire nommé « Mathland ». Dans le pays « Mathland », les élections législatives (dans le cadre d'un scrutin uninominal majoritaire à 2 tours (1 seul élu au niveau de la circonscription)) ont eu lieu. Trois partis se sont présentés : les Rouges, les Verts et les Bleus. Les votes blancs, nuls et les abstentions sont pris en compte.

Remarque :

Le vote blanc consiste à déposer dans l'urne une enveloppe vide ou comportant un bulletin blanc, dépourvu de tout nom de candidat, lors d'une élection.

Ce vote se distingue de l'abstention (absence de vote) et du vote nul (non valable, lorsque le bulletin ou l'enveloppe n'est pas conforme aux normes prévues).

(https://www.interieur.gouv.fr/Actualites/L-actu-du-Ministere/Qu-est-ce-que-le-vote-blanc)

1) Au niveau d’un département

<u>Résultats départementaux :</u>

1^er^ tour		**2^ème^ tour**	
Parti	***Pourcentage des voix***	***Parti***	***Pourcentage des voix***
Les Rouges	28 %	Les Rouges	32,25 %
Les Bleus	17 %		
Les Verts	21 %	Les Verts	35,28 %
Abstentionnistes	29 %	Abstentionnistes	24,86 %
Blancs	4 %	Blancs	5,54 %
Nuls	1 %	Nuls	2,07 %

Voici les coefficients de report de voix de ces élections suivis de la matrice correspondante :

<u>Report des voix :</u>

De … → Vers … ↓	Les Rouges	Les Bleus	Les Verts	Abstention	Blancs	Nuls
Les Rouges	90 %	20 %	10 %	5 %	2 %	2 %
Les Bleus (éliminés)						
Les Verts	7 %	65 %	84 %	15 %	5 %	8 %
Abstention	1 %	10 %	3 %	75 %	10 %	10 %
Blancs	1 %	4 %	1 %	3 %	80 %	30 %
Nuls	1 %	1 %	2 %	2 %	3 %	50 %

Matrice correspondante :

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}02 & 0{,}02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}07 & 0{,}65 & 0{,}84 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}08 \\ 0{,}01 & 0{,}1 & 0{,}03 & 0{,}75 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}01 & 0{,}04 & 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Cette matrice signifie que 90% des électeurs Rouges du 1^e^ tour ont à nouveau voté pour les Rouges au second tour, aucun pour les Bleus qui ont été éliminés, 7% pour les Verts, 1% se sont abstenus, 1% ont voté blanc et 1% des vote ont été comptés nuls au second tour ; ceci, pour chaque catégorie (Rouges, Bleus, Verts, abstention, blanc, nul).

Ainsi, avec cette matrice et les résultats du premier tour seulement, on peut retrouver les résultats du second tour. Par exemple, soit R le pourcentage des voix obtenu par les Rouges au second tour sur l’ensemble des citoyens (en rouge les coefficients de report et en vert les résultats du second tour) :

R = 90% x 28% + 20% x 17% + 10% x 21% + 5% x 29% + 2% x 4% + 2% x 1% = 32,25 %

Cela revient à un produit matriciel. On a additionné les produits des pourcentages des voix du premier tour obtenus par chaque parti avec le pourcentage des voix, pour chaque parti, qui se sont reportées pour les Rouges et on obtient les résultats du second tour (avec une marge d'erreur qu'il faut réduire un maximum) :

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}02 & 0{,}02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}07 & 0{,}65 & 0{,}84 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}08 \\ 0{,}01 & 0{,}1 & 0{,}03 & 0{,}75 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}01 & 0{,}04 & 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}28 \\ 0{,}17 \\ 0{,}21 \\ 0{,}29 \\ 0{,}04 \\ 0{,}01 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}3225 \\ 0 \\ 0{,}3528 \\ 0{,}2486 \\ 0{,}0554 \\ 0{,}0207 \end{pmatrix}$$

La difficulté est de créer des coefficients de report des voix qui soient à la fois cohérents (si un parti passe au second tour, ceux qui ont voté pour ce parti au premier tour voteront sûrement à nouveau pour ce parti au second tour) et qui donne un résultat du second tour le plus exact possible. La somme des coefficients de chaque colonne de la matrice doit être égale à 1.

Remarque : finalement, lorsqu'un parti est éliminé à l'issue du premier tour, ceux qui le soutenaient ne se répartissent pas équitablement entre les deux autres partis au second tour (au second tour, les Bleus votent à 20% pour les Rouges et à 65% pour les Verts).

2) Au niveau d'une circonscription

On considère maintenant une **circonscription de Mathland** (on change d'échelle) dans laquelle on a obtenu les résultats suivants :

1er tour			**2ème tour**	
Parti	***Pourcentage des voix***		***Parti***	***Pourcentage des voix***
Les Rouges	30 %		Les Rouges	32 %
Les Bleus	10 %			
Les Verts	26 %		Les Verts	37 %
Abstentionnistes	29 %		Abstentionnistes	28 %
Blancs	3 %		Blancs	2 %
Nuls	2 %		Nuls	1 %

Essayons d'appliquer **la matrice du niveau départemental** au premier tour des législatives, **mais au niveau de cette circonscription** :

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 & 0,1 & 0,05 & 0,02 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,07 & 0,65 & 0,84 & 0,15 & 0,05 & 0,08 \\ 0,01 & 0,1 & 0,03 & 0,75 & 0,1 & 0,1 \\ 0,01 & 0,04 & 0,01 & 0,03 & 0,8 & 0,3 \\ 0,01 & 0,01 & 0,02 & 0,02 & 0,03 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,10 \\ 0,26 \\ 0,29 \\ 0,03 \\ 0,02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3315 \\ 0 \\ 0,351 \\ 0,2433 \\ 0,0483 \\ 0,0259 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0,32 \\ 0 \\ 0,37 \\ 0,28 \\ 0,02 \\ 0,01 \end{pmatrix}$$

On obtient donc comme résultats :

2ème tour	
Parti	***Pourcentage des voix Selon le calcul matriciel***
Les Rouges	33,15 %
Les Bleus (éliminés)	
Les Verts	35,1 %
Abstentionnistes	24,33 %
Blancs	4,83 %
Nuls	2,59 %

Les résultats obtenus avec le produit matriciel ne sont pas exactement les mêmes que les résultats réellement obtenus au second tour. En effet, **les coefficients de report des voix ne sont pas les mêmes puisqu'on a changé d'échelle et donc de citoyens (tout le monde ne vote pas de la même façon)**. Toutefois, les résultats obtenus avec la matrice ne sont pas très différents de ceux obtenus réellement : le résultat final des élections reste le même.

De plus, les matrices de report changent avec les résultats du premier tour. Une matrice qui convient à un second tour où les Rouges et les Verts s'affrontent ne convient pas à une situation avec les Verts et les Bleus au second tour. Une matrice est « sur mesure ».

Pour conclure :

- On crée une matrice de report à partir des résultats du premier et du second tour d'élections passées.
- On doit créer, si possible, une nouvelle matrice de report des voix à chaque changement d'échelle (département, circonscription)
- On doit obligatoirement créer une matrice pour chaque configuration de second tour dont on devra prévoir l'issue : Rouges/Verts, Rouges/Bleus et Bleus/Verts.

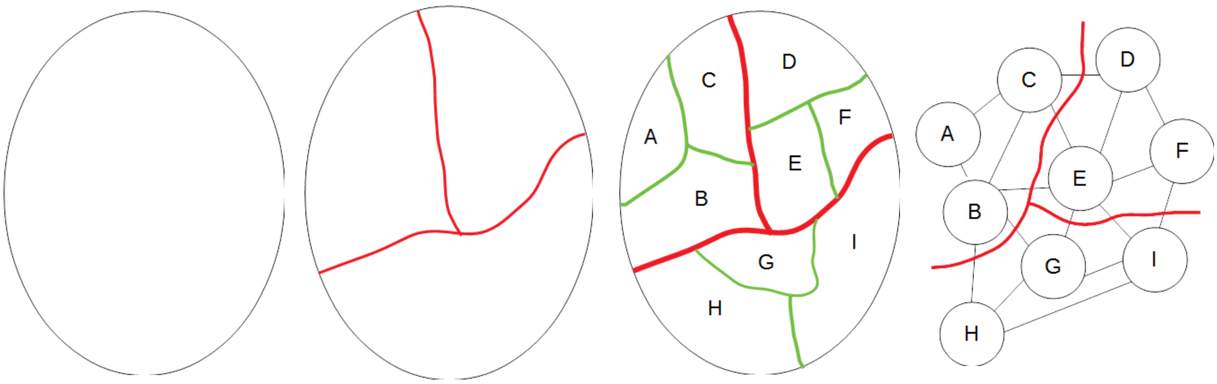
II – Comment modifier les circonscriptions à son avantage ?

Maintenant que nous pouvons prévoir les résultats d'une élection, il faut essayer de modifier ce résultat à notre avantage.

S'appuyer sur de véritables résultats d'élections pour un département représente une masse énorme de données (nombre de communes, de bureaux de vote et non-représentation des mêmes partis dans toutes les circonscriptions). Encore une fois, il est plus simple de travailler avec une modélisation simplifiée pour dégager un procédé et ensuite le généraliser à des données plus nombreuses.

Soit un département séparé en trois circonscriptions, chacune divisée en trois cantons. On représente chaque canton dans un graphe connexe, c'est-à-dire qui met en évidence les frontières communes (les arêtes) entre les différents cantons (les nœuds).

1 département	3 circonscriptions	9 cantons (3 par circonscription)	Le tout représenté par un graphe



Modifier les circonscriptions obéit à des règles :

- On ne divise pas les cantons, on les déplace en entier d'une circonscription à l'autre.
- Chaque circonscription doit être constituée de trois cantons.
- Chaque canton d'une circonscription doit toucher au moins un des deux autres cantons de cette circonscription.

Ces règles sont valables dans la vie réelle : ceux qui pratiquent le *Gerrymandering* doivent faire des circonscriptions équilibrées et unies, justement pour limiter les manipulations d'élections comme celles que nous voulons faire.

Dans chaque canton, on place trois bureaux de vote : 3×3×3=27 bureaux de vote en tout. On considère que les voix des citoyens d'un bureau de vote sont regroupées en une seule voix (soit 27 voix en tout). Les citoyens ont le choix entre trois partis : les triangles rouges, les ronds bleus et les carrés verts. Les citoyens peuvent voter blanc. On considère qu'il n'y a ni votes nuls ni abstentions.

A l'issue du premier tour, les couleurs qui ont emporté le plus de voix passent au second tour. On considérera que :

- Les citoyens ayant voté pour une couleur qui est passée au second tour votent tous à nouveau pour cette même couleur.

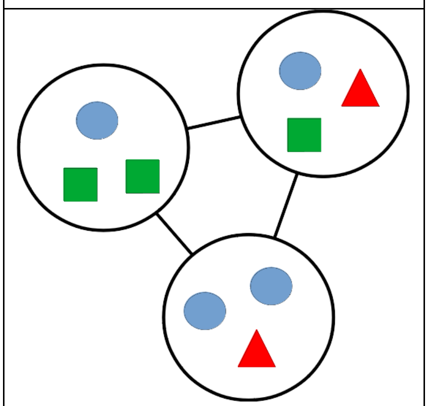
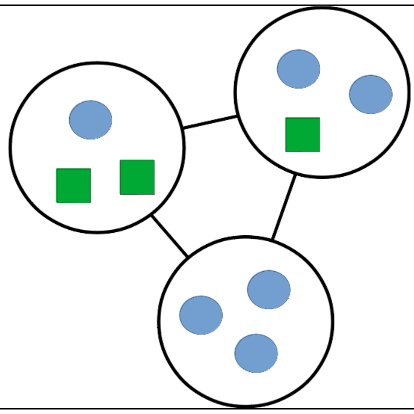
Les citoyens qui ont voté pour la couleur éliminée à l'issue du premier tour vont devoir voter pour l'une des deux couleurs restantes. Donc :

- On admettra que si les Rouges ne passent pas, les votants rouges votent pour les Bleus au second tour ; si les Bleus ne passent pas, les votants bleus votent pour les Verts au second tour ; si les Verts ne passent pas, les votants verts votent pour les Rouges au second tour.

Exemple :

<table>
<tr>
<td>Résultat du premier tour :
• 4 ronds bleus
• 3 carrés verts
• 2 triangles rouges</td>
<td rowspan="2">→

Les triangles rouges ne passent pas au second tour : ils se transforment en ronds bleus.

Les ronds bleus et les carrés verts restent tels quels au second tour.</td>
<td>Résultat du second tour :
• Les ronds bleus gagnent avec 6 voix ;
• Les carrés verts perdent avec 3 voix.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Les triangles rouges sont les « alliés » des ronds bleus qui sont eux-mêmes les « alliés » des carrés verts, qui sont enfin les « alliés » des triangles rouges : **l'allié d'une couleur vote pour celle-ci au second tour si lui-même est éliminé à l'issue du premier tour**.

Les triangles rouges sont cependant les « ennemis » des carrés verts car ils ne votent pas pour ces derniers au second tour en cas d'échec au premier tour ; selon le même principe, les carrés verts sont les ennemis des ronds bleus ; les ronds bleus sont les ennemis des triangles rouges. **Une couleur est donc l'ennemie de son alliée**.

Parti	Allié des…	Ennemi des…
Triangles rouges	Ronds bleus	Carrés verts
Ronds bleus	Carrés verts	Triangles rouges
Carrés verts	Triangles rouges	Ronds bleus

A – Gagner une circonscription

Avant de commencer le redécoupage, il est utile d'évaluer le nombre potentiel de circonscriptions que notre parti peut gagner en fonction du nombre de voix obtenues au premier tour, sans se soucier de la répartition des cantons en circonscriptions.

Pour gagner une circonscription, une couleur doit d'abord passer au second tour. Puis, avec ou sans l'aide de son « allié », elle doit obtenir plus de la moitié des voix. Comme il y a trois bureaux de vote par canton et trois cantons par circonscription, il y a neuf voix en tout : pour gagner le second tour, une couleur doit donc obtenir au moins 5 voix. Ces 5 voix peuvent compter celles des « alliés ». Soit C le nombre de voix pour la couleur que l'on souhaite voir gagner, A le nombre de voix pour sa couleur alliée et E le nombre de voix pour sa couleur ennemie. Pour que C gagne les élections, il faut respecter les conditions suivantes (au sein d'une circonscription) :

Pour que notre couleur accède au second tour :	C>A OU C>E **ET** A<5 ET E<5 (si une couleur a plus de 5 voix, elle a la majorité absolue et remporte les élections dès le premier tour)
SI au premier tour C>A ET E>A, pour que notre couleur remporte le second tour :	C + A > E (la couleur alliée n'étant pas passée au second tour, ses voix se transforment en voix pour notre couleur. Donc la somme des voix obtenues par notre couleur et son alliée au premier tour doit être supérieure au nombre de voix obtenues par la couleur ennemie)
SI au premier tour C>E ET A>E, pour que notre couleur remporte le second tour :	C > A + E (car les voix de la couleur ennemie, qui n'est pas passée au second tour, se transforment au second tour en voix pour la couleur alliée)
Sachant que :	C + A + E = 9

Avec 1 voix

Avec 1 voix au premier tour, notre couleur ne peut pas gagner les élections. En effet, pour passer au second tour, il faudrait que **A<1** (alors E=8) **ou E<1** (alors A=8). Ce qui ferait que la couleur majoritaire a 8 voix sur 9. Elle a la majorité absolue et gagne la circonscription dès le premier tour.

Avec 2 voix

Avec 2 voix, notre couleur ne peut toujours pas gagner la circonscription. En effet, pour passer au second tour, il faudrait alors que A<2 ou E<2. Mais alors C+A<2+2 ou C+E<2+2, soit C+A<4 ou C+E<4. Ce qui fait que la couleur majoritaire a plus de 5 voix sur 9. Elle a la majorité absolue et gagne la circonscription dès le premier tour.

Avec 3 voix

Avec 3 voix, notre couleur passe au second tour si A<3 ou E<3. Mais comme la couleur dominante ne doit pas avoir la majorité absolue dès le premier tour, il faut aussi (respectivement) que A>1 ou E>1. Avec 3 voix, il faut donc, pour passer au second tour, que A=2 et E=4 ou que E=2 et A=4. *On admet que le cas d'égalité C=A=E=3 n'est pas possible : en pratique, cela n'arrive pas en raison du nombre bien plus important de votants ; par conséquent, on ne sait pas quelle procédure suivre dans cette situation.*

Il s'agit ensuite de gagner le second tour. Si la couleur Ennemie passe, la couleur Alliée qui ne passe pas nous donne ses voix, ce qui donne : $E_2=E_1=4$ et $C_2=C_1+A_1=3+2=5$, soit $C_2>E_2$ (l'indice de la lettre donne le numéro du tour). En revanche, si c'est la couleur Alliée qui passe au second tour, l'Ennemie lui donne ses voix : $A_2=A_1+E_1=4+2=6$ et $C_2=C_1=3$, soit $C_2<A_2$.

Pour conclure, notre couleur remporte sa circonscription avec 3 voix si $A_1=2$ et $E_1=4$.

Avec 4 voix

Avec 4 voix, notre Couleur passe au second tour si A≤4 ou si E≤4. Mais comme la couleur dominante ne doit pas avoir la majorité absolue dès le premier tour, il faut aussi (respectivement) que A>0 ou E>0 : A∈{ 1 ; 2 ; 3 ;4 } et E∈{ 9-4-1 ; 9-4-2 ; 9-4-3 ; 9-4-4 } = { 4 ; 3 ; 2 ; 1 } OU E∈{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 } et A∈ { 9-4-1 ; 9-4-2 ; 9-4-3 ; 9-4-4 } = { 4 ; 3 ; 2 ; 1 }. Donc, dans le cas où notre couleur passe au second tour avec 4 voix, l'Ennemie passe au second tour si E>A, soit E∈ {3 ;4} et A∈{2 ;1} ; de même, l'Alliée passe si A∈{3 ;4} et E∈{2 ; 1}.

Il s'agit ensuite de gagner le second tour. **Si la couleur Ennemie passe**, la couleur Alliée qui ne passe pas nous donne ses voix, ce qui donne : $E_2=E_1\in \{3 ; 4\}$ et $C_2=C_1+A_1\in\{4+2 ; 4+1\} = \{6 ; 5\}$, soit $\mathbf{C_2>E_2}$. En revanche, **si c'est la couleur Alliée qui passe** au second tour, l'Ennemie lui donne ses voix : $A_2=A_1+E_1\in \{ 3 ; 4 \} + \{ 2 ; 1 \} = 5$ et $C_2=C_1=4$, soit $\mathbf{C_2<A_2}$.

Une nouvelle fois, il faut que ce soit l'Ennemie qui passe au second tour pour pouvoir remporter la circonscription. Il faut donc, avec C=4, que A∈{1 ; 2} et E∈{4 ; 3}.

Avec 5 voix et plus

Notre couleur a la majorité absolue et remporte donc la circonscription dès le premier tour.

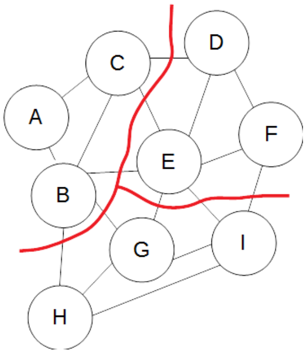
Conclusion

Notre couleur, si elle n'a pas la majorité absolue dès le premier tour, peut remporter une circonscription dans un nombre assez limité de cas :

$C_1 = 3$	$C_1 = 4$	$C_1 \geq 5$
$A_1 = 2$ **$E_1 = 4$**	**$(A_1 ; E_1) \in \{(1 ; 4) , (2 ; 3)\}$**	Circonscription gagnée quelles que soient les valeurs de A_1 et E_1.

Lors du *Gerrymandering*, il faudra donc veiller à ce que le plus de circonscriptions possibles respectent ces valeurs.

B – Gagner un maximum de circonscriptions



Repassons à l'échelle du département après celle de la circonscription. Pour répartir les cantons à son avantage il faut tenir compte de deux éléments :

- Le nombre de voix total que l'on a au premier tour sur les neuf cantons ;
- La répartition de ces voix : si elles sont regroupées sur un petit nombre de cantons (eux-mêmes serrés ou non) ou si, au contraire, elles sont réparties de façon homogène sur l'ensemble des cantons.

On distingue trois objectifs : gagner une, deux ou trois circonscriptions.

Valeur (appartenant à N) de C_1	[3 ; 5]	[6 ; 8]	[9 ; 27]
Objectif à atteindre	1	2	3

Objectif 1

Nous avons déjà étudié le nombre de voix requis au premier tour pour gagner une circonscription :

Situation 1 $C_1 = 3$	Situation 2 $C_1 = 4$	Situation 2 $C_1 \geq 5$
$A_1 = 2$ **$E_1 = 4$**	**$(A_1 ; E_1) \in \{(1 ; 4) , (2 ; 3)\}$**	Circonscription gagnée quelles que soient les valeurs de A_1 et E_1.

Mais ces voix doivent être regroupées sur seulement trois cantons liés du département. Avec peu de voix, il est préférable de les regrouper plutôt que de les disperser.

Objectif 2

Pour remporter deux circonscriptions, il faut que l'une des trois situations du tableau ci-dessus se réalise deux fois, ou que deux situations sur trois se réalisent.

Comme on remporte une circonscription à la condition que $C_1 \geq 3$, pour remporter deux circonscriptions, notre couleur doit avoir au moins six voix sur l'ensemble des neuf cantons (toutefois, ce n'est pas une garantie de victoire).

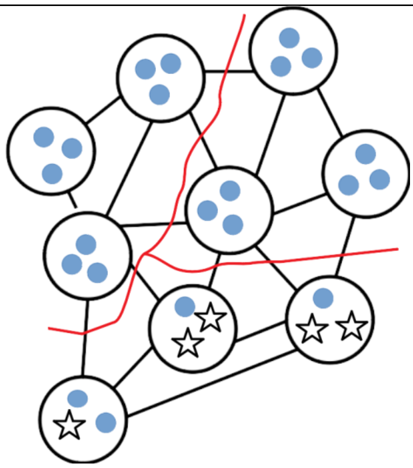
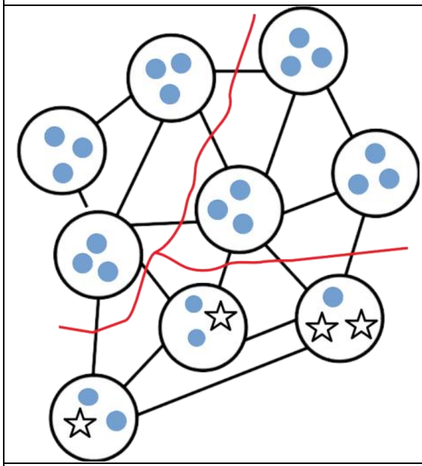
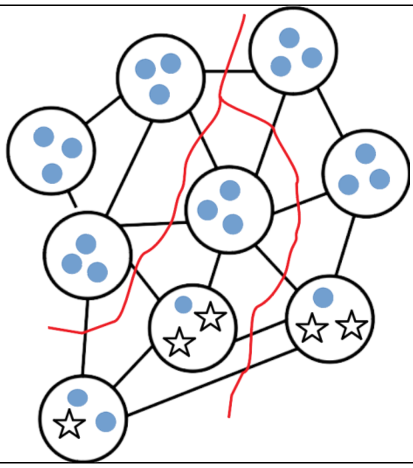
Objectif 3

De même, pour remporter trois circonscriptions, il faudrait que $C_1 \geq 9$.

Dans le cas où $C_1=9$, il faut que $A_1=6$ et $E_1=12$, répartis de façon homogène sur les trois circonscriptions. Cette situation est peu probable.

On peut se demander si, dans le cas où $C_1=3\times5=15$, la victoire est assurée pour les trois circonscriptions quelle que soit la répartition des voix. Pour cela, on peut évaluer en-dessous de combien de voix la victoire n'est plus assurée. Prenons comme couleur à faire gagner les ronds bleus. Les étoiles blanches représentent indistinctement des carrés verts ou des triangles rouges.

Avec $C_1=23$, on est sûr de gagner. En effet, comme il y a 27 voix sur l'ensemble du département, il ne reste plus que quatre voix laissées aux triangles rouges ou aux carrés verts. Même si ceux-ci sont regroupés dans une seule circonscription, il y aura dans cette circonscription cinq ronds bleus qui l'emportent obligatoirement. En revanche, si $C_1 \leq 22$, il se peut que dans une circonscription, il y ait cinq étoiles et seulement quatre ronds bleus, auquel cas la victoire dépend des valeurs de A_1 et de E_1.

C_1=23	C_1=22	Issue des élections
		Victoire certaine dans seulement deux circonscriptions (quelles que soient les valeurs de A_1 et E_1).
		Victoire dans les trois circonscriptions certaine.
Avec C_1=23, la victoire est certaines dans les trois circonscriptions, quelle que soit leur configuration.	Avec $C_1 \leq 22$, la victoire certaine dans les trois circonscriptions dépend de leur configuration.	

On remarque que pour C_1=22, il a fallu répartir les étoiles blanches dans plusieurs circonscriptions plutôt qu'une. Dans ce cas, il est préférable de gagner les circonscriptions avec une majorité moins large, mais de les gagner toutes. **On en déduit que lorsque C_1 est grand, il vaut mieux bien répartir les voix de notre couleur.** On peut préciser que cette stratégie s'applique surtout à partir de C_1=15 puisqu'il est alors possible d'essayer de mettre cinq voix de notre couleur dans chaque circonscription, et donc de les remporter assurément.

Lorsqu'on veut faire perdre une couleur adverse, on procédera à l'inverse avec ses propres voix : il faudra essayer de toutes les réunir dans une seule circonscription si elles sont nombreuses. Ainsi, elle gagnera cette circonscription à large majorité mais pourrait perdre les autres.

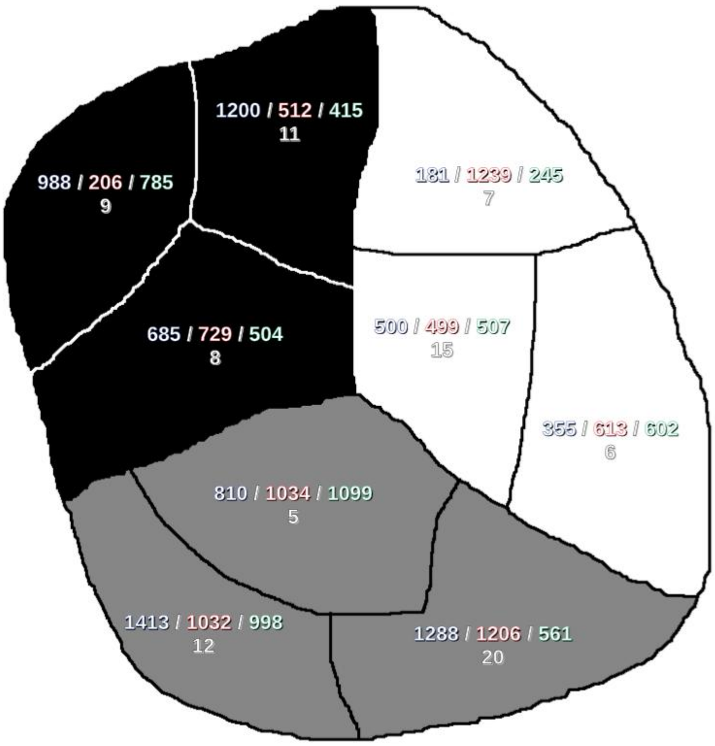
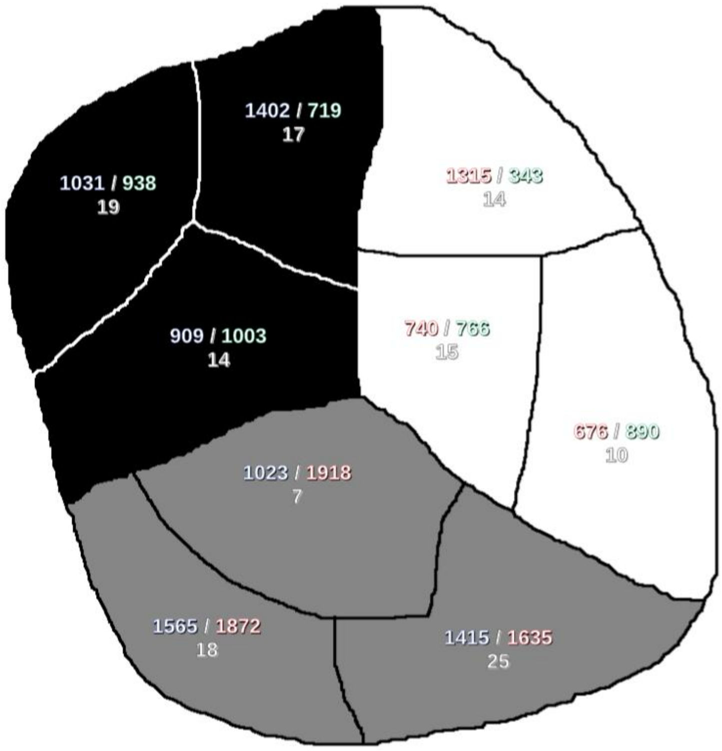
C – Conclusion

Il vaut mieux :

- Regrouper ses voix dans peu de circonscriptions lorsqu'on n'en a pas beaucoup sur l'ensemble du département. A l'inverse, les répartir de façon homogène quand on en a beaucoup (de façon à remporter un maximum de circonscriptions, mais avec peu d'avance).
- Faire accéder au second tour son parti Ennemi plutôt que le parti Allié.

III – Application du *Gerrymandering* dans un département imaginaire

A – Etude des résultats des élections de 2017 dans un département de Mathland

Tour 1	Tour 2
	

Voici un département du pays imaginaire Mathland. Ce département est découpé en 3 circonscriptions qui ont 3 cantons chacune.

En 2017, des élections législatives ont eu lieu à Mathland. Trois partis (les Bleus, les Rouges et les Verts) se sont présentés dans chaque circonscription. On considère que toute la population a voté et qu'il n'y a pas de vote nul. Les résultats de chaque commune de ce département sont écrits sur le schéma. Les voici regroupées sous tableaux par circonscription :

Circonscription 1 (noire)

	1$^{\text{er}}$ tour			**2$^{\text{ème}}$ tour**	
Parti	***Nombre de voix***	***Pourcentage des voix (arrondi à 2 chiffres significatifs)***	***Parti***	***Nombre de voix***	***Pourcentage des voix***
Bleu	988 + 1200 + 685 = 2873	47%	Bleu	1031 + 1402 + 909 = 3342	64%
Rouge	206 + 512 + 729 = 1477	24%			
Vert	785 + 415 + 504 = 1704	28%	Vert	938 + 719 + 1003 = 1820	35%
Blancs	9+11+8=28	0,46%	Blancs	19+17+14=50	1,00%

Circonscription 2 (blanche)

	1$^{\text{er}}$ tour			**2$^{\text{ème}}$ tour**	
Parti	***Nombre de voix***	***Pourcentage des voix (arrondi à 2 chiffres significatifs)***	***Parti***	***Nombre de voix***	***Pourcentage des voix***
Bleu	181 + 500 + 355 = 1036	22%			
Rouge	1239 + 499 + 613 = 2351	49%	Rouge	1315 + 740 + 676 = 2631	56%
Vert	245 + 507 + 602 = 1354	28%	Vert	343 + 766 + 890 = 1999	43%
Blancs	7+15+6=28	0,59%	Blancs	14+15+10 =39	0.84%

Circonscription 3 (grise)

	1$^{\text{er}}$ tour			**2$^{\text{ème}}$ tour**	
Parti	***Nombre de voix***	***Pourcentage des voix (arrondi à 2 chiffres significatifs)***	***Parti***	***Nombre de voix***	***Pourcentage des voix***
Bleu	810 + 1413 + 1288 = 3511	37%	Bleu	1023 + 1565 + 1415 = 4003	42%
Rouge	1034 + 1032 + 1206 = 3272	35%	Rouge	1918 + 1872 + 1635 = 5425	57%
Vert	1099 + 998 + 561 = 2658	28%			
Blancs	5 +12+20=37	0.39%	Blancs	7 + 18 + 25 = 50	0.53%

Le résultat des élections donne donc la victoire aux Rouges dans deux circonscriptions, et aux Bleus dans une circonscription. Notre but pourrait être de donner la victoire aux verts par exemple. Mais il faudrait savoir si cette victoire est possible. Observons quelle couleur a remporté le plus de voix sur les trois circonscriptions au premier tour :

	1er tour	
Parti	***Nombre de voix***	***Pourcentage des voix (arrondi à 2 chiffres significatifs)***
Bleu	2873 + 1036 + 3511 = 7420	36%
Rouge	1477 + 2351 + 3272 = 7100	35%
Vert	1704 + 1354 + 2658 = 5716	28%
Blancs	28 + 28 + 37 = 93	0.46%

On remarque que les Bleus ont eu le plus de voix, au total, alors que les Rouges ont remporté une circonscription de plus. La répartition des voix en circonscriptions a bien un impact sur le résultat des élections.

Nous essaierons donc de faire gagner les Bleus dans plus d'une circonscription.

Remarque : les difficultés supplémentaires, par rapport aux graphes de la partie II de cet article, sont que les effectifs de votants changent d'un canton à l'autre et que ces effectifs sont plus importants.

B – Création de matrices de coefficients de report

Dans la première partie de cet article, nous avons vu qu'une matrice de coefficients de reports de voix est spécifique à un espace défini et à une situation au second tour (Rouges vs Bleus OU Rouges vs Verts OU Bleus vs Verts)[1]. Mais comme les frontières des circonscriptions seront modifiées, nous ne ferons pas de matrice par circonscription, mais des matrices à l'échelle du département. De plus, notre objectif est de faire gagner les Bleus, sans se préoccuper des Rouges et des Verts. Lorsque les Bleus ne passent pas au second tour, nul besoin de matrice pour savoir qu'ils ne remporteront pas la circonscription. Nous ne ferons donc que deux matrices, à l'échelle du département :

- Pour un second tour « Rouges vs Bleus »
- Pour un second tour « Verts vs Bleus »

Problème : comment créer des matrices à l'échelle du département alors que les données sont à l'échelle des circonscriptions ?

1 Cf. p. 2-5

Nous considérerons que, dans tout le département, deux personnes qui ont voté pour la même couleur au premier tour et qui se trouvent face à la même situation de vote au second tour, voteront pour la même couleur au second tour. Par exemple, deux citoyens ont voté Bleu au premier tour, mais l'un est dans la circonscription grise et l'autre dans la blanche ; si, au deuxième tour, passe dans ces deux circonscriptions les Rouges et les Verts, tous deux voterons pour la même couleur. Nous pouvons alors créer nos matrices à partir des résultats des circonscriptions noire (second tour : Bleus vs Verts) et grise (second tour : Bleus vs Rouges).

Voici les deux matrices de coefficients de report de voix qui ont été créées, selon la méthode exposée en première partie :

CAS 1 : BLEUS ET VERTS S'AFFRONTENT AU SECOND TOUR.

De … → Vers … ↓	Bleu	Rouge	Vert	Blancs
Bleu	1	0,67	0	0,47
Rouge (éliminé)	0	0	0	0
Vert	0	0,28	1	0,47
Blancs	0	0,05	0	0,06

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,67 & 0 & 0,47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,28 & 1 & 0,47 \\ 0 & 0,05 & 0 & 0,06 \end{pmatrix}$$

Vérification par multiplication de la matrice des coefficients de report avec la matrice des résultats du premier tour dans la circonscription noire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,67 & 0 & 0,47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,28 & 1 & 0,47 \\ 0 & 0,05 & 0 & 0,06 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,47 \\ 0,24 \\ 0,28 \\ 0,0046 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,63 \\ 0 \\ 0,35 \\ 0,01 \end{pmatrix}$$

On obtient bien, à peu près, la matrice des résultats du second tour dans la circonscription noire (en rouge le résultat qui diffère de celui annoncé par la matrice de coefficients de reports des voix) :

$$\begin{pmatrix} {\color{red}0,64} \\ 0 \\ 0,35 \\ 0,01 \end{pmatrix}$$

CAS 2 : BLEUS ET ROUGES S'AFFRONTENT AU SECOND TOUR.

De … → Vers … ↓	Bleu	Rouge	Vert	Blancs
Bleu	1	0	0,17	0,47
Rouge	0	1	0,78	0,47
Vert (éliminé)	0	0	0	0
Blancs	0	0	0,05	0,06

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,17 & 0,47 \\ 0 & 1 & 0,78 & 0,47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0,06 \end{pmatrix}$$

Vérification par multiplication de la matrice des coefficients de report avec la matrice des résultats du premier tour dans la circonscription grise :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,1 & 0,47 \\ 0 & 1 & 0,7 & 0,47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,06 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,37 \\ 0,35 \\ 0,28 \\ 0,0039 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,57 \\ 0 \\ 0,01 \end{pmatrix}$$

On obtient bien, à peu près, la matrice des résultats du second tour dans la circonscription grise (en rouge le résultat qui diffère de celui annoncé par la matrice de coefficients de reports des voix) :

$$\begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,57 \\ 0 \\ 0,0053 \end{pmatrix}$$

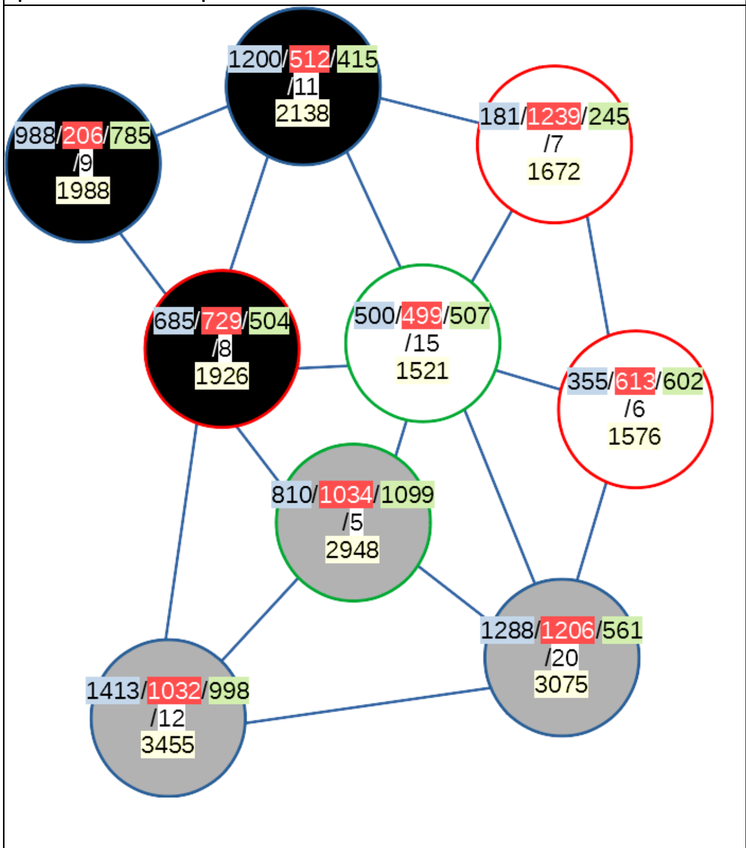
Le pourcentage de voix blanches (dernière ligne de la matrice) annoncé par la matrice de coefficients de report des voix est le double de celui réellement observé ; cependant, ce sont les résultats des partis qui sont les plus importants, et ceux-ci sont assez précis. Nous négligeons donc cette approximation.

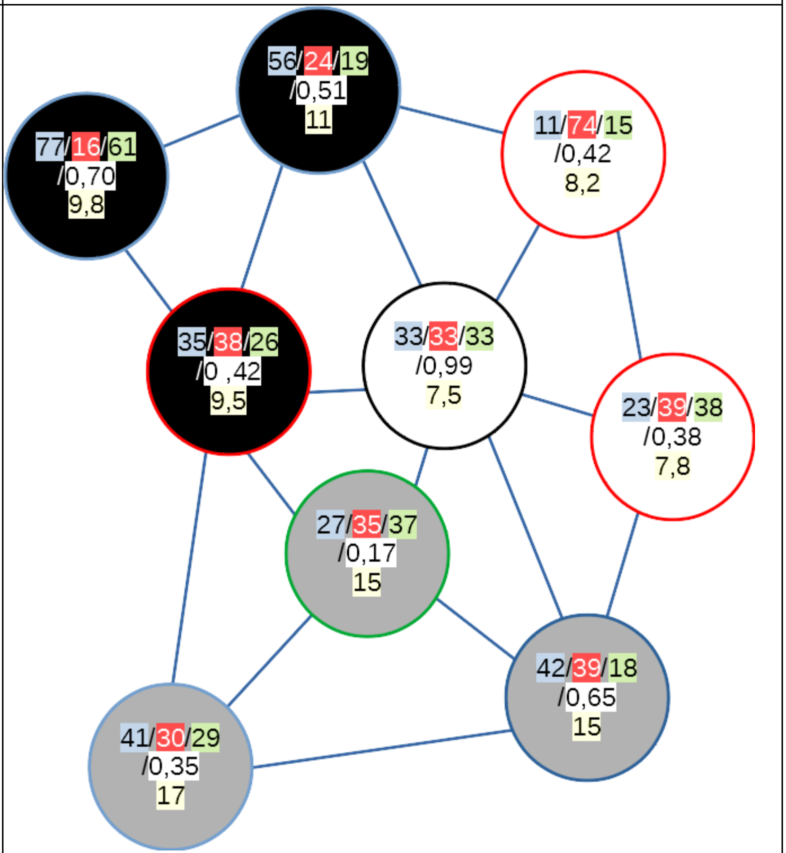
On observe que si les Verts sont éliminés au premier tour, ils votent massivement pour les Rouges au second tour : en reprenant les termes de la deuxième partie de l'article, les Verts sont les « ennemis » des Bleus. A l'inverse, lorsque les Rouges sont éliminés à l'issue du premier tour, ils se convertissent majoritairement en Bleus au second tour : les Rouges sont les « alliés » des Bleus.

C – Modifier les frontières des circonscriptions à son avantage

Voici notre département sous forme de graphe :

Effectifs : le nombre de personnes qui ont voté pour un parti dans un canton est surligné de la couleur du parti ; le nombre de votes blancs est surligné en blanc ; l’effectif total de chaque canton est surligné en jaune. Chaque canton est cerclé de la couleur du parti qui y a remporté le plus de voix au premier tour.	Pourcentages (chaque canton est cerclé de la couleur majoritaire dans ce canton ; est surligné en jaune le pourcentage de la population totale du canton par rapport à celle du département)





LEGENDE

Cercles blancs / noirs / gris : cantons appartenant à la circonscription blanche / noire / grise (respectivement)

Couleur de bordure des cercles :
Bleu / rouge / vert : canton où les Bleus / Rouges / Verts (respectivement) ont été majoritaires au premier tour.

Couleur de surlignage des nombres :
<u>Bleu / rouge / vert</u> : nombre de voix obtenues dans le canton au premier tour par les Bleus / Rouges / Verts (respectivement)
<u>Blanc</u> : nombre de votes blancs au premier tour dans le canton
<u>Jaune</u> : effectif total des votants dans le canton

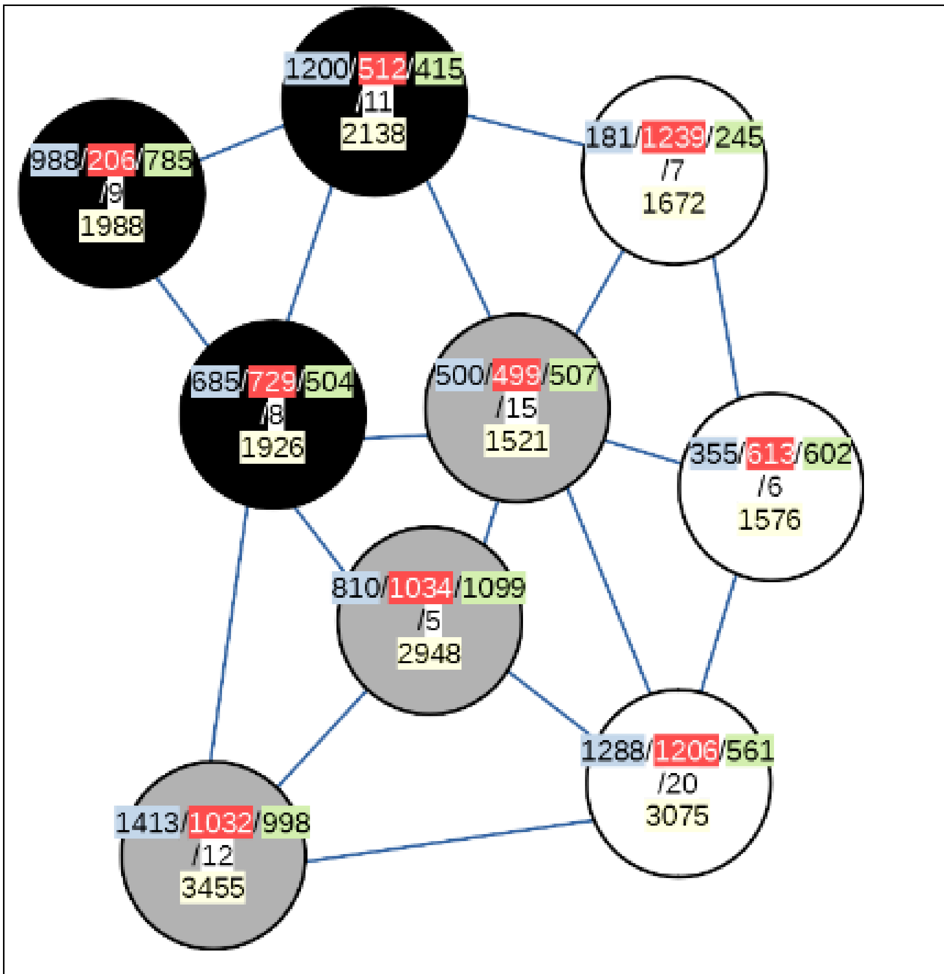
Arêtes : frontières communes entre deux cantons

Nous pouvons rappeler et noter que :

- Notre couleur (les Bleus) possède le plus de voix sur l'ensemble de la circonscription.[2] Or, lorsque notre couleur a beaucoup de voix, il vaut mieux les répartir équitablement mais de façon qu'elle gagne de peu les circonscriptions ; les voix de la couleur adverse la plus importante doivent être rassemblées dans une circonscription.[3] Nous essaierons donc de rassembler les voix Rouges et de mieux répartir les voix Bleues.
- De plus, les Rouges étant les « alliés » des Bleus et les Verts étant leurs « ennemis », il faudra privilégier un second tour qui oppose les Bleus et les Verts. Comme il y a peu de voix vertes, il vaut mieux les rassembler dans une circonscription.
- Les communes les plus peuplées vont bien sûr être celles dont les déplacements entre circonscriptions ont le plus d'impact sur les résultats.

Voici une configuration gagnante :

Les Bleus gagnent la noire et la grise, les rouges la blanche.



LEGENDE

Cercles blancs / noirs / gris : cantons appartenant à la circonscription blanche / noire / grise (respectivement)

Couleur de surlignage des nombres :
<u>Bleu / rouge / vert</u> : nombre de voix obtenues dans le canton au premier tour par les Bleus / Rouges / Verts (respectivement)
<u>Blanc</u> : nombre de votes blancs au premier tour dans le canton
<u>Jaune</u> : effectif total des votants dans le canton

Arêtes : frontières communes entre deux cantons

2 Cf. III A p. 14

3 Cf. II p. 11

D – Pour s'amuser : faire gagner les Verts dans une circonscription

1) Matrices

CAS 1 : BLEUS ET VERTS S'AFFRONTENT AU SECOND TOUR.

(On reprend la matrice précédente)

De … → Vers … ↓	Bleu	Rouge	Vert	Blancs
Bleu	1	0,65	0	0,47
Rouge (éliminé)	0	0	0	0
Vert	0	0,3	1	0,47
Blancs	0	0,05	0	0,06

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,65 & 0 & 0,47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 & 0,47 \\ 0 & 0,05 & 0 & 0,06 \end{pmatrix}$$

Les Rouges éliminés votent plus pour les Bleus que pour les Verts.

CAS 2 : ROUGES ET VERTS S'AFFRONTENT AU SECOND TOUR

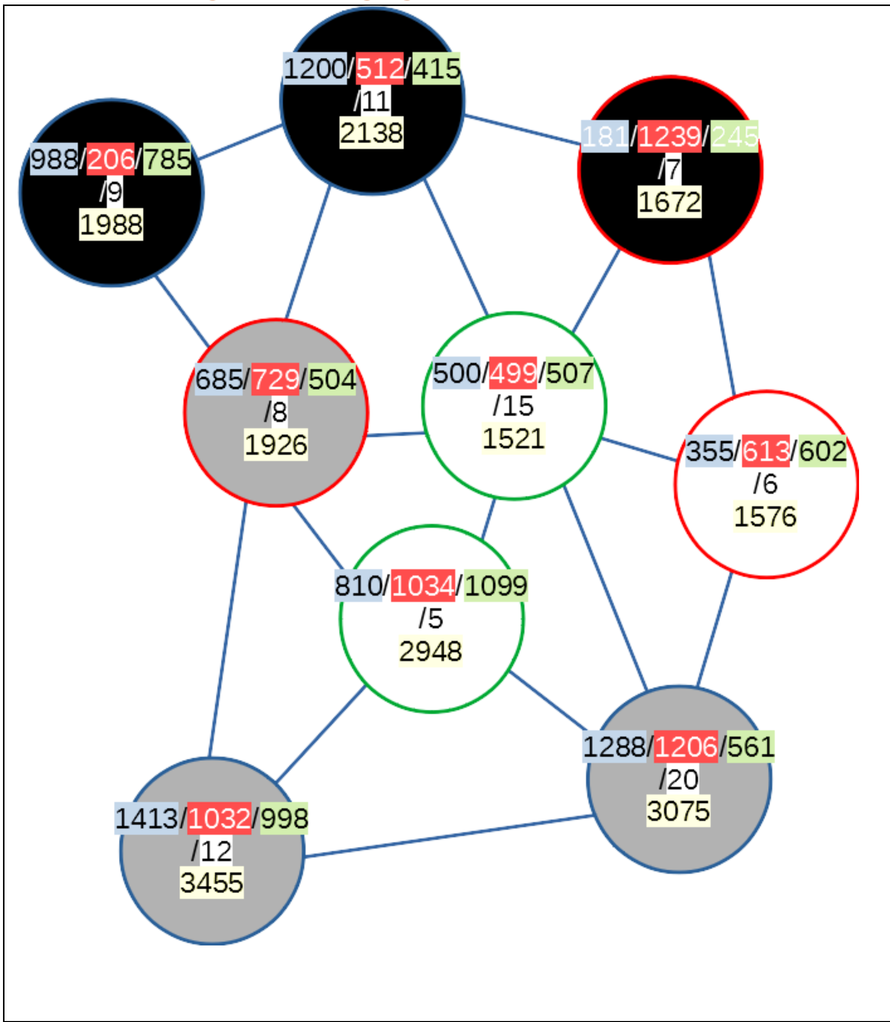
De … → Vers … ↓	Bleu	Rouge	Vert	Blancs
Bleu	0	0	0	0
Rouge	0,25	1	0	0,47
Vert	0,60	0	1	0,47
Blancs	0,15	0	0	0,06

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 1 & 0 & 0,47 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,47 \\ 0,15 & 0 & 0 & 0,06 \end{pmatrix}$$

Les Bleus éliminés votent plus pour les Verts que pour les Rouges.

On privilégiera donc un second tour qui oppose Rouges et Verts. De plus, ils ont peu de voix ; on cherchera donc à les regrouper.

2) Configuration gagnante



LEGENDE

Cercles blancs / noirs / gris : cantons appartenant à la circonscription blanche / noire / grise (respectivement)

Couleur de bordure des cercles : Bleu / rouge / vert : canton où les Bleus / Rouges / Verts (respectivement) ont été majoritaires au premier tour.

Couleur de surlignage des nombres :
Bleu / rouge / vert : nombre de voix obtenues dans le canton au premier tour par les Bleus / Rouges / Verts (respectivement)
Blanc : nombre de votes blancs au premier tour dans le canton
Jaune : effectif total des votants dans le canton

Arêtes : frontières communes entre deux cantons

Les Verts remportent la circonscription blanche. On remarque que les deux seuls cantons où ils avaient la majorité au premier tour (cerclés en vert) ont été rassemblés, et qu'ils sont assez nombreux dans le troisième canton de la circonscription créée.

Faire gagner les Verts dans une deuxième circonscription est compliqué car ils ont peu de voix.

Il aurait sans doute été bien que les circonscriptions ressemblent plus à celles d'origine : le truquage aurait sans doute été remarqué dans la vie réelle…

Conclusion

Si le *Gerrymandering* a d'abord été dénoncé aux Etats-Unis, il est aussi présent en France, parfois traduit par « charcutage électoral ». Un cas frappant est Metz en Moselle en 2010 : deux ensembles de bureaux de votes ont été interchangés sans équilibrer le poids démographique des circonscriptions correspondantes dont les frontières, alors rectilignes, devinrent incohérentes ; il a vite été remarqué qu'un député était avantagé.[4]

Le *Gerrymandering* est une pratique ancienne qui a déjà été étudiée en-dehors de cet article. Plusieurs conclusions auxquelles nous sommes parvenus, comme la manière de répartir ses voix en fonction de leur quantité, sont assez logiques et présentes sur Internet. L'intérêt de cet article est donc de leur donner sens à travers des modèles simplifiés et ludiques des élections.

Il aurait été intéressant d'appliquer les stratégies trouvées à de véritables élections, ou de créer un programme informatique qui détermine la configuration la plus avantageuse à notre parti en fonction du nombre et de la répartition des voix obtenues au premier tour. Ce programme aurait pu être « glouton », c'est-à-dire tester toutes les configurations possibles pour sélectionner la meilleure ; l'enjeu aurait alors été de le sophistiquer pour qu'il soit plus efficace et fasse un minimum de calculs inutiles. Intégrer au programme une dimension géométrique avec la répartition des voix aurait probablement été une des principales difficultés. Enfin, plutôt qu'avantager un parti ou un autre, essayer de créer des circonscriptions justes respectant la démographie et n'avantageant personne, constitue un beau défi.

Gardons à l'esprit que modifier les frontières électorales est nécessaire pour s'adapter aux fluctuations démographiques. Aucun système électoral n'est parfait (en élaborer un relève également des mathématiques) et le juste équilibre est difficile à trouver.

[4] Pour plus d'informations : https://www.senat.fr/leg/ppl17-339.html