les fractions continues (2)

par David Bernardo, Mustapha Laajaj et Maig Tran, du collège Victor Hugo de Noisy-le-Grand (93) et du collège André Doucet de Nanterre (92)

enseignants : Martine Brunstein, Danielle Buteau, Marie-Christine Chanudeaud, Pierre Lévy

chercheur : Jacqueline Zizi

[NDLR : voici le texte donné aux élèves en début d'année :]

1. Première direction : à la suite de ce qui a été fait l'an dernier,
• Chercher quels sont les nombres qui ont pour développement en fraction continue (1, 1, 1, …), puis (2, 2, 2, …), (3, 3, 3, …) etc.
• Trouver une formule qui généralise ça et la justifier par des considérations géométriques en reprenant les constructions de l'an dernier.
• Trouver de façon réciproque le développement en fraction continue des nombres algébriques qui s'écrivent sous la forme $\sqrt{a}$ puis sous la forme $b + \sqrt{a}$, puis $(b + \sqrt{a})/c$. Prendre des exemples en rapport avec les exemples manipulés avant.
• Essayer de généraliser pour les développements périodiques plus complexes : avec 2 éléments ou 3, comme (1, 2, 1, 2, 1, 2, …) ou (1, 2, 3, 1, 2, 3, etc …).

2. Deuxième direction : Trouver un processus qui permet de passer directement d'un développement périodique, par exemple (4, 4, 4 etc …) au résultat. Pour cela, partir des relations $p(n) = ap(n - 1) + p(n - 2)$, installer en s'inspirant de la construction du triangle de Pascal, les coefficients sous forme de tableau de $p(2)$ et $q(2)$, puis $p(3)$ et $q(3)$ puis $p(4)$ et $q(4)$ et construire les triangles SSHB (Samia, Salima, Habiba et Barbara) qui seront notre invention.

Deux équipes peuvent travailler en parallèle sur les deux thèmes. L'interaction entre les équipes devrait pouvoir se faire au niveau des résultats.

L'année dernière, un groupe de recherche de notre établissement s'était intéressé aux fractions continues. En voici la forme générale :

$$\overbrace{a}^{\text{partie entière}} + \overbrace{\cfrac{1}{* + \cfrac{1}{* + \cfrac{1}{* + \cfrac{1}{* + \cfrac{1}{\ldots}}}}}}^{\text{partie décimale}}$$

où * représente des entiers quelconques.

L'un des premiers exemples étudiés était :

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ldots}}}}}$$

Pour étudier de telles fractions, ils ont du calculer étape par étape toutes les réduites de cette expression. En voici le résumé :

Etape n° 1

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3{,}142857$$

Etape n° 2

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106} \approx 3{,}141509$$

Etape n° 3

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} \approx 3{,}1415929$$

Etape n° 4

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292}}}}=\frac{103993}{33102}\approx 3{,}1415927$$

Nous reconnaissons là les six premières décimales de π que l'on obtient ici avec une très grande rapidité. En fait, derrière chaque fraction continue se cache un nombre dont on peut trouver les décimales les unes après les autres avec de la patience. Nous vous renvoyons à l'article de nos camarades pour de plus précises informations sur la nature de leurs travaux.

Cette année, nous avons décidé d'étudier deux types de fractions continues très précis :

TYPE 1

$$1+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\dots}}}$$

TYPE 2

$$a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\dots}}}$$

Manipuler les fractions continues conduit très vite à effectuer des calculs énormes. Pour vous en convaincre, voici le calcul de la 4ème étape pour la fraction continue A :

$$A=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

$$A=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{5}{2}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{10}{5}+\frac{2}{5}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{12}{5}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\frac{5}{12}}=1+\cfrac{1}{\frac{24}{12}+\frac{5}{12}}$$

$$=1+\cfrac{1}{\frac{29}{12}}=1+\frac{12}{29}=\frac{29}{29}+\frac{12}{29}=\frac{41}{29}$$

OUF !

$$A=\frac{41}{29}$$

Il est clair qu'il est impossible de se contenter d'effectuer des calculs aussi fastidieux pour essayer de trouver quels sont tous les nombres qui se cachent derrière les fractions de ce type. Il faut donc absolument trouver une méthode permettant d'économiser des étapes de calculs.

Pour simplifier les notations, nous écrirons (1, a, a, a, …) et (a, a, a, a, …) les fractions continues de types 1 et 2.

Nous avons alors calculé les différentes étapes de la fraction continue (1, 1, 1, 1, …), puis de la fractions continue (2, 2, 2, 2, …) puis de la fraction continue (3, 3, 3, 3, …). Nous cherchions à trouver un moyen général de passer d'une étape à la suivante sans faire le calcul.

Nous avons ainsi établi ***notre première conjecture*** :

Pour les fractions du type 2, c'est-à-dire celles que l'on notera (a, a, a, a, …), si à l'étape e la fraction irréductible trouvée est $\frac{n}{d}$ alors à l'étape e+1, la fraction sera $\frac{an+d}{n}$

Vérifions le pour les premières étapes de la fraction (2, 2, 2, 2, …) :

		Fraction irréductible obtenue par un calcul "à la main" : $\frac{n}{d}$	(calcul de $\frac{2n+d}{n}$)
Etape 1	$2+\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2\times 5+2}{5}=\frac{12}{5}$
Etape 2	$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2\times 12+5}{12}=\frac{29}{12}$
Etape 3	$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$	$\frac{29}{12}$	$\frac{2\times 29+12}{29}=\frac{70}{29}$
Etape 4	$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$	$\frac{70}{29}$	$\frac{2\times 70+29}{70}=\frac{169}{70}$

Nous avons vérifié cette conjecture sur de nombreux autres exemples grâce à un petit logiciel que nous a gentiment fourni à notre demande Mme Zizi, la mathématicienne qui a travaillé avec nous.

Nous avons cherché à démontrer cette conjecture. Nous l'avons fait pour passer de l'étape 1 à l'étape 2.

$$a+\frac{1}{a}=\frac{a^2+1}{a} \text{ et } a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}=\frac{a^3+2a}{a^2+1}$$

Appliquons notre formule avec ici $n = a^2 + 1$ et $d = a$; on a :

$$\frac{a\,n+d}{n}=\frac{a\left(a^2+1\right)+a}{a^2+1}=\frac{a^3+2a}{a^2+1}$$

Il s'agit bien de la fraction obtenue à l'étape 2. Cela renforce notre conjecture mais il faudrait le vérifier à une étape quelconque.

Pour les fractions du type 1, c'est-à-dire celles que l'on notera $(1, a, a, a, \ldots)$, si à l'étape e la fraction irréductible trouvée est $\frac{n}{d}$ alors à l'étape $e + 1$, la fraction sera :

$$\boxed{\frac{a\,d+n}{(a-1)\,d+n}}$$

Cette conjecture a été vérifiée sur de nombreux exemples et sur la première étape :

$$1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a} \text{ et } 1+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}=\frac{a^2+a+1}{a^2+1}$$

Appliquons notre formule avec ici $n = a + 1$ et $d = a$; on a :

$$\frac{a\,d+n}{(a-1)\,d+n}=\frac{a^2+a+1}{(a-1)\,a+a+1}=\frac{a^2+a+1}{a^2+1}$$

Bien entendu, là encore il faudrait pouvoir le vérifier à une étape quelconque.

Les fractions étudiées ont exactement la même partie décimale ; cela nous a donné l'idée de réaliser la même étude sur cette partie décimale.

Si on retranche a à la fraction continue

$$a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}}}$$

on obtient la partie décimale de cette fraction, c'est-à-dire :

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}}}$$

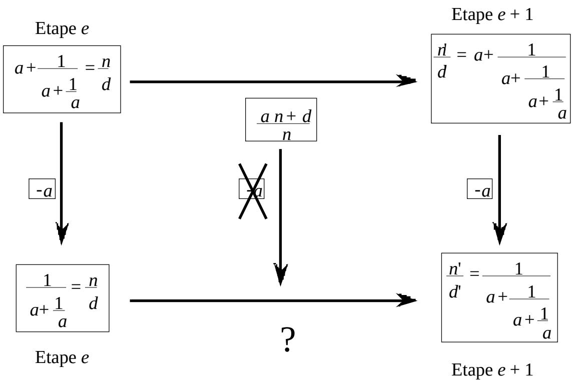
Or nous avions une formule nous permettant de passer d'une étape à la suivante : $\frac{an+d}{n}$.

Nous avons eu l'idée de retrancher a dans cette formule et nous avons obtenu la formule $\frac{d}{n}$.

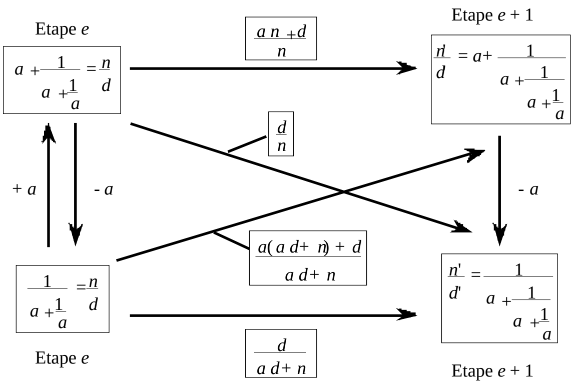
Nous pensions ainsi avoir trouvé la bonne solution. Mais il est facile de constater que cela est faux. Il suffit de prendre un exemple :

		Fraction irréductible obtenue par un calcul "à la main" : $\frac{n}{d}$	(calcul de) $\frac{d}{n}$
Etape 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$
Etape 2	$\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{5} \neq \frac{2}{1}$	

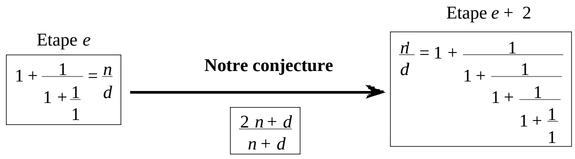
En fait, cela s'explique très simplement grâce à un diagramme.

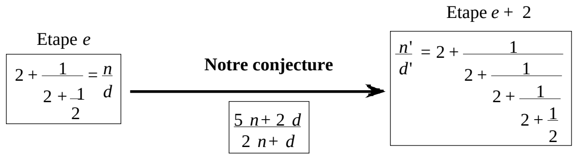


En fait, le bon diagramme est le suivant :

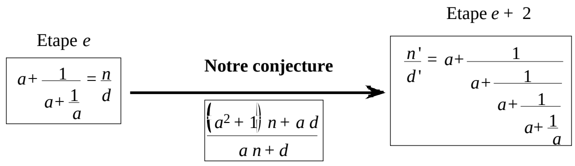


Après ce premier succès, nous avons essayé de passer de l'étape e à l'étape e + 2. Nous avons alors repris nos exemples et nous avons reconstruit une nouvelle conjecture pour la fraction (1, 1, 1, 1, …) et la fraction (2, 2, 2, 2, …).

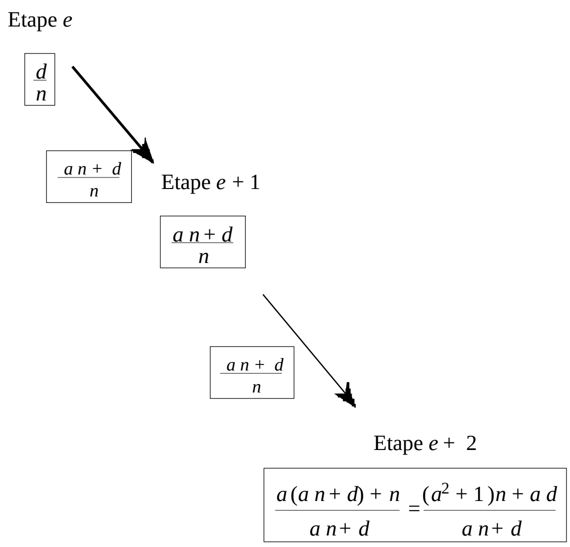




Après avoir réfléchi, il est facile d'établir la conjecture générale que voilà :

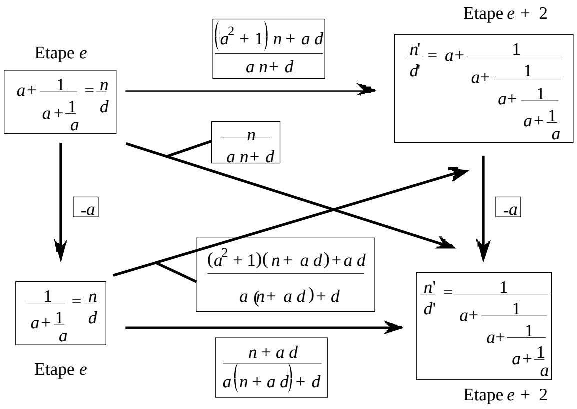


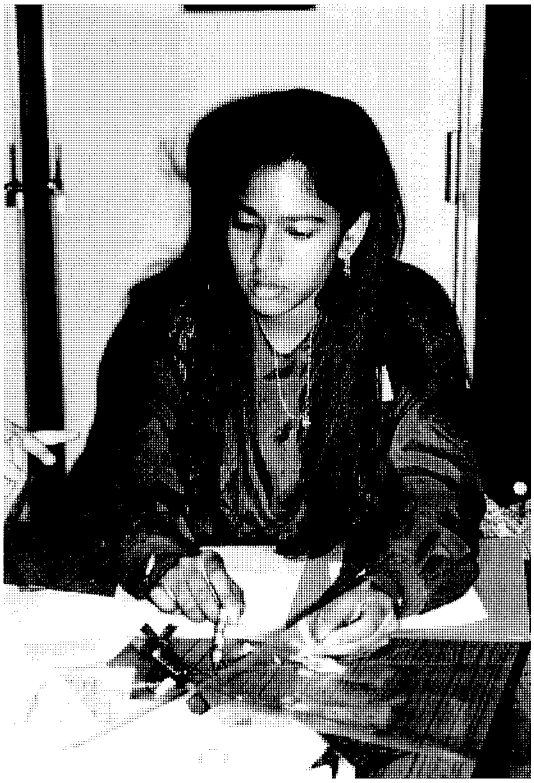
Pour le prouver, il suffit d'appliquer deux fois consécutives la formule permettant de passer d'une étape e à une étape e + 1.



Nous pouvons là encore construire un diagramme …

Nous pouvons là encore construire un diagramme :





Puisqu'il est possible de passer de l'étape e à l'étape $e + 2$, en appliquant deux fois consécutives le procédé, il sera possible de passer de l'étape e à l'étape $e + 4$, puis directement à l'étape $e + 8$, puis …

Hélas, l'année scolaire se termine et avec elle cette recherche qui n'est pas aboutie. En effet, nous ne savons encore pas comment passer de l'étape e à l'étape $e + n$, où n est un entier arbitrairement choisi.