Game of needles

Année 2017 – 2018

Élève : THIÉBAUD Léo, première scientifique
Professeur : Marie DIUMENGE
Etéblissement : Lycée François Arago, Perpignan
Chercheur : Robert BROUZET, université de Perpignan

I. Introduction au problème

I. 1. Énoncé :

Si un jour vous vous ennuyez, essayez donc le jeu suivant : Vous laissez tomber une aiguille sur un sol parqueté et vous observez sa position. Il y alors deux solutions : soit l'aiguille est tombée sur une latte de parquet, auquel cas vous perdez, soit elle est tombée à cheval sur deux lattes et vous gagnez. Est-il possible de calculer la probabilité de victoire si l'on répétait cette expérience un grand nombre de fois ?

I. 2. Modélisation de l'expérience

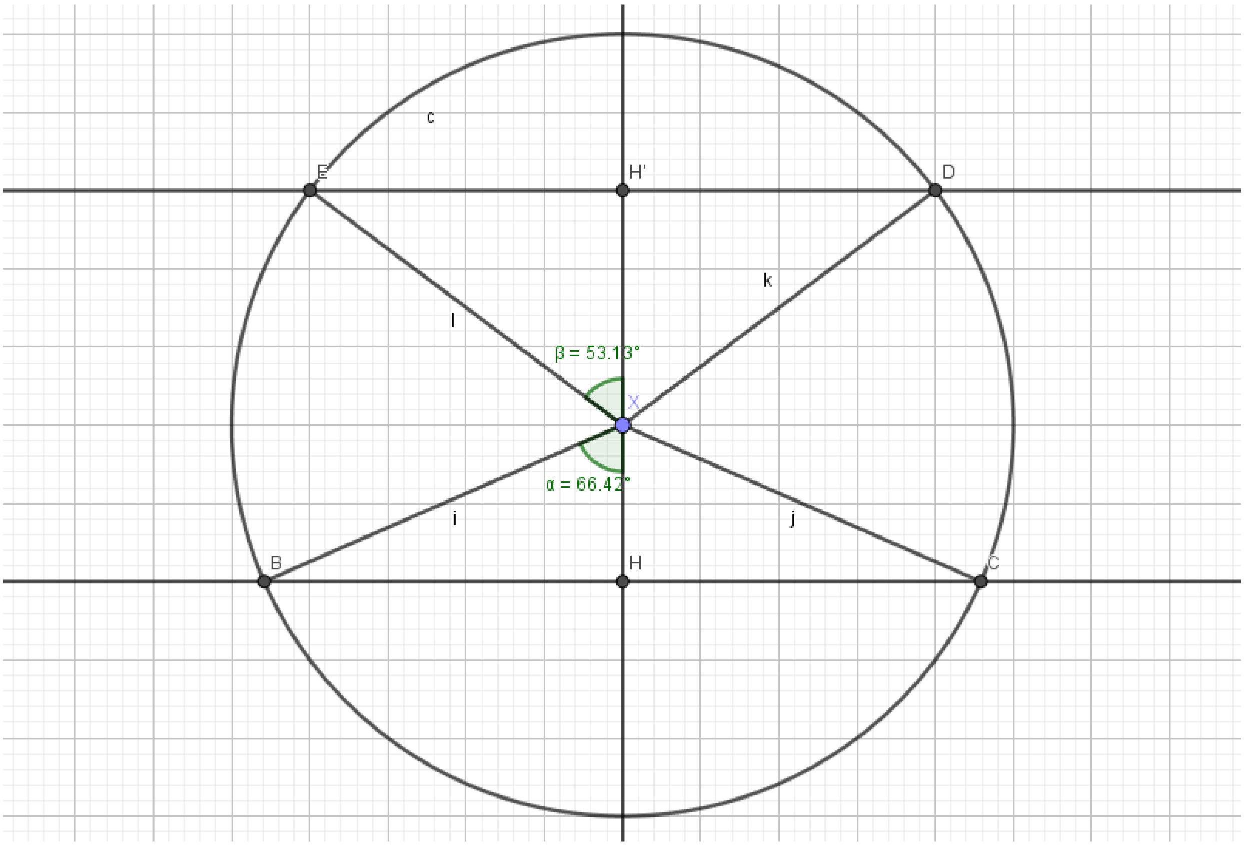
Pour modéliser l'expérience, j'ai choisi de représenter l'aiguille par un segment de longueur a et le parquet par un plan strié de droites parallèles équidistantes les unes des autres. J'ai pris comme unité de longueur la distance la plus courte entre deux droites.

Dans cette représentation, dire que l'aiguille tombe à cheval sur deux lattes revient à dire que le segment représentant l'aiguille coupe une droite.

Pour simplifier les calculs, nous allons considérer que le plan représentant le parquet est uniforme, c'est à dire que tous les points qui le composent sont équivalents, autrement dit l'aiguille à autant de chance de tomber n'importe où sur ce plan et dans n'importe quelle position.

Pour modéliser la chute de l'aiguille on va supposer que sa première extrémité tombe sur un point quelconque du plan que je vais appeler X. L'autre extrémité peut donc tomber n'importe où sur le cercle de centre X et de diamètre a. Je note ensuite x la distance entre X et son projeté orthogonal H sur la droite la plus proche. La distance entre X et son projeté orthogonal H' sur l'autre droite est donc de 1-x.

Je trace ensuite les quatre rayons du cercle dont une des extrémités est l'intersection entre le cercle et une droite. Lorsque l'aiguille tombe quelque part dans la zone colorée, alors elle coupera une droite. J'appelle α l'angle entre l'un de ces rayons et le segment [XH] et β l'angle entre un autre de ces rayons et le segment [XH'].



La probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux lattes lorsque sa première extrémité tombe sur le point X est donc de $\frac{2\alpha+2\beta}{2\pi}$ soit $\frac{\alpha+\beta}{\pi}$.

On remarque que lorsque le point X se déplace horizontalement, les angles α et β ne varient pas, idem lorsqu'il se déplace verticalement d'une unité. Résoudre le problème dans un plan infini revient donc à le résoudre lorsque X se déplace sur un segment à la fois compris entre deux droites parallèles et perpendiculaires à elles.

II. Solution pour a=1

II. 1. Expression de α et β :

Nous allons essayer d'exprimer les angles α et β en fonction de x lorsque a=1. Dans ce cas particulier, le rayon du cercle de centre X sur lequel peut tomber la deuxième extrémité de l'aiguille mesure une unité. L'angle α appartient donc à un triangle rectangle d'hypoténuse 1 et son côté adjacent mesure x unités. D'où

$$cos(\alpha)=\frac{x}{1}\Leftrightarrow\alpha=arccos(x).$$

Avec le même raisonnement, on trouve $\beta=arccos(1-x)$.

La probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux lattes lorsque l'une de ses extrémités tombe sur le point X est donc de :

$$\frac{arccos(x)+arccos(1-x)}{\pi}$$

II. 2. Calcul de l'intégrale :

À présent nous allons calculer la moyenne de cette valeur lorsque x varie entre 0 et 1.

Cela se note $\int_0^1 \frac{arccos(x)+arccos(1-x)}{\pi}dx$ et se lit « intégrale de 0 à 1 de arccos de x plus arccos de 1-x sur π dx ».

Le nombre π étant une constante, on peut l'extraire de l'intégrale.

On peut également développer cette dernière afin de donner l'expression suivante :

$$\frac{\int_0^1 arccos(x)dx+\int_0^1 arccos(1-x)dx}{\pi}$$

On peut remarquer que les variations de l'angle α quand x varie entre 0 et 1 sont les mêmes que celles de l'angle β lorsque x varie entre 1 et 0, d'où

$$\int_0^1 arccos(x)dx=\int_0^1 arccos(1-x)dx$$

On peut prouver cette égalité plus rigoureusement en utilisant un changement de variable, ou plus visuellement en observant les courbes représentatives des fonctions arccos(x) et arccos(1-x) entre 0 et 1.

On remarque immédiatement que ces deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe x = 0,5, donc l'aire sous ces deux courbes est la même entre 0 et 1.

Or l'intégrale d'une fonction positive correspond à l'aire sous la courbe entre deux bornes. Cela confirme donc l'égalité précédente. L'expression à calculer devient donc :

$$\frac{2\int_0^1 arccos(x)dx}{\pi}$$

Nous allons à présent isoler l'intégrale $\int_0^1 arccos(x)dx$.

Pour calculer une intégrale, il suffit de trouver une primitive de la fonction à intégrer, que l'on notera F(x), puis de calculer la différence entre cette primitive en la borne supérieur de l'intégrale et cette primitive en la borne inférieur de l'intégrale autrement dit : $\int_0^1 arccos(x)dx=F(1)-F(0)$ avec F(x) une primitive de la fonction arccos(x).

II. 3. Détermination d'une primitive de la fonction arccos(x) :

Pour trouver cette primitive, qui peut s'écrire ainsi :

$$F(x)=arccos\int \boxed{f_0}(x)dx$$

nous allons faire une intégration par parties.

Pour cela nous allons poser deux fonctions : la première $u(x)=x$, fonction dérivable sur R par $u'(x)=1$, et la deuxième $v(x)=arccos(x)$.

Nous aurons également besoin de la formule de la dérivée d'un produit de deux fonctions : (uv)'=u'v+uv'.

A partir de là, il est possible d'écrire la fonction arccos comme le produit de la fonction u' par la fonction v :

$$\int arccos(x)dx=\int u'(x)v(x)dx$$

et de là on utilise la formule citée précédemment pour obtenir :

$$\int (u(x)v(x))'-u(x)v'(x)dx$$

que l'on développe ensuite pour trouver :

$$\int (u(x)v(x))'dx - \int u(x)v'(x)dx$$

La première partie de cette expression se simplifie aisément car la primitive de la dérivée d'une fonction c'est la fonction elle-même :

$$F(x)=u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)$$

On remplace ensuite les fonctions par leurs expressions :

$$F(x)=x\,arccos(x)-\int x\,v'(x)dx$$

Il nous faut à présent calculer la dérivée de la fonction v(x)=arccos(x).

II. 4. Dérivation de la fonction arccos(x) :

Pour cela, nous allons avoir besoin de la formule de la dérivée d'une fonction composée :

$$f(v(x))'=v'(x)f\;'(v(x)).$$

Nous allons partir de l'égalité :

$$cos(arccos(x))=x$$

puis nous allons dériver des deux côtés du égal en nous servant de la formule précédente :

$$v'(x)\times -sin(arccos(x))=1 \Leftrightarrow v'(x)=\frac{-1}{sin(arccos(x))}$$

Puis, en utilisant les égalités trigonométriques il est aisé de démontrer que $sin(arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$. On a donc $v'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

II. 5. Retour sur le calcul de l'intégrale :

On réintroduit ensuite cette fonction dans notre calcul de primitive :

$F(x)=x\,arccos(x)-\frac{\int -x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ·

En multipliant le numérateur et le dénominateur par deux, on retrouve la formule de la dérivée de la racine d'une fonction, il est donc beaucoup plus simple de la primitiver :

$$\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx=\sqrt{1-x^2}$$

La fonction arccos(x) admet donc comme primitive la fonction

$$F(x)=x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$$

Pour trouver l'intégrale qui nous intéresse, il nous faut calculer F(0) et F(1) :

$F(0)=0\arccos(0)-\sqrt{1-0^2}=-1$

$F(1)=1\arccos(1)-\sqrt{1-1^2}=0$

D'où :

$$\frac{2\int_0^1 \arccos(x)dx}{\pi}=\frac{2(F(1)-F(0))}{\pi}=\frac{2(0-(-1))}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

Donc lorsque la longueur de l'aiguille est égale à la largeur d'une latte de parquet, la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux lattes de parquet est de $\frac{2}{\pi}$.

III. Solution pour a≠1

Lorsque l'on note « a » la longueur de l'aiguille, on peut reprendre le problème de l'expression des angles α et β en fonction de x, mais cette fois l'hypoténuse du triangle rectangle est égal à a : $\cos(\alpha)=\frac{x}{a}\Leftrightarrow\alpha=\arccos(\frac{x}{a})$

III. 1. Pour a<1 :

Lorsque a<1, la fonction f(x)=arccos(x/a) n'est définie qu’entre 0 et a.

On calcul donc l'intégrale de la même manière que pour a=1, à l'exception que l'on remplace x par x/a et les bornes de l'intégrale deviennent 0 et a :

$$\frac{2\int_0^a arcos(\frac{x}{a})dx}{\pi}$$

Lorsque l'on intègre cette fonction, on trouve :

$$\frac{2a}{\pi}$$

Donc lorsque la longueur a de l'aiguille est inférieur à la largeur d'une latte de parquet, la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux lattes est de $\frac{2a}{\pi}$.

III. 2. Pour a>1 :

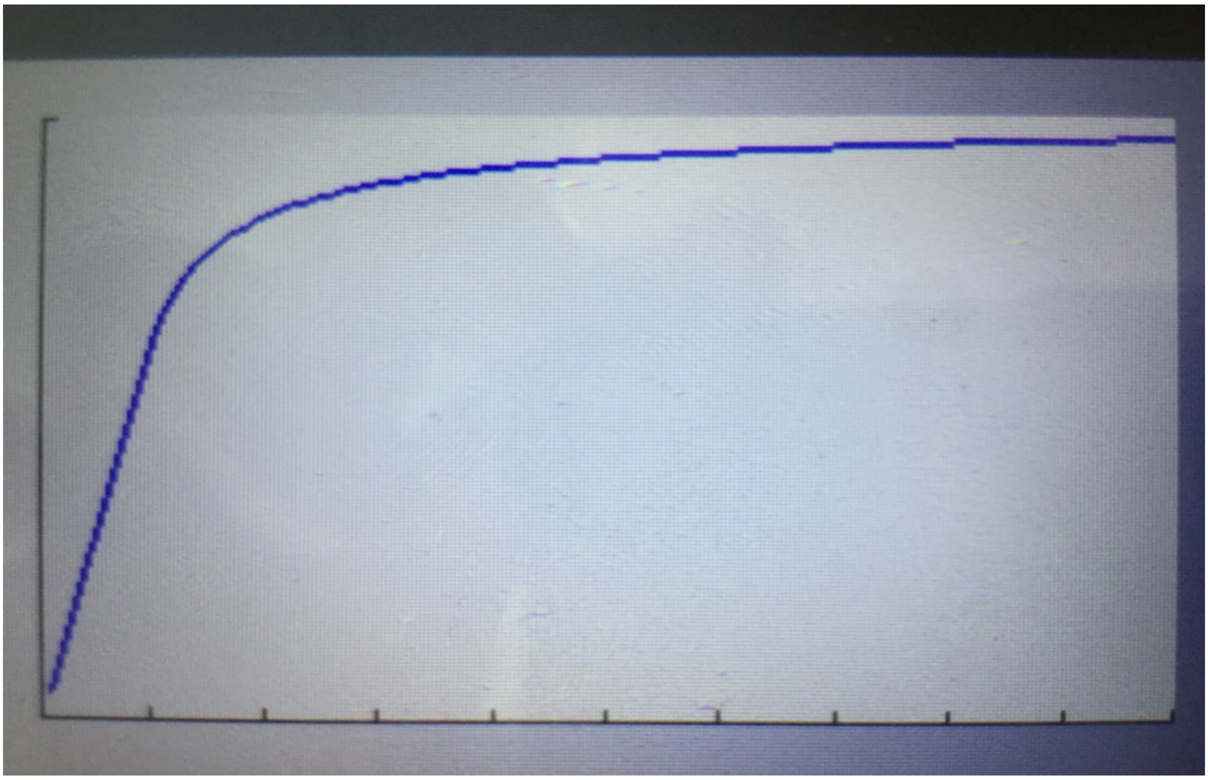
Lorsque a>1, la fonction arccos(x/a) est bien définie entre 0 et 1, on peut donc l'intégrer entre ces deux valeurs comme pour a=1. Cependant lorsque l'on calcule la différence des primitives, celle-ci ne se simplifie plus et donne la formule suivante :

$$\frac{2}{\pi}(arccos(\frac{1}{a})-\sqrt{a^2-1}+a)$$

On remarque que lorsque a varie, le seul élément qui change est la borne supérieure de l'intégrale. On peut donc écrire la formule générale suivante :

$$\forall a>0, \frac{2}{\pi}\int_0^{min(1,a)} arccos(\frac{x}{a})dx$$

est la probabilité théorique qu'une aiguille de longueur a tombe à cheval sur deux lattes de parquet.



Ci-dessus la courbe représentative de la fonction associant la longueur de l'aiguille (entre 0 et 10) à la probabilité que celle-ci tombe à cheval sur deux lattes (entre 0 et 1)

IV. Ouvertures

Il serait intéressant d'essayer de résoudre le même problème avec un sol carrelé, ou plus généralement avec un plan pavé différemment, par exemple avec des triangles équilatéraux ou des hexagones réguliers convexes.

Notes d'édition

Aucune