RECHERCHE DE GEODESIQUE(S) …

par

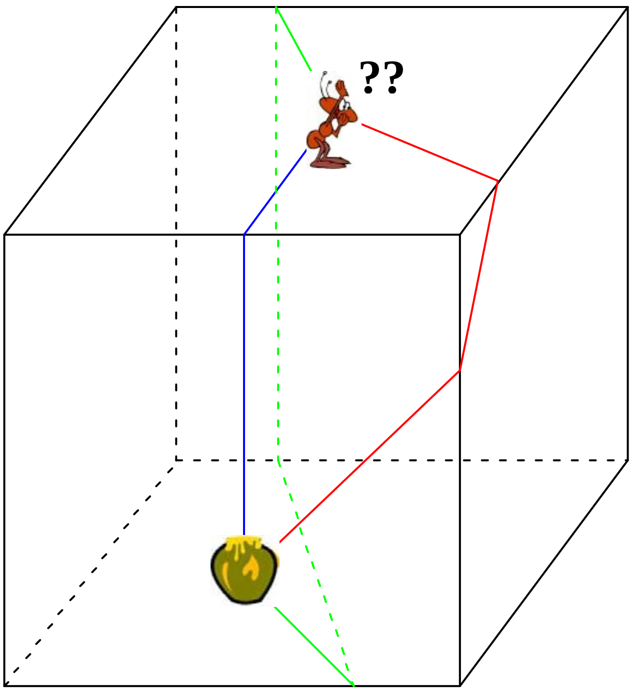
Sylvain DELOFFRE, Jean-Patrick HOCHARD, Antonin KOZIEL,
Edwin KUBIAK et Bastien LETURGEZ,
élèves de troisième
au collège Adulphe DELEGORGUE de Courcelles lès Lens (Pas de Calais)

Enseignant : Stéphane ROBERT (collège DELEGORGUE)
Chercheur : Valério VASSALLO (université de Lille I)

2003

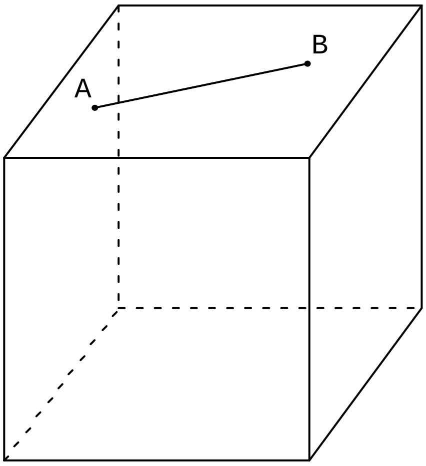
Une fourmi se promenant sur un solide veut rejoindre un pot de miel placé lui aussi à sa surface. Quel chemin doit-elle suivre pour que son trajet soit le plus court possible ?
Le problème posé revient en fait à trouver le ou les chemins les plus courts reliant deux points situés sur la surface d'un solide. De tels chemins, si ils existent, sont appelés *géodésiques* du solide en question.
Dans un premier temps, nous avons limité nos recherches au cas du cube et donc avons essayé de déterminer les géodésiques d'un cube.

Pouvez-vous aider la fourmi à rejoindre le pot de miel en minimisant son trajet et donc ses efforts ?



Dans la suite de notre étude, nous nommerons A la point de départ de la fourmi et B la position du pot de miel et nous subdiviserons la recherche en plusieurs cas.

I – Les points A et B sont situés sur la même face

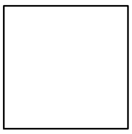


Il est clair ici que quand les points A et B sont situés sur la même face, le plus court chemin pour les relier est la ligne droite.
Dans ce cas, les géodésiques du cube sont des segments.

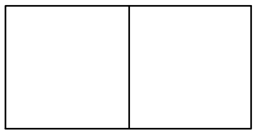
Deux autres cas vont se présenter : si les deux points sont sur des faces adjacentes, c'est à dire ayant une arête en commun et si les deux points sont sur des faces opposées. Or nous venons de voir que sur une surface plane, trouver le chemin le plus court entre deux points est immédiat, c'est la ligne droite. En conséquence, nous allons essayé de nous ramener à une telle situation et pour cela, étudions les patrons du cube.

II – <u>Dénombrement des patrons du cube</u>

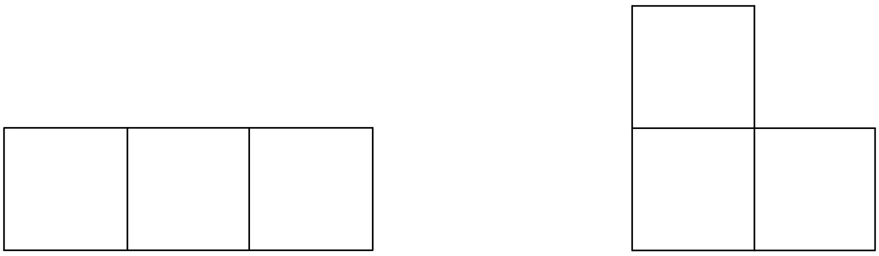
Un cube présentant 6 faces, ses patrons doivent se composer de 6 carrés identiques. Cependant ces carrés doivent avoir un côté en commun et lorsque l'on replie l'ensemble, former un cube, ce qui limite les possibilités de disposer les carrés.
Pour dénombrer le nombre de patrons, nous avons procédé par étapes :



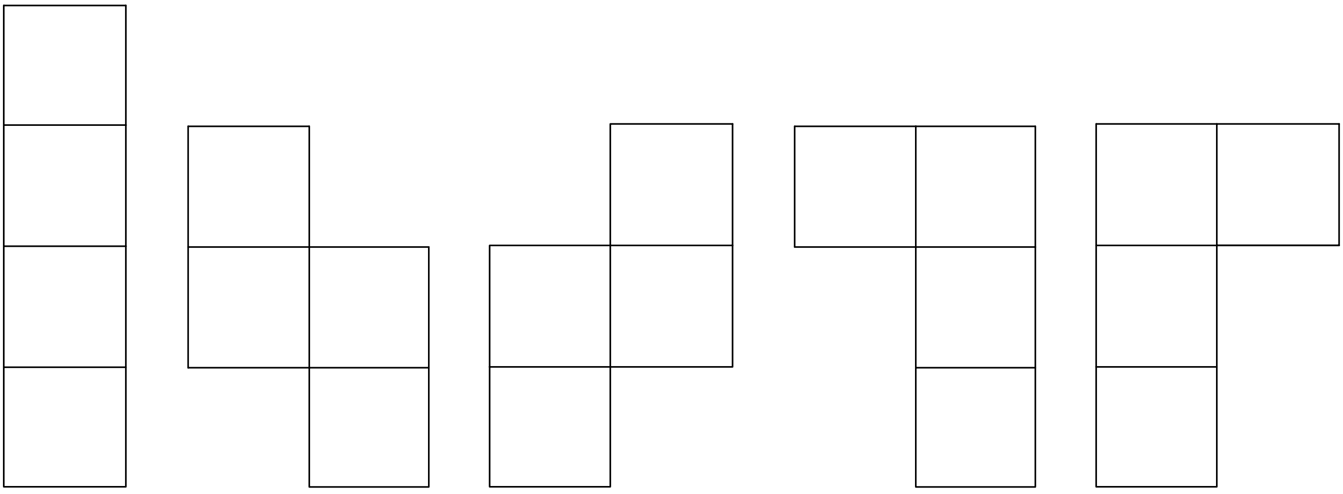
<u>Etape 1</u>



<u>Etape 2</u>



<u>Etape 3</u>

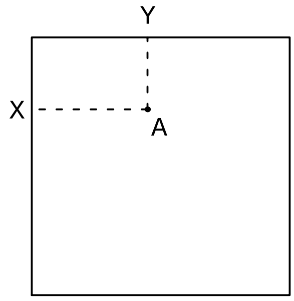


<u>Etape 4</u>

Nous obtenons finalement à l'étape 6, une fois éliminées toutes les dispositions identiques par rotation, 11 patrons différents d'un cube.

III – <u>Repérage d'un point sur une face</u>

Dans tout ce qui suit, afin de pouvoir effectuer différents calculs de longueurs, nous travaillerons avec un cube de 4 centimètres d'arête et nous aurons besoin de repérer sur chacune des faces la position des points A et B. Pour ce faire, nous allons procéder comme nous le ferions dans un repère (orthonormé) en indiquant les distances qui séparent le point considéré de deux arêtes consécutives de la face à laquelle il appartient.

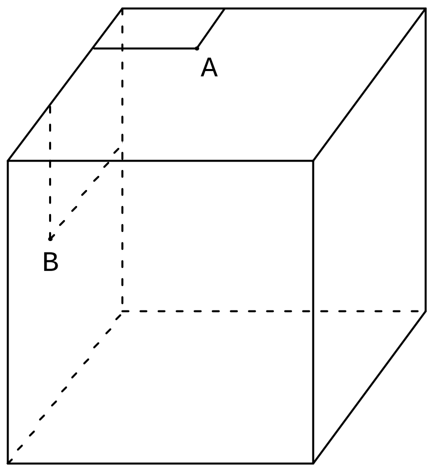


Ainsi, le point A est repéré par les longueurs :
AX et AY.

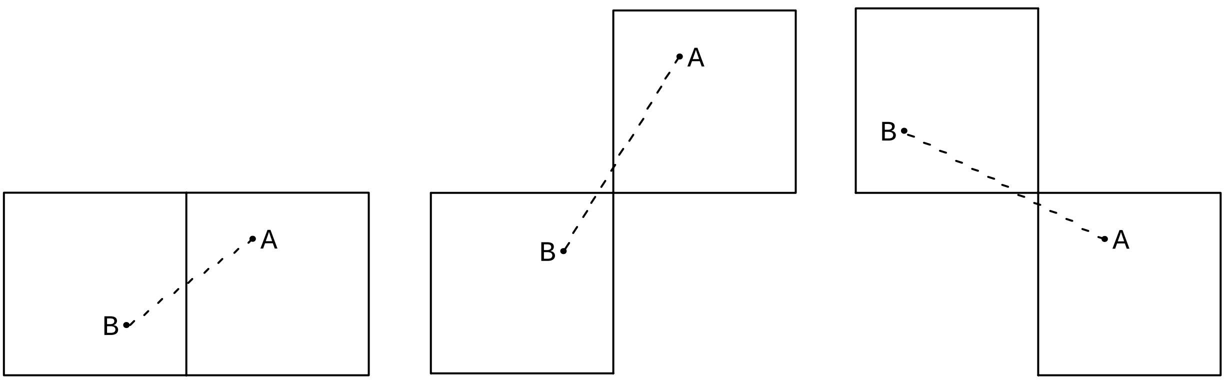
IV – <u>Les points A et B sont situés sur deux faces adjacentes</u>

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, le chemin le plus court en géométrie plane est la ligne droite. Pour se ramener ici, à cette situation, nous allons considérer les patrons du cube. Ils sont onze mais beaucoup d'entre eux conduisent à des situations similaires.
Pour résumer :

Les points A (fourmi) et B (pot de miel) sont situés comme la figure ci contre l'indique.



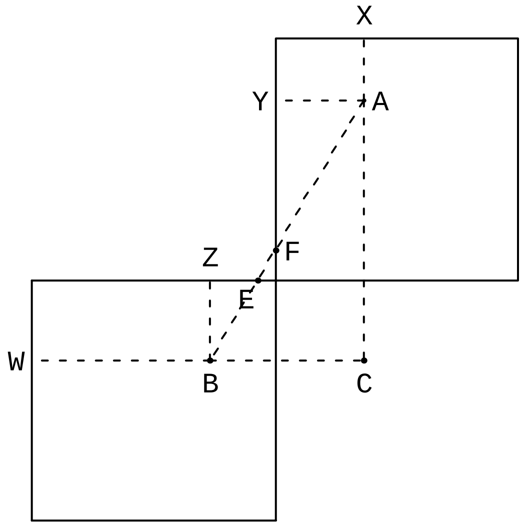
En « dépliant » le cube de toutes les façons possibles, nous obtenons onze patrons avec à chaque fois, la position des points A et B (voir feuille annexe).
Nous sommes donc confrontés à trois configurations possibles :



configuration 1 *configuration 2* *configuration 3*

Néanmoins, les *configurations 2 et 3* sont le plus souvent à exclure car lorsque l'on reformera par pliage le cube à partir de tels patrons, les point E et F ne coïncideront pas et nous n'aurons donc pas de chemin « continu ».

Cependant si le triangle ABC est rectangle isocèle, les points E et F se superposeront après pliage et le chemin pourrait être une éventuelle géodésique.



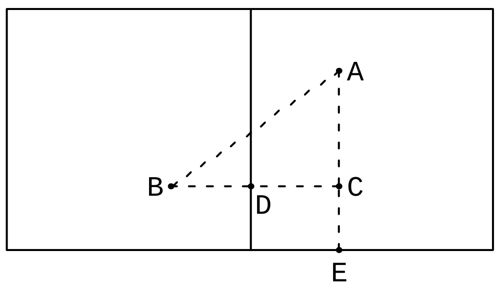
a. ***Le triangle ABC n'est pas isocèle***

Prenons AX = 1 cm et AY = 1 cm ainsi que BZ = 1 cm et BW = 3 cm. Dans ce cas, puisque ABC n'est pas isocèle, seule la *configuration 1* permet d'obtenir un chemin continu et « droit », nous avons donc une unique géodésique que la fourmi devra suivre pour rejoindre au plus vite le pot de miel. Calculons sa longueur …

Dans le triangle ABC rectangle en C (ci dessous), utilisons le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 = (BD + DC)^2 + (AE - EC)^2 = (1 + 1)^2 + (3 - 1)^2 = 4 + 4 = 8$$

Donc $AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8\,\text{cm}$.



b. ***Le triangle ABC est isocèle***

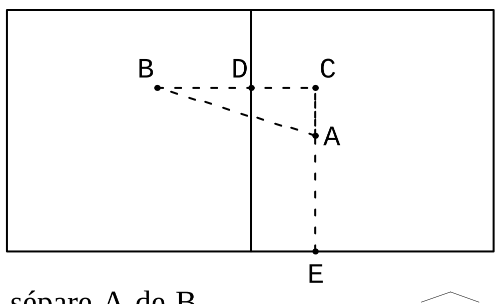
Prenons AX = 1,3 cm et AY = 1,8 cm ainsi que BZ = 1,8 cm et BW = 1,3 cm. Dans ce cas, le triangle ABC est isocèle.

Pour calculer la distance qui sépare A de B sur le cube par ce chemin (*configuration 1*), il nous faut calculer AB.

Dans le triangle ABC rectangle en C (ci dessous), utilisons le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 = (BD + DC)^2 + (EC - AE)^2 = (1{,}8 + 1{,}3)^2 + (2{,}7 - 2{,}2)^2 = 3{,}1^2 + 0{,}5^2 = 9{,}86$$

Donc $AB = \sqrt{9{,}86} \approx 3{,}14\,\text{cm}$.



Pour calculer la distance qui sépare A de B sur le cube par ce chemin (*configuration 2*), il nous faut calculer BE et AF.

Or le triangle ABC est rectangle isocèle en C donc $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 45°$

Dans le triangle BZE rectangle en Z :

$$\cos \widehat{ZBE} = \frac{BZ}{BE} \text{ d'où } \cos 45° = \frac{1{,}8}{BE}$$

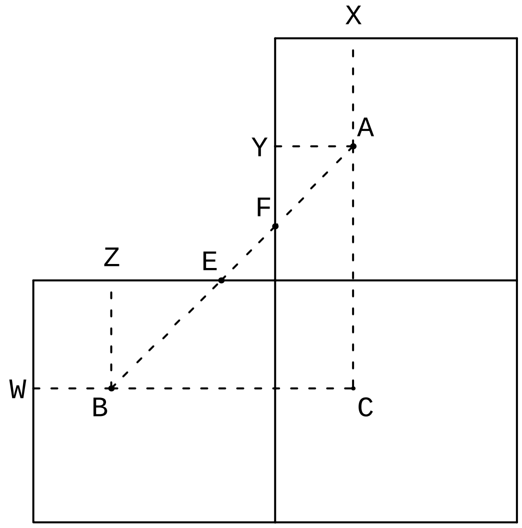
$$BE = \frac{1{,}8}{\cos 45°} = 1{,}8\sqrt{2} \approx 2{,}5\,\text{cm}.$$

Dans le triangle AYF rectangle en Y :

$$cos\ \widehat{YAF} = \frac{AY}{AF} \text{ d'où } cos\ 45° = \frac{1{,}8}{AF}$$

$$AF = \frac{1{,}8}{cos\ 45°} = 1{,}3\sqrt{2} \approx 1{,}8\,\text{cm.}$$

Finalement, BE + AF ≈ 1,8 + 2,5 ≈ 4,3 cm.
La distance qui sépare A de B sur le cube par ce chemin est d'environ 4,3 cm.

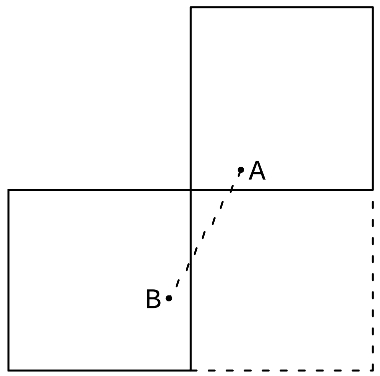


Enfin, la *configuration 3* est à exclure puisque le triangle ABC obtenu n'est pas isocèle et donc le chemin allant de A à B en ligne droite sur le patron correspondant n'est pas continu. Il ne peut donc être la géodésique cherchée.
En conclusion ici, c'est à nouveau la *configuration 1* qui nous permet d'obtenir une unique géodésique.

c. ***Cas particuliers de triangle ABC non isocèle***

Il peut arriver, pour certaines positions des points A et B, que dans le cas des *configurations 2 et 3*, le segment joignant A et B ne « sorte » pas du patron. Dans ce cas, pas de problème de raccordement après pliage !

Comme par exemple ci-contre, il est clair que la *configuration 2* conduise à la géodésique cherchée.
Chose étonnante, on aurait pu croire que le chemin le plus court joignant 2 points sur un solide doive passer par le moins de faces possibles … ce n'est pas nécessairement le cas.



V – <u>Conclusion</u>

L'étude débutée est loin d'être terminée : le cas de deux points situés sur des faces opposées du cube n'a pas été abordé par manque de temps. Dans le cas des points placés sur deux faces adjacentes, il nous semble, sans l'avoir vraiment développé, que la détermination du patron ou de la configuration à choisir pour trouver la ou les (??) géodésiques doit dépendre de la « zone » dans laquelle se trouve chaque point sur chaque face : « zone(s) » à déterminer …
Enfin, la méthode employée ici pourrait aussi fonctionner pour la recherche de géodésique sur un tétraèdre, une pyramide ou tout autre polyèdre.
Par contre, peut-être serait-il plus simple de s'intéresser aux cas du cylindre et du cône car leur patron est unique.
Et la sphère, sans patron, mais dont la découverte des géodésiques serait utile pour déterminer la distance minimale entre deux points de la Terre …

Annexe – **Les 11 patrons du cube et la position de 2 points fixés sur 2 faces adjacentes**