les fractions continues (1)

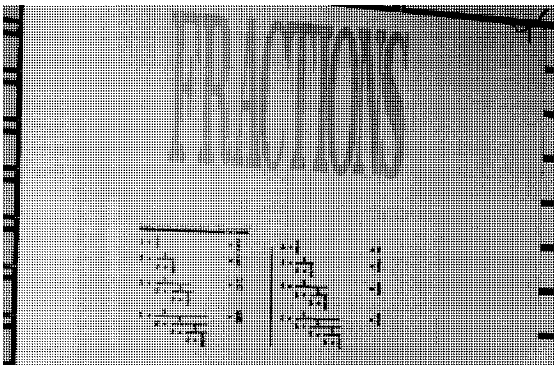
par Audrey Aubert, Catherine Kirchgessner, Sabrina Potier, élèves de 2nde du lycée Georges Braque d'Argenteuil (95)

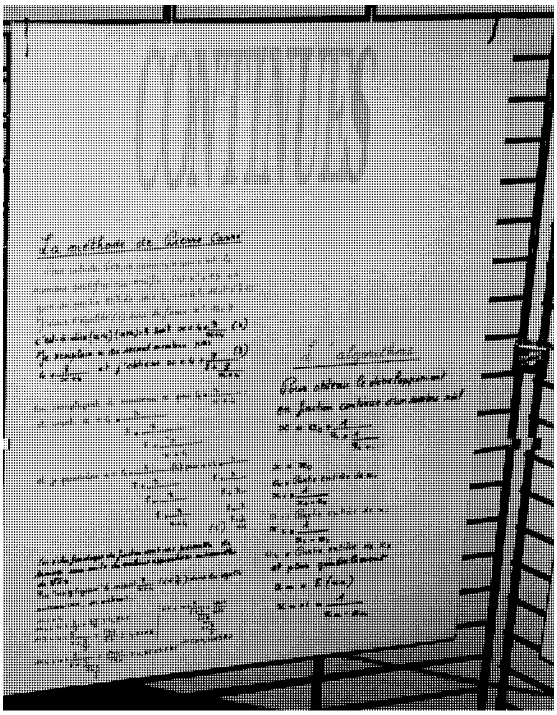
enseignante : Joëlle Richard

chercheur : Michèle Vergne

Compte-rendu de l'exposé par les parrains du groupe : **lycée J. Jaurès**

Sous forme de fraction, on se propose d'effectuer une approximation d'un nombre rationnel. [NDLC : c'est bien ce qui est écrit]





Notre objectif est d'obtenir une valeur approchée d'un nombre réel et ceci pas nécessairement à l'aide d'un développement décimal, comme il nous est naturel et habituel de la faire. Une autre manière, plus ancienne, utilise une approximation par des fractions ; nous définirons plus loin ce qu'on appelle un développement en fraction continue d'un nombre réel.

Avant d'utiliser la méthode classique de développement en fraction continue, nous avons cherché des valeurs approchées successives de $\sqrt{2}$ en utilisant le procédé suivant :

on pose d'abord : $y = \dfrac{x+2}{x+1}$

puis on calcule : $z = \dfrac{y+2}{y+1}$

puis : $t = \dfrac{z+2}{z+1}$

ce qui revient à calculer les termes d'une suite dont le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme noté u_{n+1} est lié au précédent u_n par la formule :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$$

Si on prend x ou $u_0 = 1$, on a successivement

$$\frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$\frac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1} = \frac{17}{12} = 1{,}41666\ldots$$

$$\frac{\frac{17}{12}+2}{\frac{17}{12}+1} = \frac{41}{29} = 1{,}41379\ldots$$

$$\frac{\frac{41}{29}+2}{\frac{41}{29}+1} = \frac{99}{70} = 1{,}41428\ldots$$

$$\frac{\frac{99}{70}+2}{\frac{99}{70}+1} = \frac{239}{169} = 1{,}4142012\ldots$$

$$\frac{\frac{239}{169}+2}{\frac{239}{169}+1} = \frac{577}{408} = 1{,}41215\ldots$$

$$\frac{\frac{577}{408}+2}{\frac{577}{408}+1} = \frac{1393}{985} = 1{,}4142132\ldots$$

$$\frac{\frac{1393}{985}+2}{\frac{1393}{985}+1} = \frac{3363}{2378} = 1{,}4142136\ldots$$

$$\frac{\frac{3363}{2378}+2}{\frac{3363}{2378}+1} = \frac{8119}{5741} = 1{,}41421355\ldots$$

Nous remarquons que nous obtenons des valeurs de plus en plus proches de la valeur approchée de $\sqrt{2}$ donnée par la calculatrice.

Puis nous avons essayé d'approcher $\sqrt{2}$ d'une autre manière. Nous savons que $\sqrt{2} > 1$; nous pouvons donc poser :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$$

où x est un réel qui est supérieur à 1. On en déduit :

$$\frac{1}{x} = \sqrt{2} - 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1}$$

donc $x = \sqrt{2} + 1$. Remplaçons $\sqrt{2}$ par $1 + \frac{1}{x}$; on obtient :

$$x = 1 + \frac{1}{x} + 1$$

$$x = 2 + \frac{1}{x}$$

et ainsi de suite on remplace x par $2 + \frac{1}{x}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

« *Les petits points peuvent faire marcher notre imagination.* »

Cette manière d'écrire $\sqrt{2}$ est ce qu'on appelle une fraction continue.

Si on tronque cette fraction continue, on obtient des fractions successives : les réduites du nombre $\sqrt{2}$.

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}} = \frac{7}{5}$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}} = \frac{17}{12}$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{41}{29}$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} = \frac{99}{70}$$

Nous constatons que nous obtenons les mêmes résultats que dans la méthode précédente, ce qui est normal, car on peut démontrer qu'entre deux réduites successives, on a aussi la relation

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$$

Donnons maintenant la définition générale d'une fraction continue.

Si x est un nombre réel et qu'on peut écrire

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

$$r_0 = a_0$$

$$r_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$r_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

etc …

alors on dit qu'on a développé x en fraction continue. On obtient ce que l'on appelle des *réduites* de la fraction continue.

D'une manière générale, voici comment obtenir a_0, a_1, etc …

$x = a_0 + \frac{1}{v_1}$ où a_0 partie entière de x, $v_1 > 1$.

Si a_1 est la partie entière de v_1, alors :

$$v_1 = a_1 + \frac{1}{v_2} \text{ et}$$

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{v_2}} \text{ etc …}$$

Si a_2 est la partie entière de v_2, alors :

$$v_2 = a_2 + \frac{1}{v_3} \text{ et}$$

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{v_3}}} \text{ etc …}$$

Prenons l'exemple de $\sqrt{13}$ [méthode A]

$$x = \sqrt{13} = 3 + (\sqrt{13} - 3) = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{13} - 3}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13} + 3}{4}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{13} - 1}{4}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13} - 1}{4}}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{\sqrt{13} - 1}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13} + 1}{3}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{13} - 2}{3}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1+ \cfrac{1}{1+ \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13} - 2}{3}}}}} = 3 + \cfrac{1}{1+ \cfrac{1}{1+ \cfrac{1}{\cfrac{3}{\sqrt{13} - 2}}}}$$

$$= 3+ \cfrac{1}{1+ \cfrac{1}{1+ \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13} + 2}{3}}}} = 3+ \cfrac{1}{1+ \cfrac{1}{1+ \cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{13} - 1}{3}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{13} - 3}{4}}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13} + 3}{4}}}}}}}$$

On peut se reporter à la deuxième ligne du calcul. Donc le développement est périodique.

Les valeurs des réduites :

$$r_0 = 3$$

$$r_1 = 3 + \frac{1}{1} = 4$$

$$r_2 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = 3 + \frac{1}{2} = 3{,}5 = \frac{7}{2}$$

On procède comme précédemment :

$$r_3 = \frac{11}{3}$$

$$r_4 = \frac{18}{5}$$

$$r_5 = \frac{119}{33}$$

$$r_6 = \frac{137}{38}$$

On pourrait continuer encore.

Au lieu d'utiliser cette méthode générale, on peut essayer de trouver autrement des valeurs approchées de √13 ; on remarque que √13 est un [NDLR : ***le***] nombre positif x qui vérifie l'équation $x^2 = 13$.

$x^2 = 9 + 4$ d'où $x^2 - 9 = 4$ [méthode B]
$(x - 3)(x + 3) = 4$ soit

$$x - 3 = \frac{4}{x + 3}$$

$$\text{ou } x = 3 + \frac{4}{x + 3}$$

Je remplace x du second membre par

$3 + \dfrac{4}{x + 3}$ et j'obtiens :

$$x = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{x + 3}}$$

En remplaçant à nouveau x par $3 + \dfrac{4}{x + 3}$:

$$x = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{x + 3}}}$$

et encore :

$$x = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{x + 3}}}}$$

etc … (réduites : 11/3, 39/11, …)

Pour terminer, on peut dire qu'on obtient ainsi de jolis développements pour des racines carrées, en même temps qu'on s'approche d'une manière intéressante et rapide de la valeur d'un réel, en tous cas quand il est de la forme √n. Il nous resterait à comparer les deux types de réduites de √13 par les méthodes A et B. Certaines fractions sont les mêmes, mais pas nécessairement au même rang.