Géométrie tropicale

Année 2008 - 2009

Nicolas CARRARA et Nikolas THETOT, élèves de troisième.

Professeurs de mathématiques : Emmanuel Auclair et Thomas Garcia.

Etablissement : Collège Fontreyne (Gap)

Chercheur : Stéphane Labbé (Université Joseph Fourier, Grenoble)

Présentation du sujet

Les *opérations tropicales* sont des opérations sur les nombres réels différentes de l'addition et de la multiplication classiques. Ces nouvelles opérations sont définies ainsi : si a et b sont deux nombres réels,

addition tropicale : $a \oplus b = min(a, b)$
multiplication tropicale : $a\,\hat{u}\ b = a + b$

Ici, $min(a;b)$ est le minimum entre a et b. Par exemple,

$$4\,\grave{u}\ 6 = min(4;6) = 4,$$

car 4 est le plus petit nombre entre 4 et 6.
La multiplication tropicale correspond à l'addition classique. Par exemple,

$$4\,\hat{u}\ 6 = 4 + 6 = 10.$$

Ces opérations ont été baptisées « tropicales » en l'honneur d'un mathématicien brésilien, Imre Simon.

Le but de notre travail a été dans un premier temps de trouver les propriétés de ces nouvelles opérations (commutativité, associativité, élément neutre, élément absorbant, …). Nous avons également répondu aux questions suivantes.
Existe-t-il une soustraction tropicale ? Une division tropicale ? Que représentent les puissances pour ces opérations ? Existe-t-il une racine carrée ?
On s'intéresse à toutes ces questions dans la partie I.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à la *géométrie tropicale* proprement dite, en définissant la notion de *droite tropicale.* En *géométrie classique*, une droite est un ensemble de points du plan vérifiant une équation linéaire(1), par exemple « y= a.x + b ». De même,

y = (a o x) ξ b

est une *équation linéaire tropicale*. On appelle *droite tropicale* l'ensemble des points du plan qui vérifient une équation linéaire tropicale(*). L'aspect de ces droites tropicales est différent d'une droite classique. On en a trouvé de trois sortes, suivant l'équation qu'elles vérifient. On étudie les propriétés de ces droites tropicales dans la partie II.

(*) Note des professeurs : La définition de droite tropicale utilisée ici diffère de celle utilisée par les mathématiciens qui s'intéressent à la question, trop complexe pour des élèves de troisième. Avec la définition originelle, une droite tropicale correspond aux points du plan où une fonction affine tropicale à deux variables n'est pas localement affine.

I. Propriétés des opérations tropicales

Dans cette partie, nous avons d'abord étudié les opérations tropicales. Puis nous avons cherché à savoir s'il existait une division et une soustraction tropicales, et quelles étaient leurs propriétés. Enfin, nous avons étudié les puissances tropicales et la racine carrée tropicale.

1) Propriétés de la multiplication tropicale.

Comme la multiplication tropicale correspond à l'addition classique, elle en a toutes les propriétés :

– *La multiplication tropicale est commutative* :

si a et b sont deux réels, alors a o b = b o a.

Par exemple, 3 o (-1) = 3 + (-1) = 2 = (-1) + 3 = (-1) o 3.

– *La multiplication tropicale est associative* :

si a, b et c sont trois réels, alors a o (b o c) = (a o b) o c.

Par exemple, 2 o (3 o 1,5) = 2 o 4,5 = 6,5 = 5 o 1,5 = (2 o 3) o 1,5.

– *La multiplication tropicale a 0 pour élément neutre* :

si a est un réel, alors a o 0 = a.

Par exemple, (-1,5) o 0 = -1,5 +0 = -1,5.

– *La multiplication tropicale ne possède pas d'élément absorbant :*

Il n'existe pas de réel A tel que, pour tout nombre b, A o b = A.

Pour la multiplication classique, 0 est un élément absorbant (0 X b = 0)

2) Propriétés de l'addition tropicale.

De même que pour la multiplication tropicale, nous avons cherché les propriétés de l'addition tropicale.

– *L'addition tropicale est commutative :*

si a et b sont deux réels, alors a ξ b = b ξ a.

Par exemple, 3 ξ 2 = min(3;2) = 2 = min(2;3) = 2 ξ 3.

L'addition tropicale est commutative car inverser les nombres ne change pas leur valeur. Le plus petit reste toujours le même.

– *L'addition tropicale est associative :*

si a, b et c sont trois réels, alors a ξ b ξ c) = (a ξ b) ξ c.

Par exemple, 2 ξ (1 ξ 4) = min(2;1;4) = 1 = (2 ξ 1) ξ 4.

L'addition tropicale est associative car changer l'ordre de calcul ne change pas la valeur des nombres. Le plus petit des trois reste toujours le même.

– *Élément neutre :*

Sur Ḥ (l'ensemble des réels), il n'y a pas d'élément neutre pour l'addition tropicale.

<u>*Preuve :*</u> On appelle N l'élément neutre de l'addition tropicale, s'il existe. Si a est un réel, comme

N ξ a = min(N;a) = a,

cela veut dire que a est plus petit que N. Donc il faudrait que N soit plus grand que tous les autres réels. Or c'est impossible, car les nombres réels peuvent être aussi grands que l'on veut. Donc N ne peut pas exister.

Sur Ḥ $^{-}$ (l'ensemble des réels négatifs ou nuls), l'élément neutre pour l'addition tropicale est 0.

Preuve : 0 est plus grand que tous les nombres négatifs, donc pour tout réel a négatif,

0 ξ a = min(0;a) = a.

Donc 0 est l'élément neutre pour l'addition tropicale si on ne prend que les réels négatifs.

– *Élément absorbant :*

Sur Ḥ (l'ensemble des réels), il n'y a pas d'élément absorbant pour l'addition tropicale.

<u>*Preuve :*</u> On appelle A l'élément absorbant de l'addition tropicale, s'il existe. Si a est un réel, comme

A ξ a = min(A;a) = A,

cela veut dire que A est plus petit que a. Donc il faudrait que A soit plus petit que tous les autres réels. Or c'est impossible, car les nombres réels peuvent être aussi petits que l'on veut. Donc A ne peut pas exister.

Sur Ḥ $^{+}$ (l'ensemble des réels positifs ou nuls), l'élément absorbant pour l'addition tropicale est 0.

Preuve : 0 est plus petit que tous les nombres positifs, donc pour tout réel a positif,

0 ξ a = min(0;a) = 0.

Donc 0 est élément absorbant pour l'addition tropicale si on ne prend que les réels positifs.

3) <u>*La division tropicale et ses propriétés.*</u>

Nous avons cherché à quoi correspond la division tropicale.
Puisque la division est l'opération réciproque de la multiplication, on en a déduit que la division tropicale correspond à l'opération réciproque de l'addition réelle.

Donc **la division tropicale correspond à la soustraction classique.**

a ǿ b = a – b

En particulier, la division tropicale a les propriétés de la soustraction :
La division tropicale n'est ni commutative, ni associative. Elle a pour élément neutre 0, et elle n'a pas d'élément absorbant.

4) La soustraction tropicale.

Nous avons cherché à quoi correspond la soustraction tropicale.
Nous avons donc cherché l'opération réciproque de l'addition tropicale. Pour trouver, nous nous sommes aidés avec des exemples:

$$6 \xi \ 2 = 2$$
$$13 \xi \ 2 = 2$$
$$44 \xi \ 2 = 2$$
$$3856 \xi \ 2 = 2$$

Toutes ces opérations donnent le même résultat, donc une image (le résultat 2) a plusieurs antécédents (6 ; 13 ; 44 ; 3856 ; ...). Donc si la soustraction tropicale existait, on aurait :

$$2 \xi \ 2 = 6$$
$$2 \xi \ 2 = 13$$
$$2 \xi \ 2 = 44$$
$$\text{et } 2 \xi \ 2 = 3856$$

Tous ces nombres devraient être égaux, ce qui n'est pas vrai. Il est impossible de retrouver le bon antécédent en une seule et même opération.

Donc **la soustraction tropicale n'existe pas.**(2)

5) Puissances tropicales.

Nous avons cherché à quoi correspondent les puissances tropicales.
Une puissance *classique* multiplie un nombre par lui-même autant de fois que la valeur de l'exposant l'indique.

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \ \text{(n fois)}.$$

Puisque la géométrie tropicale transforme la multiplication en addition, pour obtenir la *puissance tropicale*, on ajoute le nombre à lui-même autant de fois que la valeur de l'exposant l'indique. Ajouter plusieurs fois un nombre à lui-même revient à multiplier ce nombre par le nombre de fois qu'il est ajouté.

$$a^{o\,n} = a \text{ o } a \text{ o } \dots \text{ o } a = a + a + \dots + a = n.a$$

Donc **les puissances tropicales correspondent à la multiplication par un entier**.

6) Racines carrées et racines énièmes.

On s'est ensuite demandé à quoi correspondent les racines n-ièmes tropicales.
La racine est l'opération réciproque de la puissance. Donc la racine n-ième tropicale correspond à l'opération réciproque de la multiplication par n.

Donc **la racine n-ième tropicale correspond donc à la division par n**. En particulier, **la racine carrée tropicale correspond à la division par 2**.

II. Droites tropicales.

On définit maintenant ce que l'on appelle des *droites tropicales*.
En *géométrie classique*, les droites sont des courbes du plan qui vérifient une *équation linéaire*(1) comme

$$y = a.x + b,$$
$$a.x + b.y = c$$
$$\text{ou } x = a.y + b,$$

où a, b et c sont des réels.
En *géométrie tropicale,* on dira que les courbes du plan qui vérifient des *équations linéaires tropicales* comme

$$y = (ao\ x)\ \xi\ \ b,$$
$$(ao\ x)\ \xi\ \ (bo\ y) = c,$$
$$\text{et } x = (ao\ y)\xi\ b$$

sont des *droites tropicales*.
Dans cette partie, on étudie ces courbes, puis on s'intéresse à des problèmes d'alignement en géométrie tropicale.

1) *Étude des courbes d'équation $y=(ao\ x)\xi\ b$ (droites de type 1).*

a) Cas particulier (a=5, b=2).

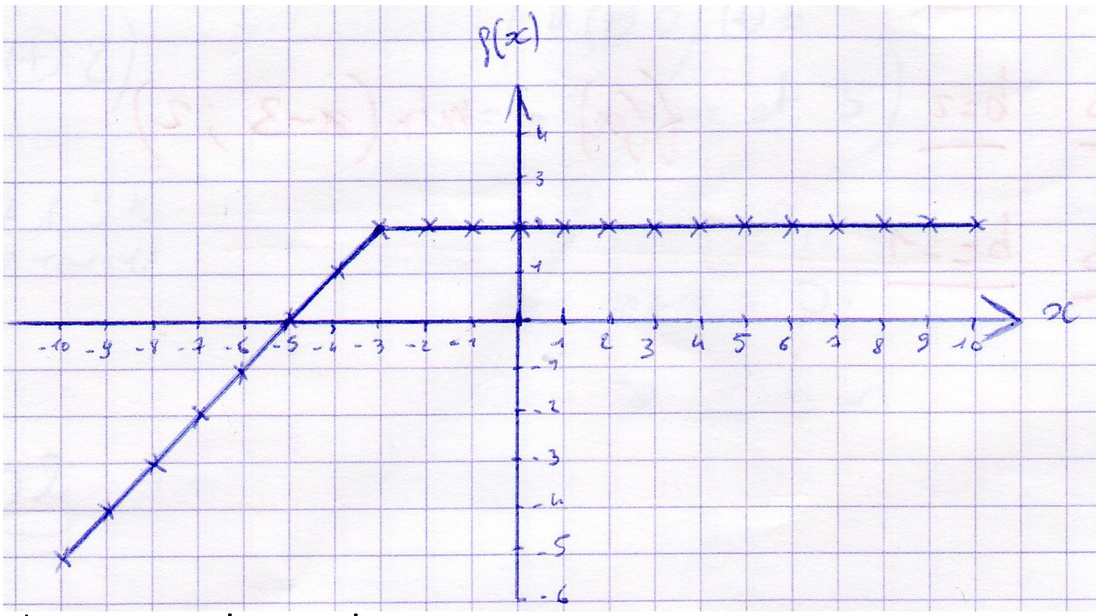
Nous commençons par un exemple avec a=5, et b=2. Nous traçons la courbe de la fonction f définie par:

$$f(x)=(5o\ x)\xi\ 2=min(5+x\ ;\ 2)$$

On obtient le tableau de valeur suivants:

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

On trace ensuite la courbe correspondante:



On s'aperçoit que **notre courbe est en deux morceaux**.

– Dans un premier temps, la courbe monte. On a une **demi-droite de pente 1.**
– Puis, la courbe se met à stagner. On a une **demi-droite horizontale**.

Le **premier morceau** correspond aux valeurs de x pour lesquelles

5+x ≤ 2, c'est-à-dire **x ≤ -3**.

Alors f(x)=5+x, et f(x) augmente donc avec x.

Le **deuxième morceau** correspond aux valeurs de x pour lesquelles

5+x ≥ 2, c'est-à-dire **x ≥ -3**.

Alors f(x)=2, et donc f(x) stagne.(3)

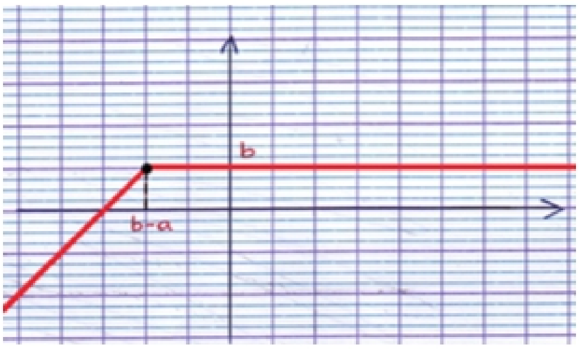
Le **point de liaison** entre les deux morceaux a pour coordonnées (-3;2).

b) Cas général.

Nous traçons maintenant la courbe de la fonction f définie par

f(x)=(ao x)ξ b=min(a+x ; b), où a et b sont deux réels fixés.

On obtient une courbe qui ressemble à la précédente:



On obtient encore une courbe en **deux morceaux** :

- d'abord une **demi-droite de pente 1**, qui correspond aux valeurs de x pour lesquelles

  a+x ≤ b, c'est-à-dire x ≤ b-a .

  En effet, on a alors f(x) = a+x, donc f(x) augmente comme x.
- puis une **demi-droite horizontale**, qui correspond aux valeurs de x pour lesquelles

  a+x ≥ b, c'est-à-dire x ≥ b-a .

  En effet, on a alors f(x) = b, donc f(x) stagne.

Le **point de liaison** entre les deux morceaux a cette fois pour coordonnées (b-a;b).

Dans la suite, une droite tropicale qui vérifie une équation du type

y = (ao x) ξ b

s'appellera une ***droite tropicale de type 1****.*

2) *Étude des courbes d'équation y=(ao x)ξ (bo x)=c (droites de type 2).*

On étudie un autre type de droite tropicale, celles d'équation

(ao x)ξ (bo x) = c, c'est-à-dire min(a+x ; b+y)=c

On obtient alors deux cas, suivant que a+x est plus petit ou plus grand que b+y.

- **1er cas : a+x≤b+y.**

Alors min(a+x ; b+y) = a+x =c par l'équation, et b+y≥c.

Donc **x = c-a** et **y≥c-b**.

On obtient une demi-droite verticale d'abscisse égale à c-a.

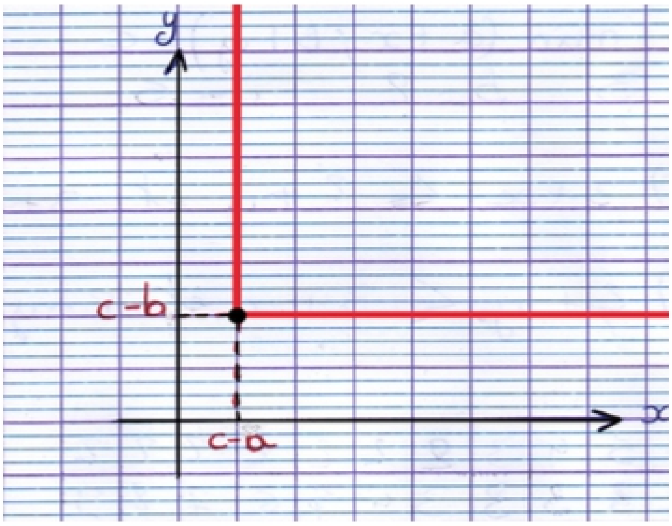
– **2ème cas : b+y≤ a+x.**

Alors min(a+x ; b+y) = b+y = c, et a+x≥c.

Donc **y=c-b** et **x≥ c-a**.

On obtient une demi-droite horizontale d'ordonnée égale à c-b.

On trace la courbe correspondante:



C'est une courbe en deux morceaux :

- une **demi-droite verticale** (**x = c-a** et **y ≥ c-b**).
- une **demi-droite horizontale** (**y=c-b** et **x ≥ c-a**).

Le **point de liaison** a pour coordonnées (c-a ; c-b).

Dans la suite, une droite tropicale qui vérifie une équation du type

(ao x) ξ (bo y) = c

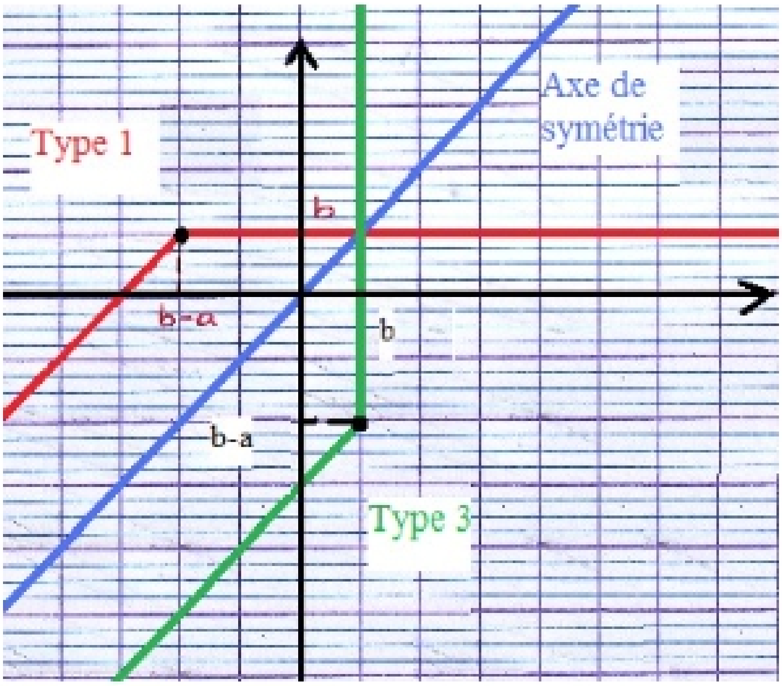
*s'appellera une **droite tropicale de type 2**.*

3) *<u>Étude des courbes d'équation x=(ao y)ξ b (droites de type 3).</u>*

On étudie maintenant les droites d'équation

x=(a*o* y)*ξ* b=min(a+y;b).

Ces droites ressemblent aux droites de type 1, sauf que les x et les y sont changés. Les droites de type 3 sont obtenues à partir de celles de type 1 en faisant une symétrie par rapport à l'axe d'équation x=y, car cette symétrie permute les x et les y.



On obtient donc encore une courbe en **deux morceaux**:
- une **demi-droite de pente 1** (symétrique de la droite de pente 1).
  - une **demi-droite verticale** (symétrique de la droite horizontale).

Le **point de liaison** a pour coordonnées (b;b-a). (on inverse les coordonnées du point de liaison pour la droite de type 1).

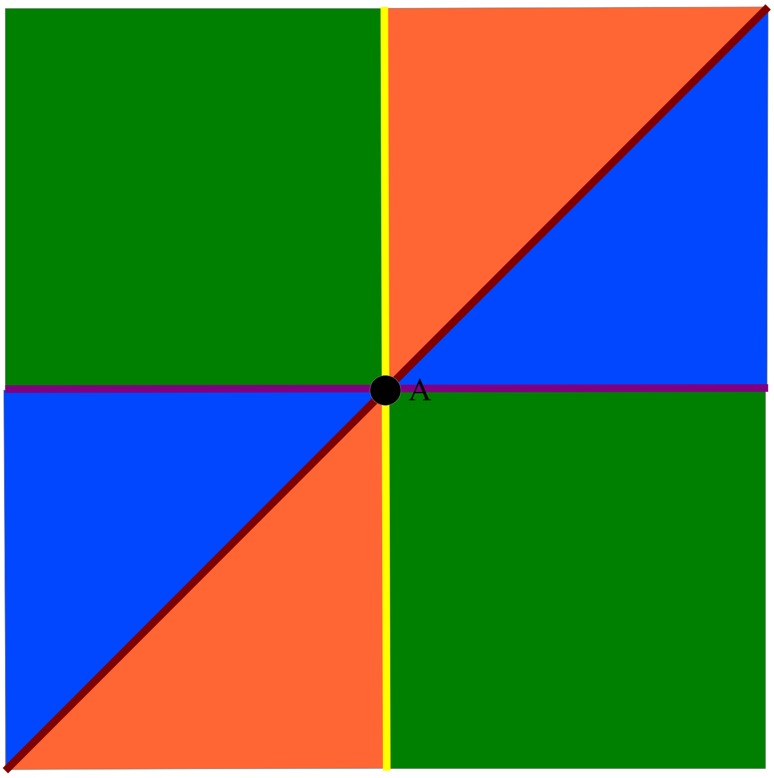
4) Problème d'alignement.

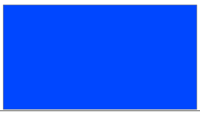
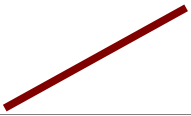
En géométrie classique, deux points sont toujours alignés, et il existe une seule droite qui passe par ces deux points. Nous avons voulu vérifier si cela était toujours vrai en géométrie tropicale.

Nous sommes partis d'un point du plan, A. Et nous nous sommes demandés où il fallait placer un point B pour qu'il passe une droite de type 1 par A et par B. Nous nous sommes aperçus que cela ne marchait pas avec tous les points du plan (par exemple, si B est en-dessous de A, il n'y en a pas).
Nous avons continué en déterminant quels étaient les points B pour lesquels il passait une droite de type 2 par A et par B, et ainsi de suite.

Nous avons fini par établir un plan des zones où il faut placer B pour que les deux points A et B soient alignés (voir plus loin).

On s'aperçoit alors que **deux points du plan tropical sont toujours alignés** (il existe une droite tropicale de type 1, 2 ou 3 qui passe par ces deux points). Mais **la droite qui passe par ces deux points, n'est pas forcément unique.**



Couleurs	Zones
	Si le point B se trouve dans cette zone, il n'existe qu'une droite tropicale de type 1 qui relie les points A et B
	Si le point B se trouve dans cette zone, il n'existe qu'une droite tropicale de type 2 qui relie les points A et B
	Si le point B se trouve dans cette zone, il n'existe qu'une droite tropicale de type 3 qui relie les points A et B
	Si le point B se trouve sur cette droite, il existe une infinité de droite tropicales de type 1 ou de type 3 qui relient les points A et B
	Si le point B se trouve sur cette droite, il existe une infinité de droite tropicales de type 1 ou de type 2 qui relient les points A et B
	Si le point B se trouve sur cette droite, il existe une infinité de droite tropicales de type 2 ou de type 3 qui relient les points A et B

Notes d'édition

(1) y=ax+b n'est pas une équation linéaire mais une équation affine mais une équation affine ; y=ax est linéaire. Une droite tropicale est donc définie par une équation affine tropicale y = (a o x) ξ b

(2) Division et soustraction ne sont pas les « opérations réciproques de la multiplication et de l'addition » : par exemple, « diviser par 2 » (dans le cas habituel) c'est multiplier par l'inverse x de 2, qui vérifie x.2=1, où 1 est l'élément neutre de la multiplication habituelle (x=1/2). Comme l'addition tropicale n 'a pas d'élément neutre, on ne peut parler d'inverse (ou d'opposé) : il n'y a donc pas de « soustraction » tropicale.

(3) Les mathématiciens disent que « f est constante pour x≥3 ».