GEOMETRIE TROPICALE

Atelier MATh.en.JEANS dans le cadre de l'A.P. De terminale du Lycée Stendhal de Milan
Année scolaire 2012 – 2013

<u>Elèves participant à l'atelier</u> :
Mila Ajam *– TS;*
Elena Lorenzo *– TES;*
Francesca Michaud *– TS;*
Antonio Di Biase *– TS;*
Edme Gaulle *– TES;*
Daniel Hauer *– TS ;*
Mathis Lamarre *– TS ;*
Tsubasa Miyata *– TS ;*
Marouane Ouadoudy *– TS ;*
Bamba Sourang *– TES;*
Quentin Thibault *– TS.*

<u>Professeur – Chercheur intervenant</u> :
M. Olivier Birembaux
de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis

<u>Professeur Animateur</u> :
M. Dominique de Luca
du Lycée Stendhal de Milan

Ont participé au congrès Math.en.JEANS d'ORSAY 2013 :

Elena Lorenzo, Edme Gaulle, Daniel Hauer, Mathis Lamarre, Tsubasa Miyata, Marouane Ouadoudy, Quentin Thibault, Olivier Birembaux et Dominique de Luca, et à titre exceptionnel : Monia Bendaou, TS et Jean-François Gauthier, Professeur au Lycée Stendhal,

Ont participé au congrès Math.en.JEANS de MILAN 2013 :

Francesca Michaud, Tsubasa Miyata, Marouane Ouadoudy, Quentin Thibault et Dominique de Luca, et à titre exceptionnel : Alice Marini, TS et Jean-François Gauthier,

TABLE DES MATIERES

Résumé

I) Sujet :

1) Commençons par un exemple : prenons l'équation x – y = 0.
Résoudre cette équation signifie trouver tous les couples (x ; y) pour lesquels effectivement x – y = 0. Par exemple, dans le cas classique, (1;1) est une solution car 1 - 1 = 0.
Il y a une infinité de solutions.
On peut représenter toutes les solutions sur un diagramme : à chaque fois que l'on a une solution (x ; y), on place un point M dans un repère, d'abscisse x, et d'ordonnée y. Si on effectue ce procédé pour toutes les solutions, on obtient la droite d'équation y=x.

2) Et si on redéfinissait les opérations algébriques connues, que deviendraient ces équations? Et les ensembles de points qu'elles définissent ?
En géométrie tropicale, on définit :
- la somme tropicale de deux nombres est leur minimum. On note cette addition ⊕. Par exemple, 5 ⊕ 2 = 2 car le plus petit nombre entre 5 et 2 est 2.

$$a \oplus b = \min(a\ ;\ b)$$

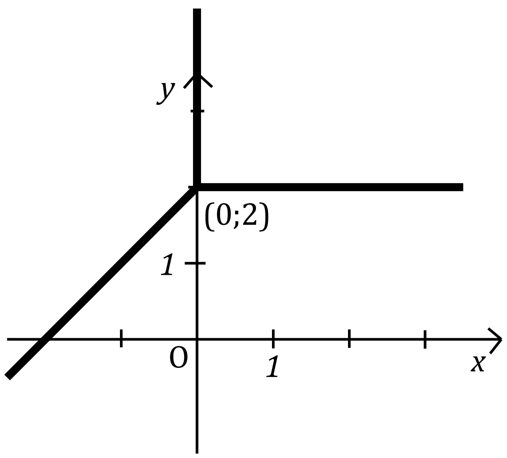
- la multiplication tropicale de deux nombres est leur somme classique. On note ⊗ cette multiplication. Par exemple, 5 ⊗ 2 = 7 car 5 + 2 = 7.

$$a \otimes b = a + b$$

3) Pour définir une droite tropicale, on part d'une expression du genre x – y + 1, puis on la “tropicalise”, c'est-à-dire que l'on remplace dans l'expression les opérations classiques par leurs analogues tropicaux, soit x = 1⊗x et -y = -1⊗y, on remplace x – y + 1 par 1⊗x ⊕ -1⊗y ⊕ 1 c'est-à-dire par min(1+x ; -1+y ; 1).
Une fois que l'on a l'expression tropicalisée, on place tous les points M(x ; y) en lesquels le minimum est atteint au moins deux fois, c'est-a-dire, pour notre exemple :

1+x = -1+y ET 1+x ⩽ 1 OU 1+x = 1 ET 1 ⩽ -1+y OU -1+y = 1 ET 1 ⩽ 1+x

Si on place les points solutions du problème ci-dessus, on obtient la “droite tropicale” :



4) Problématique :
-) Les opérations tropicales peuvent elles définir une vraie addition et une vraie multiplication?

-) Comment calculer avec les opérations tropicales?
-) A quoi ressemble une droite tropicale?

II) Principaux résultats :
1) Inexistance de la soustraction tropicale.
2) Création de l'ensemble des nombres tropicaux pour que l'addition tropicale soit une loi de composition interne associative et commutative admettant un élément neutre et que la multiplication tropicale soit une loi de composition interne associative, commutative, admettant un élément neutre et un élément absorbant, distributive par rapport à l'addition tropicale.
3) Autres “opérations” tropicales : division, puissances, racine carrée et racines n-ièmes.
4) Identités remarquables dans les nombres tropicaux.
5) Résolution de l'équation ax + b = cx + d dans les nombres tropicaux.

A ce stade de la recherche, le groupe de travail MATh.en.JEANS de Milan s'est posé la question : pourquoi une équation de droite dans les réels ne correspond pas à une droite tropicale. Quel est le sens à donner à la définition de la droite tropicale donnée dans le sujet ? Deux séries de résultats en découlent :
6) Représentation de fonctions usuelles tropicalisées (linéaires, affines, trionome de degré 2 et les deux cas possibles).
7) Droite tropicale, sens donné à sa définition.

Le groupe a ensuite travaillé sur les points suivants : cas d'intersection des droites tropicales et représentation des quadriques. Malheureusement, par manque de temps, seuls quelques exemples ont été traités et aucun résultat plus général n'a été rédigé.

GEOMETRIE TROPICALE

Préambule

On définit les opérations tropicales par :

Addition : on définit la somme tropicale de 2 nombres comme l'opération qui à ces 2 nombres associe leur minimum. On la note ⊕ . On a pour tout réel a et b : a ⊕ b = min(a;b).
Par exemple, 3 ⊕ 7 = 3 et -5 ⊕ 2 = -5,

Multiplication : on définit le produit tropical de 2 nombres comme l'opération qui à ces 2 nombres associe leur somme (classique). On la note ⊗ . On a pour tout réel a et b : a ⊗ b = a + b
Par exemple, 3 ⊗ 7 = 10 et -5 ⊗ 2 = -3

Comme le présentait le sujet, la multiplication tropicale est prioritaire par rapport à l'addition tropicale :

Exemple : 1 ⊗ x ⊕ -1 ⊗ y = min(1 + x ; -1 + y) et non 1 + min(x ; -1) + y .

Inutilité des tables
Pour effectuer ces opérations est-il intéressant d'utiliser des tables comme pour l'addition et la multiplication classique ?

a) Table d'addition tropicale

⊕	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
6	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6
7	1	2	3	4	5	6	7	7	7	7
8	1	2	3	4	5	6	7	8	8	8
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

17 ⊕ 23= min(17 ; 23) = 1

Or, si tout se passait comme dans le contexte classique, on obtiendrait avec les tables :

23
⊕17 avec b=3 ⊕ 7= min(3 ; 7) = 3
ab a=1 ⊕ 2= min(1 ; 2) = 1

23
Soit ⊕<u>17</u>, ce qui est faux. Donc les tables d'addition tropicales sont inutiles.
13

<u>b) Table de multiplication tropicale</u>

⊗	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

16 ⊗ 23 = 16 + 23 = 39

Or, si tout se passait comme dans le contexte classique, on obtiendrait avec les tables ;

16
<u>⊗23</u>
49
<u>⊕380</u>
040, ce qui est faux.

Donc les tables de multiplication tropicales *sont inutiles.*

Inexistence de la soustraction tropicale

<u>Exemple</u> : 2 *⊕ 7 = 2 donc on aurait 7 = 2 ⊖ 2 et 2 ⊕ 5 = 2 donc on aurait aussi 5 = 2 ⊖ 2 . Lequel de 5 et de 7 correspondrait à 2 ⊖ 2 ?*

<u>Démonstration :</u>
Pour tous réels a, b et c, avec a < b < c (démonstration semblable dans les autres cas de relation d'ordre entre a, b et c) :
a ⊕ b = a donc a ⊖ a = b
a ⊕ c= a donc a ⊖ a = c

Donc a ⊖ a admet une infinité de valeurs possibles.

Or une opération ne doit admettre qu'une seule solution.

Donc la soustraction tropicale n'existe pas.

I) Ensemble ₸

1) Addition

a) Loi de composition interne :
Pour tous réels a et b avec a < b
$a \oplus b = a$ et a est un réel.
Donc l'addition tropicale est une loi de composition interne à l'ensemble des réels.

b) Associativité :
Pour tous réels a, b et c tels que $a < b < c$ (même type de démonstration dans les autres cas de relation d'ordre entre a, b et c) :
i) $(a \oplus b) \oplus c = \min(\min(a ; b) ; c) = \min(a ; c) = a$
ii) $a \oplus (b \oplus c) = \min(a ; \min(b ; c)) = \min (a ; b) = a$

de i) et de ii) on a : $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$, donc l'addition tropicale est associative.

c) Commutativité :
Pour tous réels a et b avec a < b
i) $a \oplus b = \min(a ; b) = a$
ii) $b \oplus a = \min(b ; a) = a$
de i) et de ii) on a : $a \oplus b = b \oplus a$, donc l'addition tropicale est commutative.

d) Élément neutre :
Pour tout réel a, existe-t-il un élément x tel que $a \oplus x = a$?
Or $a \oplus x = \min(a ; x)$. Posons $+\infty$ cet élément. On a bien, pour tout réel a, $\min(a ; +\infty) = a$, Donc $a \oplus +\infty = a$
Or $+\infty$ n'est pas un réel.
Pour que l'addition tropicale soit une loi de composition interne et admette un élément neutre, on doit créer un nouvel ensemble ₸ tel que ₸ = $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, que l'on appellera ensemble des nombres tropicaux.

Dans ₸ l'addition tropicale est une loi de composition interne associative et commutative admettant un élément neutre.

Par la suite, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, soit $\mathbb{R}$ = ₸ $\setminus\{+\infty\}$.

2) Multiplication

Par définition, pour tous réels a et b : $a \otimes b = a + b$

Or, l'addition « classique » est une loi de composition interne associative, commutative admettant un élément neutre 0.

De plus, par convention, pour tout a ∈ ₸ posons $a \otimes +\infty = a + +\infty = +\infty$,
L'élément neutre de l'addition devient alors l'élément absorbant de la multiplication dans ₸ (c'est-à-dire que pour tout a ∈ ₸, $a \otimes +\infty = +\infty$).

Dans ₸, la multiplication tropicale est une loi de composition interne associative, commutative, admettant un élément neutre 0 et un élément absorbant $+\infty$.

Remarque : il en va de meme dans les réels : O. l'élément neutre de l'addition est l'élément absorbant de la multiplication.

3) Distributivité

a, b et c désignent 3 éléments de $\overline{\mathbb{T}}$ tels que a < b.
i) $c \otimes (a \oplus b) = c + \min(a\ ;\ b) = c + a$
ii) $c \otimes a \oplus c \otimes b = \min(c + a\ ;\ c + b) = c + a$
de i) et de ii) on a : $c \otimes (a \oplus b) = c \otimes a \oplus c \otimes b$

Dans $\overline{\mathbb{T}}$, la multiplication tropicale est distributive par rapport à l'addition tropicale.

II) Autres opérations dans $\overline{\mathbb{T}}$

1) Division tropicale :

a) Définir l'inverse : ($x \in \mathbb{R}$)

$x \otimes \mathrm{inv}(x)$= élément neutre de la loi $\otimes$
$x \otimes \mathrm{inv}(x) = 0$
$x + \mathrm{inv}(x) = 0$
$\mathrm{inv}(x) = -x$ (-x désignant l'opposé de x dans $\mathbb{R}$)

Dans $\overline{\mathbb{T}}$, tout élément x de $\mathbb{R}$ admet un unique inverse que l'on note -x.
$+\infty$ n'admet pas d'inverse.

Remarque : il en va de meme dans les réels : o, l'élément absorbant de la multiplication est le seul réel à ne pas admettre d'inverse.

b) a et b désignent deux réels . Notons $\oslash$ la division dans $\overline{\mathbb{T}}$. Par définition, on a :
$a \oslash b = a \otimes \mathrm{inv}(b)$
$a \oslash b = a + (-b)$
Par définition $+\infty \oslash b = +\infty$,
Propriété:
***pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$**, on a :* **$a \oslash b = a - b$; et**
$+\infty \oslash b = +\infty$,

2) Puissance tropicale :

a $\in \mathbb{R}$ et n désigne un entier naturel.
Notons $a^{\odot n}$ la n-ième puissance de a dans $\overline{\mathbb{T}}$.

$$a^{\odot n} = \underbrace{a \otimes a \otimes a \otimes \ldots \otimes a}_{n\ facteurs} = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n\ termes} = n \times a.$$

Remarque : pour $n \neq 0$, $+\infty^{\odot n} = +\infty$.
Par définition, $0^{\odot n} = 0$. (Similitude avec l'ensemble des réels, où $1^n = 1$).
Propriété:
***pour tout $a \in \mathbb{R}$ et n étant un entier naturel**, on a :* **$a^{\odot n} = n \times a$; et pour $n \neq 0$, $+\infty^{\odot n} = +\infty$**
Par exemple, $7^{\odot 5} = 5 \times 7 = 35$,

3) Identités remarquables tropicales :

a) a et b sont deux éléments de $\overline{T}$.

i) $(a \oplus b)\triangledown^{2} = (a \oplus b) \otimes (a \oplus b)$
$= (a \oplus b) + (a \oplus b)$
$= \min(a\ ;\ b) + \min(a\ ;\ b)$
$= 2\min(a\ ;\ b)$

ii) $a\triangledown^{2} \oplus b\triangledown^{2} = \min(2a\ ;\ 2b) = 2\min(a\ ;\ b)$.

de i) et de ii) on a : $(a \oplus b)\triangledown^{2} = a\triangledown^{2} \oplus b\triangledown^{2}$

b) k désigne un entier tel que $k \geq 1$. Supposons que $(a \oplus b)\triangledown^{k} = a\triangledown^{k} \oplus b\triangledown^{k}$.

i) $(a \oplus b)\triangledown^{k+1} = (a \oplus b)\triangledown^{k} \otimes (a \oplus b)$
$= (a\triangledown^{k} \oplus b\triangledown^{k}) \otimes (a \oplus b)$
$= \min(ka\ ;\ kb) + \min(a\ ;\ b)$
$= k\min(a\ ;\ b) + \min(a\ ;\ b)$
$= (k+1)\min(a\ ;\ b)$

ii) $a\triangledown^{k+1} \oplus b\triangledown^{k+1} = \min((k+1)a\ ;\ ((k+1)b) = (k+1)\min(a\ ;\ b)$

de i) et de ii) on a : $(a \oplus b)\triangledown^{k+1} = a\triangledown^{k+1} \oplus b\triangledown^{k+1}$.

La propriété est donc héréditaire.

c) En conclusion, d'après le théorème de raisonnement par récurrence, ***pour tout entier n ≥1, et pour tout nombre tropical a et b, on a :***

$$(a \oplus b)\triangledown^{n} = a\triangledown^{n} \oplus b\triangledown^{n}$$

d) Cas particulier : a et b étant 2 réels, $(a \oplus b)\triangledown^{0} = 0$,

e) Exemple :

$(3 \oplus 6)\triangledown^{4} = 3\triangledown^{4} \oplus 6\triangledown^{4} = 4x3 \oplus 4x6 = \min(12\ ;\ 24) = 12$.

4) Racine carrée et racine n-ième tropicales :

a) Définition :

On appelle la racine carrée tropicale d'un nombre tropical x, l'unique nombre noté ┼x qui multiplié par lui même tropicalement donne x.

Soit a ce nombre, on a alors

$a \otimes a = x$

$a + a = x$

$2a = x$

Soit $a = 0{,}5x$

Par convention, ┼$+\infty = +\infty$.

b) Propriété : ***pour tout réel x, ┼x = 0,5x et ┼+∞ = +∞.***

Par exemple, ┼$24 = 12$.

c) Définition :

n désigne un entier naturel. On appelle la racine n-ième tropicale d'un nombre tropical x, le nombre noté n┼x qui multiplié tropicalement par lui même n fois donne x.

Soit a ce nombre, on a alors

$$\underbrace{a \otimes a \otimes a \otimes \ldots \otimes a}_{n\ facteurs} = x$$

$$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n\ termes} = x$$

$na = x$

soit a = $\frac{1}{n}$ *x où* $\frac{1}{n}$ *désigne l'inverse « classique » du nombre n.*
Par convention, n┼+∞ = +∞.

<u>d) Propriété</u> : ***pour tout réel x, n┼x =*** $\frac{1}{n}$ ***x et n┼+∞ = +∞****.*

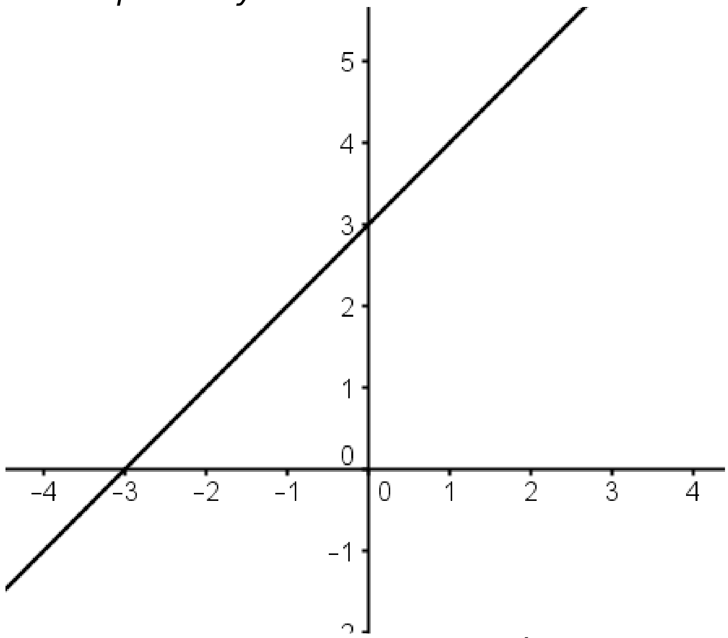
Par exemple, 10┼25 = 0,1x25 = 2,5 et 3┼25 = $\frac{1}{3}$ *x25 =* $\frac{25}{3}$ *.*

III) EXEMPLES DE REPRESENTATION DE FONCTIONS USUELLES TROPICALISEES

Dans ce paragraphe, on note f la fonction, ft(x) l'expression tropicalisée de la fonction f et Cf son graphe, à savoir la courbe d'équation y = ft(x).

1) Fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = ax, a étant un réel non nul

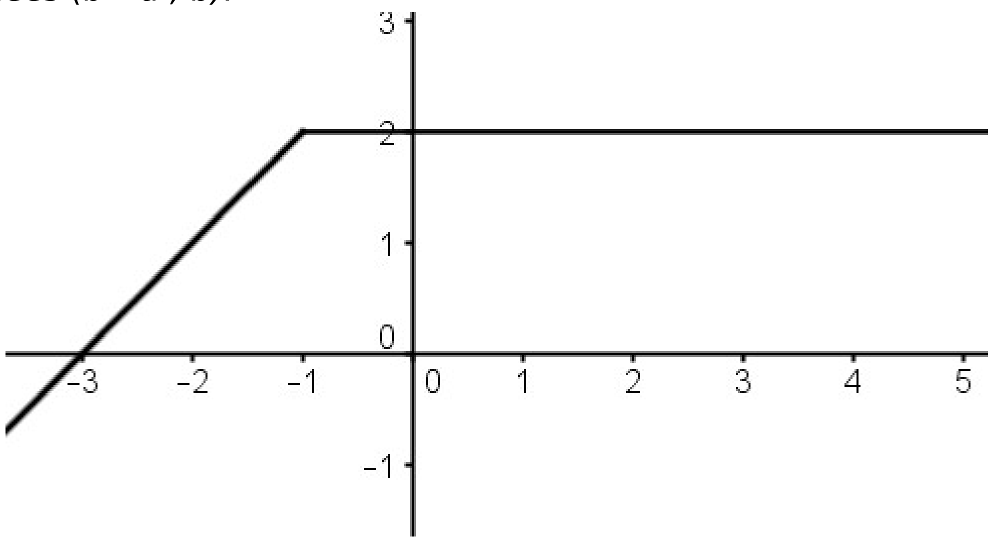
En tropicalisant f, on a ft(x) = a ⊗ x = a + x.
Cf est donc la droite d'équation y = a + x



Graphe tropical de la fonction linéaire f(x) = 3x

2) Fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = ax + b, a et b étant 2 réels, a ≠ 0 :

En tropicalisant f, on a ft(x) = a ⊗ x ⊕ b = min(a + x ; b). On a donc :
Si a + x ≤ b, à savoir x ≤ b – a, on a ft(x) = a + x
Si b < x + a, à savoir x > b – a, on a ft(x) = b.
Ainsi , Cf est composée de deux demi-droites issues d'un meme point de coordonnées (b – a ; b).



Graphe tropical de la fonction affine f(x) = 3x + 2

3) Fonction trinome du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = ax²+bx+c où a, b et c sont trois réels, a ≠ 0 :

En tropicalisant f, on a ft(x) = a ⊗ x ⊗ x ⊕ b ⊗ x ⊕ c

= min(a + 2x ; b + x ; c)

a)Si $a+2x \le b$ et $a + 2x \le c$, à savoir $x \le m$ avec $m = \min(b - a ; \frac{c-a}{2})$ alors $ft(x) = a + 2x$.
Cf est une demi-droite d'origine A(m ; a + 2m),

b) Si a + 2x ≥ c et b + x ≥ c, à savoir x ≥ M avec M = max(c – b ; $\frac{c-a}{2}$ *) alors ft(x) = c. Cf est une demi-droite horizontale d'origine B(M ; c).*

c) lorsque b + x est minimum, voir remarque ii) ci-dessous (D <0)

d) Remarque :

i) m = b – a <=> b – a ≤ $\frac{c-a}{2}$ *<=> 2b – a – c ≤ 0 ;*

m = $\frac{c-a}{2}$ *<=> b – a ≥* $\frac{c-a}{2}$ *<=> 2b – a – c ≥ 0 ;*

M = c – b <=> c – b ≥ $\frac{c-a}{2}$ *<=> 2b – a – c ≤ 0 ;*

M = $\frac{c-a}{2}$ *<=> c – b ≤* $\frac{c-a}{2}$ *<=> 2b – a – c ≥ 0 ;*

ii) Posons D = 2b – a – c. Etudions la position de m et de M :

• *<u>si D > 0</u> alors 2b – a – c > 0 soit 2b – a + c > 2c soit encore c – a > 2c – 2b donc* $\frac{c-a}{2}$ *> c – b.*

De meme, si 2b – a – c > 0 alors 2b – 2a > c – a soit b – a > $\frac{c-a}{2}$ *.*

On a alors m = M = $\frac{c-a}{2}$ *. A et B sont confondus.*

• *<u>si D = 0</u> de meme, on a* $\frac{c-a}{2}$ *= c – b et b – a =* $\frac{c-a}{2}$ *soit m = M. A et B sont confondus.*

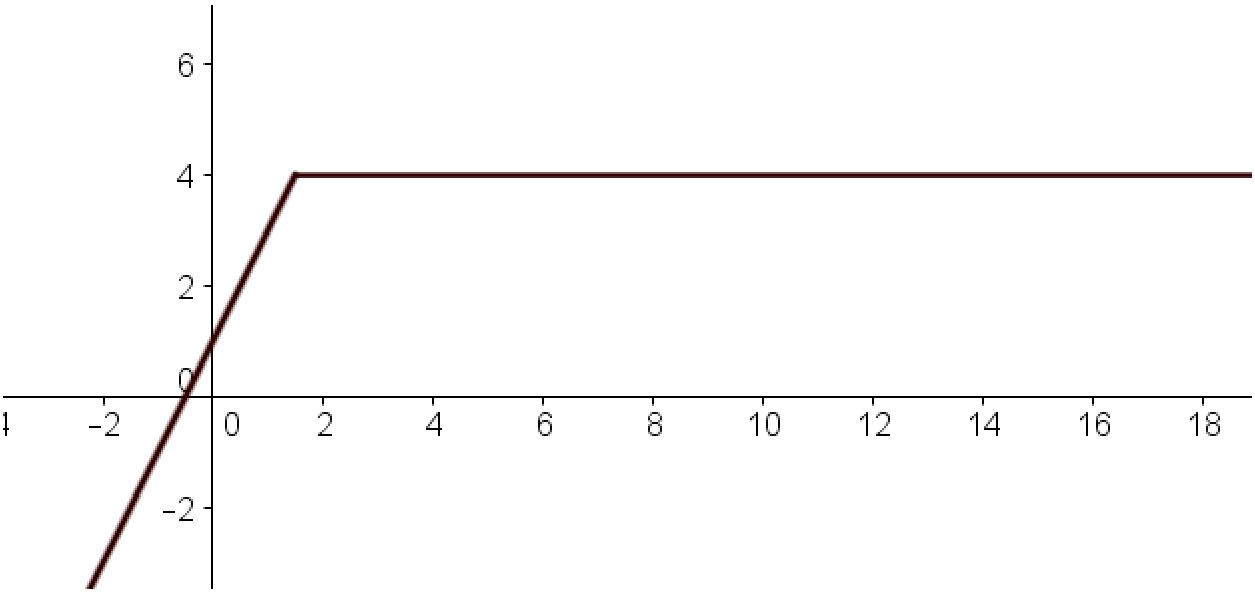
• *<u>si D < 0</u> alors de meme on a* $\frac{c-a}{2}$ *< c – b d'une part et b – a <* $\frac{c-a}{2}$ *d'autre part. On a donc, b – a <* $\frac{c-a}{2}$ *< c – b soit m < M.*

Alors, pour m < x < M, soit b - a < x < c – b, on a : b + x < a + 2x et b + x < c.
ft(x) = min(a + 2x ; b + x ; c) = b + x.
Cf est le segment]A ; B[.

<u>e) Propriété</u> : ***On considère la fonction trinome du second degré f(x) = ax² + bx + c avec a ≠ 0. Soit D = 2b – a – c.***
- Si D > 0, le graphe de ft, la fonction tropicalisée de f est composé de deux demi-droites issues d'un meme point.
- Si D < 0, le graphe de ft, la fonction tropicalisée de f est composé de deux demi-droites, l'une issue du point A(m ; a + 2m), l'autre horizontale, issue du point B(M ; c), et du segment [AB]
avec m = min(b – a ; $\frac{c-a}{2}$ ***), et M = max(c – b ;*** $\frac{c-a}{2}$ ***) .***

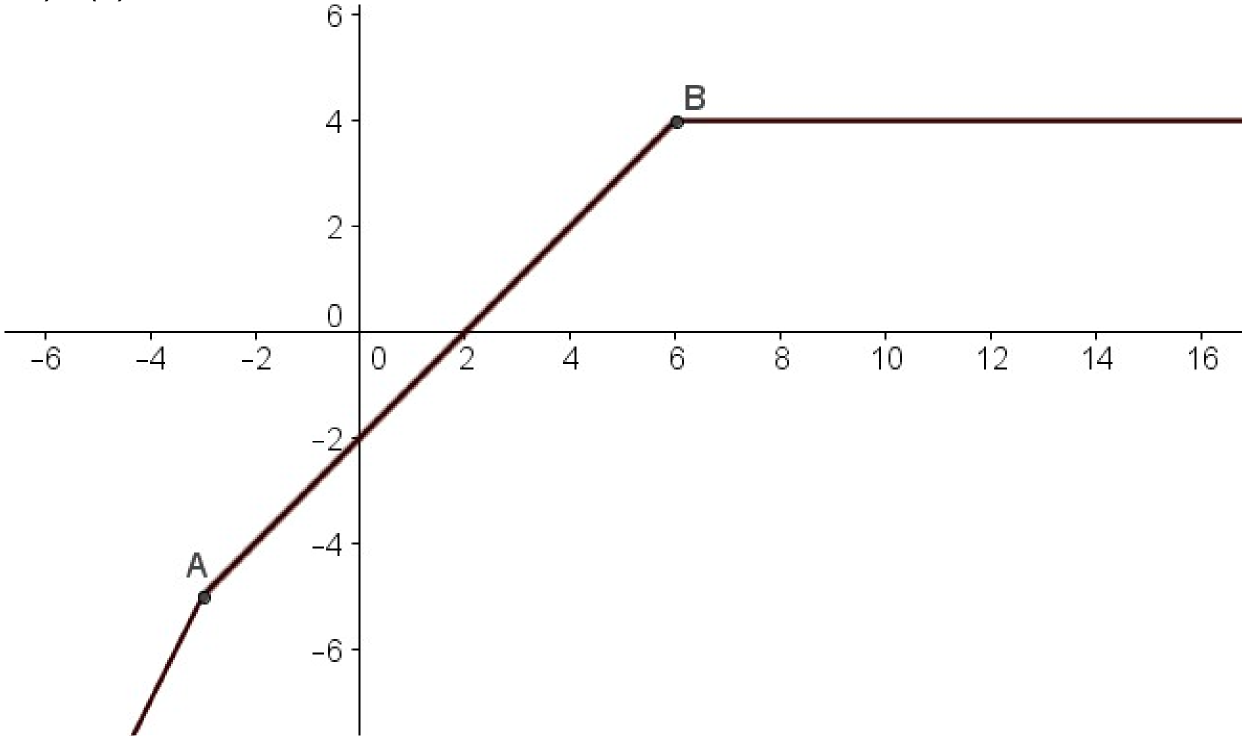
e) Exemples :

i) $f(x) = x^2 + 5x + 4$. $D = 10 – 1 – 4 = 5 > 0$.



$ft(x) = 2x + 1$ pour $x \leq 1{,}5$ et $ft(x) = 4$ pour $x \geq 1{,}5$.

ii) $f(x) = x^2 - 2x + 4$. $D = -4 – 1 – 4 = -9 < 0$

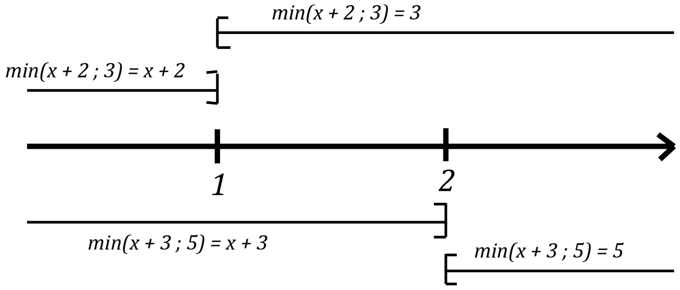


$ft(x) = 2x + 1$ pour $x \leq -3$, $ft(x) = x – 2$ pour $-3 \leq x \leq 6$ et $ft(x) = 4$ pour $x \geq 6$.

IV) RESOLUTION DE L'EQUATION ax + b = cx + d DANS ₸

1) Un exemple : résolution de $2x + 3 = 3x + 5$

L'équation tropicalisée devient $2 \otimes x \oplus 3 = 3 \otimes x \oplus 5$
qui équivaut à $\min(2 + x ; 3) = \min(3 + x ; 5)$



Etudions $\min(2 + x ; 3)$
Pour $x \geq 1$*on a* $2 + x \geq 3$ *donc* $\min(2 + x ; 3) = 3$
Pour $x \leq 1$ *on a* $2 + x \leq 3$ *donc* $\min(2 + x ; 3) = 2 + x$

Etudions $\min(3 + x ; 5)$
Pour $x \geq 2$ *on a* $3 + x \geq 5$ *donc* $\min(3 + x ; 5) = 5$
Pour $x \leq 2$ *on a* $3 + x \leq 5$ *donc* $\min(3 + x ; 5) = 3 + x$
Il faut donc étudier la situation sur 3 intervalles différents :

a) Pour $x \leq 1$
$\min(3 + x ; 5) = 3 + x$ *ET* $\min(2 + x ; 3) = 2 + x$
L'équation devientc $2 + x = 3 + x$ *soit* $3 = 2$ *donc il n'y a pas de solutions dans cet intervalle.*

b) Pour $x \geq 2$
$\min(3 + x ; 5) = 5$ *ET* $\min(2 + x ; 3) = 3$
L'équation devient $5 = 3$ *donc il n'y a pas de solutions dans cet intervalle.*

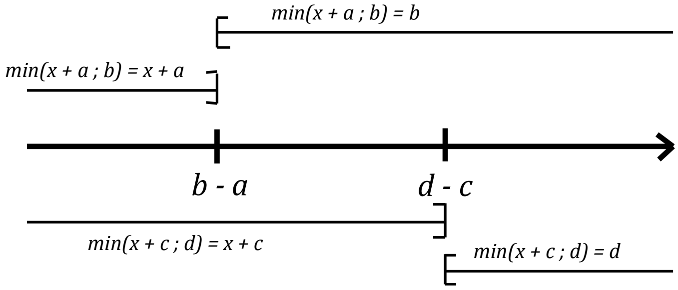
c) Pour $1 < x < 2$
$\min(3 + x ; 5) = 3 + x$ *ET* $\min(2 + x ; 3) = 3$
L'équation devientc $3 + x = 3$ *soit* $x = 0$*. Or, 0 n'est pas compris entre 1 et 2 donc il n'y a pas de solutions dans cet intervalle.*

L'équation $2x + 3 = 3x + 5$ *n'admet pas de solution dans* $\overline{T}$.

<u>2) Cas général :</u>

a, b, c et d désignent 4 réels.
L'équation $ax + b = cx + d$ *tropicalisée devient* $a \otimes x \oplus b = c \otimes x \oplus d$
qui équivaut à $\min(a + x ; b) = \min(c + x ; d)$

Il faut distinguer deux situations :
A) Situation où $b – a \leq d - c$

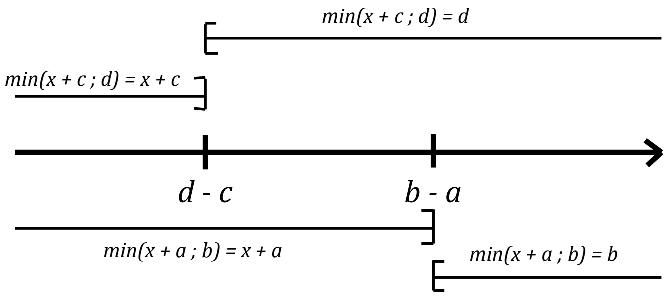


a) Pour $x \leq b - a$
Alors, on a aussi $x \leq d - c$ soit $a + x \leq b$ ET $c + x \leq d$
Alors $\min(a + x ; b) = a + x$ ET $\min(c + x ; d) = c + x$
L'équation devient $a + x = c + x$
Si $a = c$ alors cette équation admet une infinité de solutions : $x \leq b - a$;
Si $a \neq c$ alors cette équation n'admet aucune solution.

b) Pour $x \geq d - c$
Alors, on a aussi $x \geq b - a$ soit $a + x \geq b$ ET $c + x \geq d$
Alors $\min(a + x ; b) = b$ ET $\min(c + x ; d) = d$
L'équation devient $b = d$
Si $b = d$ alors cette équation admet une infinité de solutions : $x \geq d - c$;
Si $b \neq b$ alors cette équation n'admet aucune solution.

c) Pour $b - a < x < d - c$
Alors $x + a \geq b$ ET $x + c \leq d$
Alors $\min(a + x ; b) = b$ ET $\min(c + x ; d) = x + c$
L'équation devient $b = c + x$ soit $x = b - c$
Si $b - a \leq b - c \leq d - c$, à savoir $c \leq a$ ET $b \leq d$, alors l'équation admet une solution : $b - c$.
Si $b - a \geq b - c$ OU $b - c \geq d - c$, à savoir $c \geq a$ OU $b \geq d$, alors l'équation n'admet pas de solution.

B) Situation où $b - a > d - c$



a) Pour $x \leq d - c$
Alors, on a aussi $x \leq b - a$ soit $a + x \leq b$ ET $c + x \leq d$
Alors $\min(a + x ; b) = a + x$ ET $\min(c + x ; d) = c + x$
L'équation devient $a + x = c + x$
Si $a = c$ alors cette équation admet une infinité de solutions : $x \leq b - a$;
Si $a \neq c$ alors cette équation n'admet aucune solution.

b) Pour $x \geq b - a$
Alors, on a aussi $x \geq d - c$ soit $a + x \geq b$ ET $c + x \geq d$

Alors $\min(a + x ; b) = b$ *ET* $\min(c + x ; d) = d$
L'équation devient $b = d$
Si $b = d$ *alors cette équation admet une infinité de solutions :* $x \geq d - c$;
Si $b \neq b$ *alors cette équation n'admet aucune solution.*

c) Pour $d - c < x < b - a$
Alors $x + c \geq d$ *ET* $x + a \leq b$
Alors $\min(a + x ; b) = a + x$ *ET* $\min(c + x ; d) = d$
L'équation devient $d = a + x$ *soit* $x = d - a$
Si $d - c \leq d - a \leq b - a$, *à savoir* $a \leq c$ *ET* $d \leq b$, *alors l'équation admet une solution :* $d - a$.
Si $d - c \geq d - a$ *OU* $d - a \geq b - a$, *à savoir* $a \geq c$ *OU* $d \geq b$, *alors l'équation n'admet pas de solution.*

V) DROITES TROPICALES

1) La droite tropicale

a) Définition :

La droite tropicale est définie par un polynôme du premier degré à deux variables tropicalisé.
Un polynôme du premier degré à deux variables est P(x;y)= ax+by+c
En le tropicalisant, on a :

$P_t(x;y)= a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$

$P_t(x;y)= a + x \oplus b + y \oplus c$

$P_t(x;y)= \min(a + x ; b + y ; c)$

Par définition, ***la représentation graphique d'une droite tropicale, est l'ensemble de tous les points M(x;y) en lesquels le minimum est atteint deux fois****, soit :*

$$a + x = b + y \text{ ET } a + x \leq c \iff x = y + b - a \text{ ET } x \leq c - a$$
OU
$$a + x = c \text{ ET } c \leq b + y \iff x = c - a \text{ ET } y \geq c - b$$
OU
$$b + y = c \text{ ET } c \leq a + x \iff y = c - b \text{ ET } x \geq c - a$$

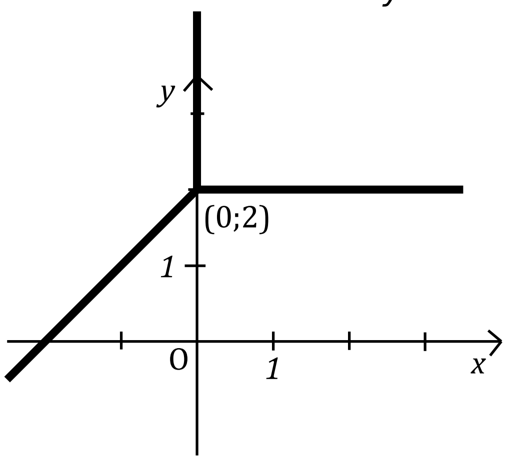
Propriété : a, b et c sont trois réels. ***La droite tropicale définie par le polynôme du premier degré à deux variables P(x;y) = ax + by + c est formée de trois demi-droites issues d'un même point de coordonnées (c - a ; c - b).***

b) Exemple :

On considère la droite tropicale définie par le polynôme P(x;y) = x – y + 1.
On a alors $P_t(x;y) = \min(1 + x ; -1 + y ; 1)$.

La droite tropicale de polynôme P(x;y) est l'ensemble des points M(x;y) du plan *tels que :*

$$1 + x = -1 + y \text{ ET } 1 + x \leq 1 \iff x = y - 2 \text{ ET } x \leq 0$$
OU
$$1 + x = 1 \text{ ET } 1 \leq -1 + y \iff x = 0 \text{ ET } y \geq 2$$
OU
$$-1 + y = 1 \text{ ET } -1 \leq 1 + x \iff y = 2 \text{ ET } x \geq 0$$

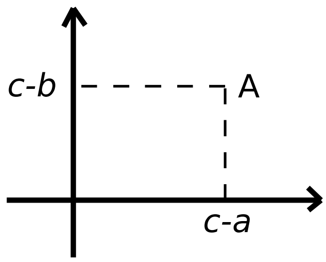


2) Pourquoi le minimum du polynôme doit-il etre atteint deux fois ?

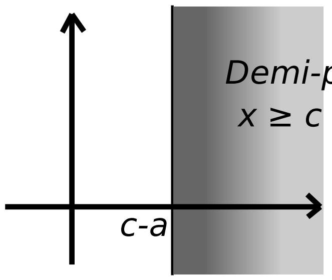
En annexe 1, on trouvera une explication, en plongeant le problème dans un espace à 3 dimensions.

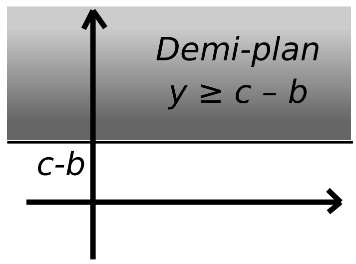
Soit $P(x;y) = ax + by + c$ où a, b et c sont trois réels.
Par définition, la droite tropicale est l'ensemble des points $M(x ; y)$ en lesquels le minimum du polynome $Pt(x;y) = \min(a+x ; b+y; c)$ est atteint deux fois.

a) Losque le minimum est atteint trois fois :
$a + x = c$ ET $b + y = c \iff x = c – a$ ET $y = c – b$.
C'est-à-dire que, lorsqu'on a trois minima atteints, géométriquement, on obtient un point A de coordonnées $(c – a ; c – b)$, à savoir un élément géométrique de dimension 0, ce qui ne correspond pas à l'idée d'une droite, élèment géométrique à 1 dimension.

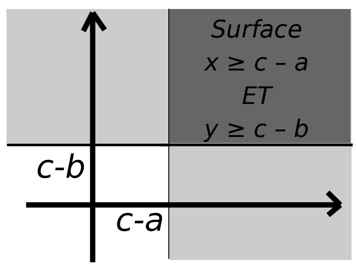


b) Lorsque le minimum est atteint une seule fois :
$c \leq a +x$ ET $c \leq b + y \iff x \geq c – a$ ET $y \geq c – b$.
Or, $x \geq c – a$ correspond géométriquement à un demi-plan, ainsi que $y \geq c – b$,





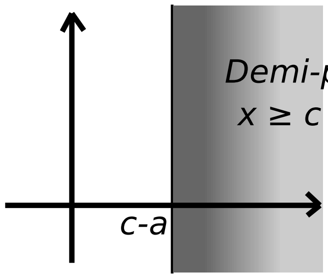
Donc, $x \geq c – a$ ET $y \geq c – b$ définit géométriquement une surface, à savoir un objet géométrique de dimension 2, ce qui ne correspond toujours pas à l'idée d'une droite.



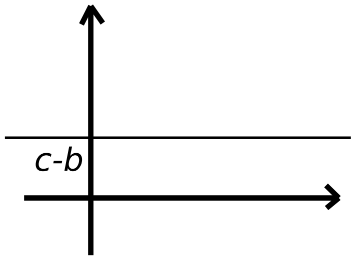
c) Lorsque le minimum est atteint deux fois :

$c \leq a +x$ ET $c = b + y \iff x \geq c – a$ ET $y = c – b$.

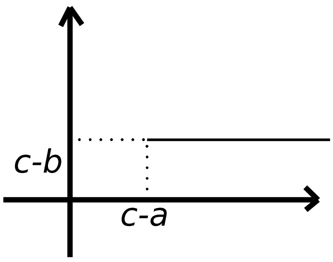
$x \geq c - a$
définit un
demi-plan



$y = c - b$
définit
une droite



Ces deux éléments étant toujours sécants, géométriquement, l'intersection de ces deux éléments donne une demi-droite, objet géométrique de dimension 1, ce qui correpond à l'idée d'une droite tropicale.



ANNEXE

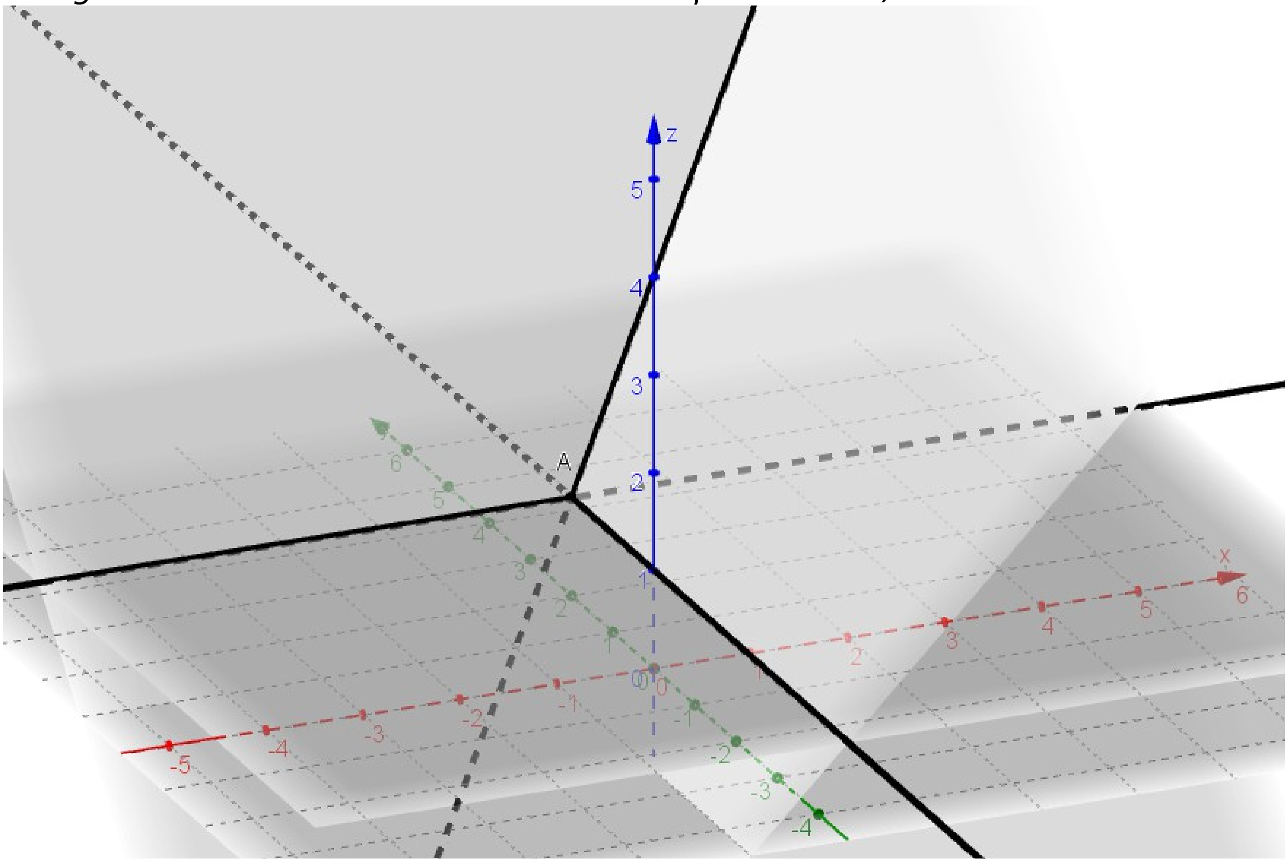
Par définition, la droite tropicale s'obtient à partir des points M(x;y) en lesquels le minimum est atteint au moins deux fois dans le polynôme :

$$Pt(x,y) = \min(a + x \,;\, b + y \,;\, c)$$

Essayons de comprendre pourquoi le minimum doit être atteint au moins deux fois.
Posons z1 = a + x, z2 = b + y et z3 = c.

On considère l'espace ramené à un repère (O ; $\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}$) et les plans P1, P2 et P3 d'équation respective z = a + x ; z = b + y et z = c et de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{n}_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{n}_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
Comme ces trois vecteurs ne sont pas colinéaires deux à deux, les plans P1, P2 et P3 sont sécants suivant un point A(c – a ; c – b ; c).

La figure ci-dessous illustre le cas de l'exmple du V.1.b)



- si le minimum devait être atteint trois fois :
On aurait alors z1 = z2 = z3, ce qui définit le point A, point d'intersection des plans P1, P2 et P3. Ce point, élément géométrique à une dimension, ne donne pas l'idée de la représentation graphique d'une droite, élément géométrique à une dimension.

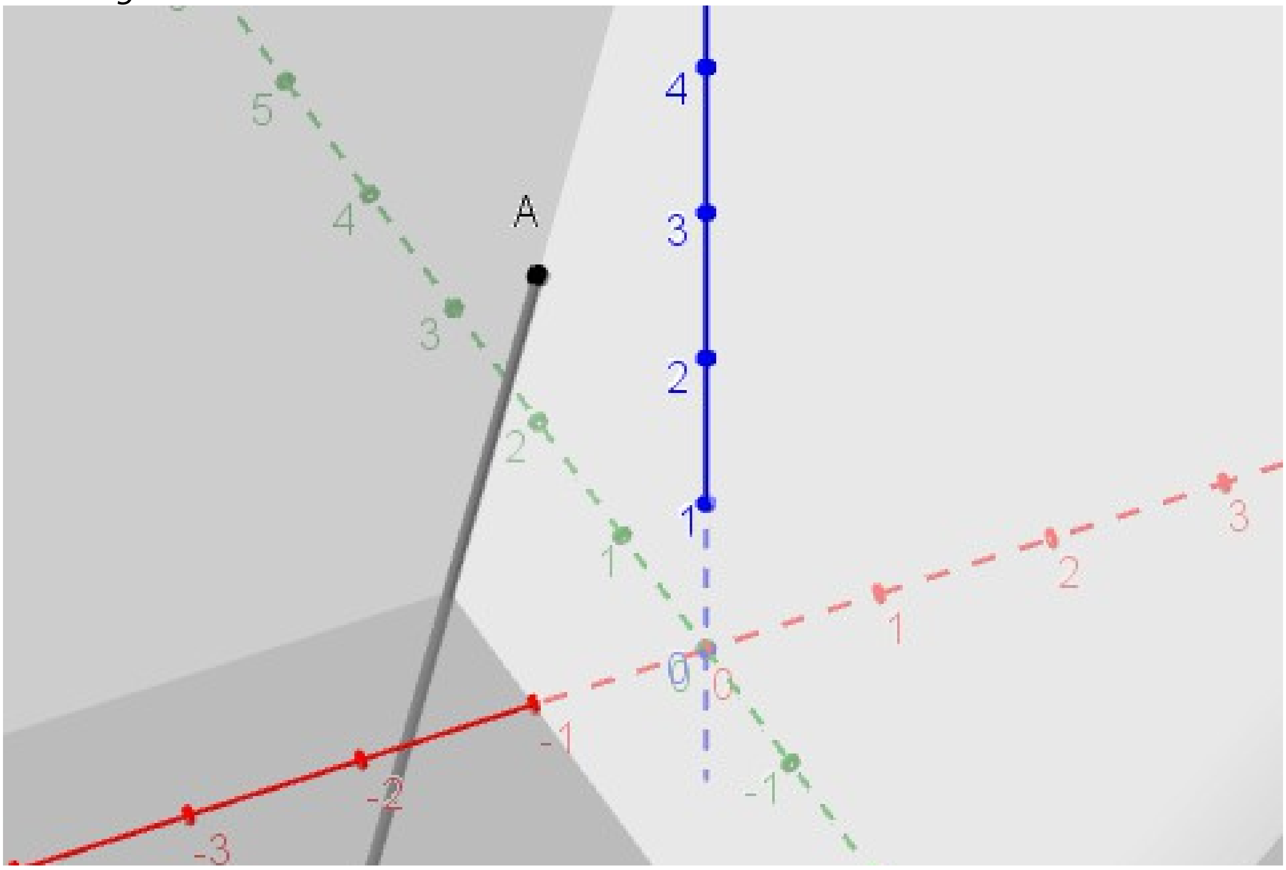
- si le minimum devait être atteint une fois :
ce serait soit z1, soit z2 soit z3, ce qui à chaque fois, représente une des parties des plans P1, P2 et P3. Cette définition donnerait lieu à la

représentation graphique d'une surface (figure à 2 dimensions).

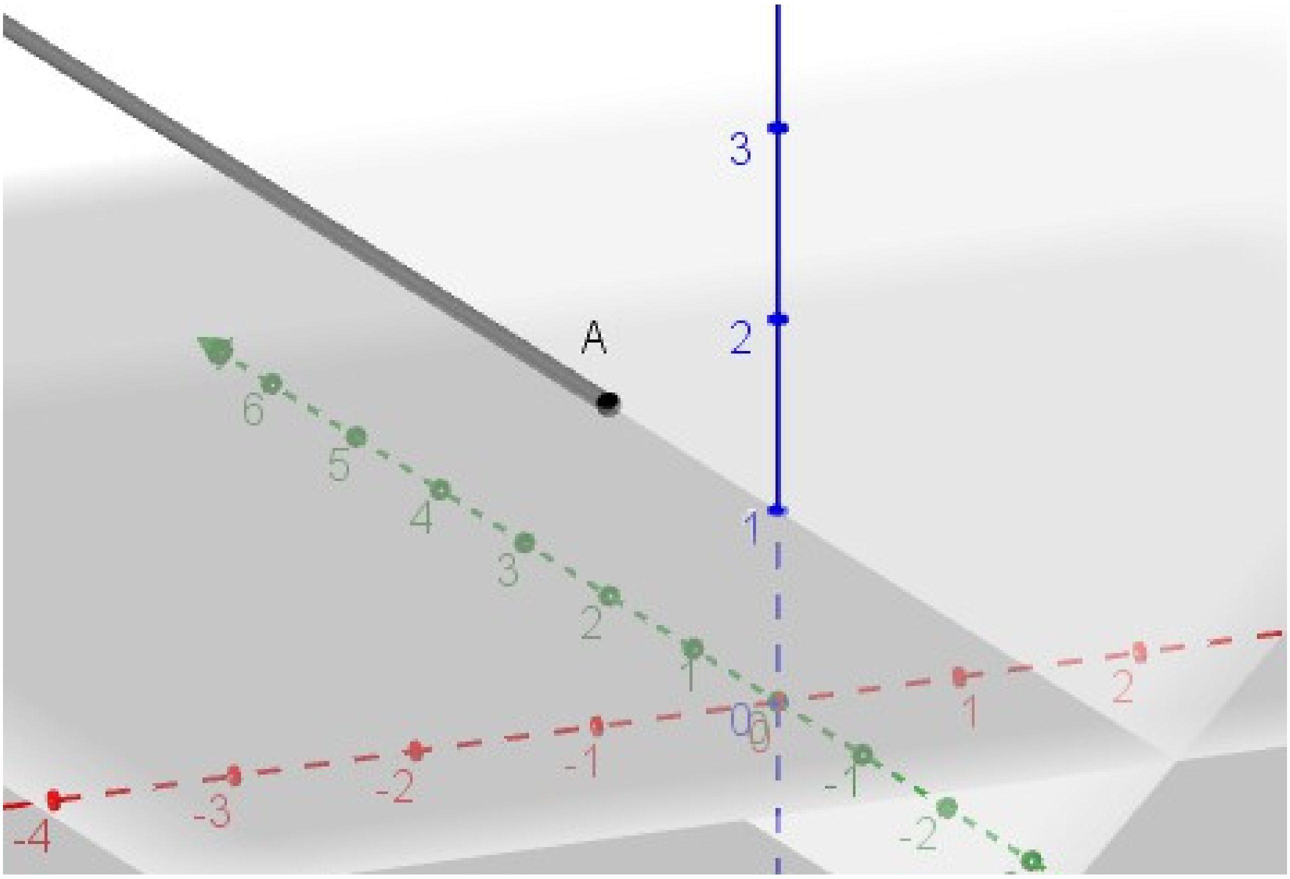
- lorsque le minimum est atteint 2 fois
On a alors, z1 = z2 ou z1 = z3 ou z2 = z3. Cette définition donne naissance à 3 demi-droites, figure de dimension 1, que l'on considèrera comme étant une droite tropicale.

Retournons à l'exemple du V.1.b). On a P1/z = x + 1 ; P2/z = y – 1 et P3/z = 1.

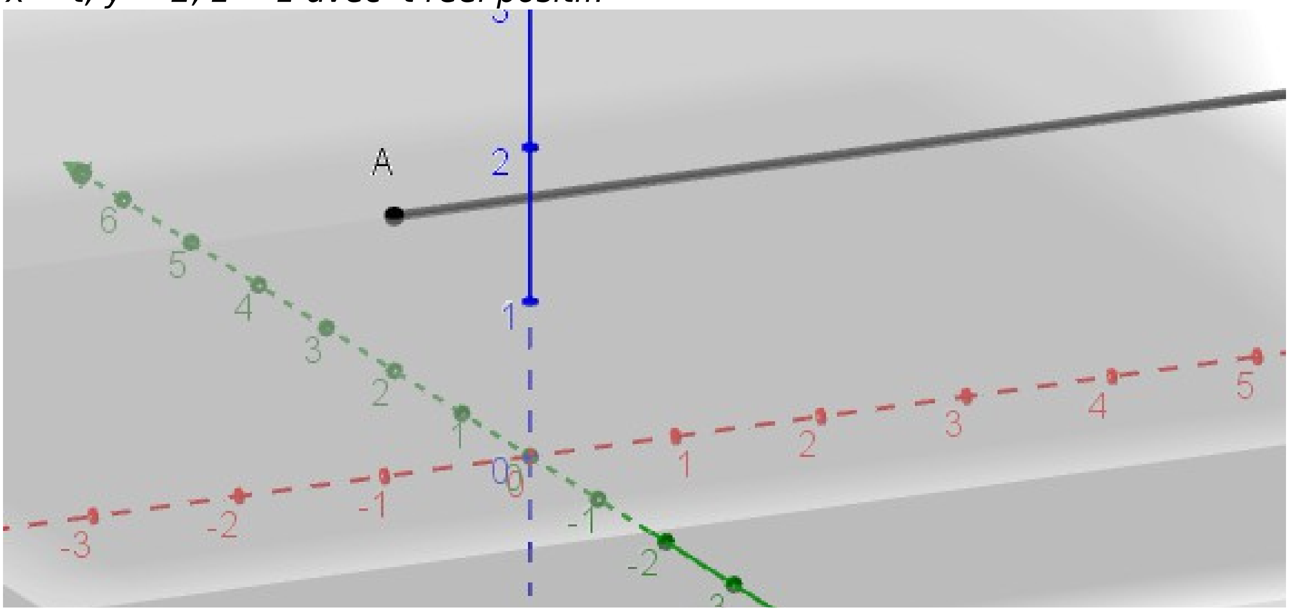
L'intersection de P1 et de P2 est définie par x = y - 2 quand x ≤ 0 (voir partie algébrique de l'exemple au début du paragraphe). Soit en posant x = t, la demi-droite de représentation paramétrique x = t, y = t + 2, z = 1 + t avec t réel négatif.



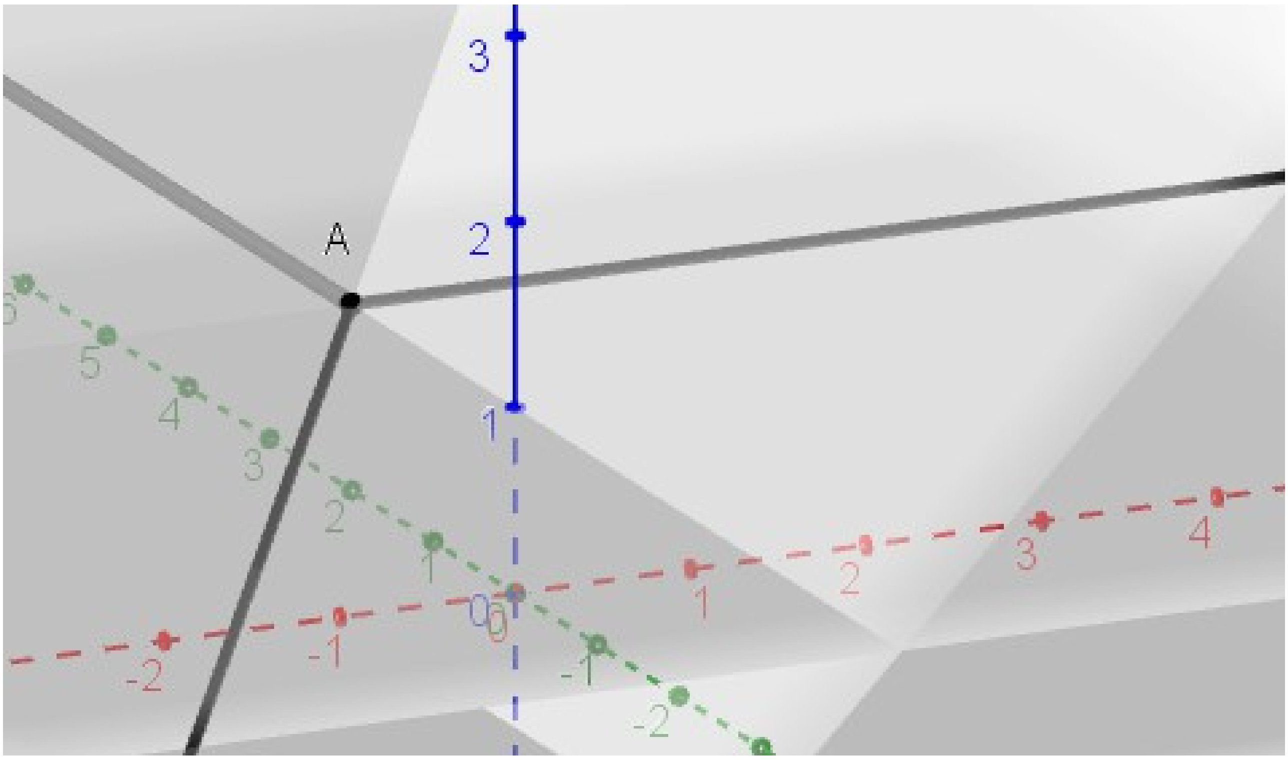
De meme, l'intersection de P1 et de P3 est définie par x = 0 quand y ≥ 0 . Soit en posant y = t, la demi-droite de représentation paramétrique :
x = 0, y = 2 + t, z = 1 avec t réel positif.



Enfin, l'intersection de P2 et de P3 est définie par y = 2 quand x ≥ 0, Soit en posant x = t, la demi-droite de représentation paramétrique :
x = t, y = 2, z = 1 avec t réel positif.



La réunion de ces trois demi-droites donne alors l'intersection de ces trois plans.



Ce qui, en projetant dans le plan (O ; $\vec{i};\vec{j}$) donne la droite tropicale.