Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

# Les fractions égyptiennes

Année 2022-2023

Andréa Téton, élève de première et Bénédicte Brun-Pouysegur, élève de seconde

**Établissement :** Lycée Raynouard, Brignoles

**Enseignant·es :** Denis Guicheteau, Nelly Mourau, Marc Brunet

**Chercheurs :** Frédéric Havet, INRIA, Thierry Champion, Université de Toulon.

## 1. Les fractions égyptiennes

On cherche à démontrer qu'une fraction quelconque est divisible (1) en somme de fractions égyptiennes. Pour ce faire nous nous sommes posés la question : « Peut-on décomposer une fraction non unitaire inférieure à 1 en somme de fractions égyptiennes toutes différentes ? »

Mais avant ça, qu'est-ce que des fractions égyptiennes ?

Une fraction égyptienne est une fraction qui a pour numérateur 1 et un dénominateur entier positif. Nous voulons que ces sommes de fractions égyptiennes aient toutes des dénominateurs différents.

Avant cela, faisons un petit point mythologique et historique :

Les Égyptiens utilisaient des fractions dont le numérateur est égal à 1. Cela était principalement utilisé pour le commerce ou le partage des terres.

La légende raconte que l'œil d'Horus lui fut arraché par un dieu puis découpé en plusieurs morceaux avant d'être jeté dans le Nil. Thot en retrouva 6 morceaux(6 fractions égyptiennes) qui composent le symbole de l'œil d'Horus mais il manque $\frac{1}{64}$ pour faire l'unité. Alors un dieu lui donna un lien magique pour qu'il retrouve son unité.

De plus, les Egyptiens avaient à leur disposition des tablettes pour leur permettre de décomposer directement les fractions non unitaires (avec numérateur supérieur à 1) en fractions unitaires. Comme on peut le voir sur le papyrus de Rhind qui répertorie les fractions “double” ou de "$\frac{2}{n}$" avec $n$ impair et donne leur équivalent en somme de fractions unitaires. On y retrouve les fractions dont le numérateur est 2 et dont le dénominateur varie de 3 à 101.

Quelques exemples :

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

## 2. Les débuts

Nous avons commencé en prenant le problème à l'envers.
Que se passe-t-il quand on ajoute 2 fractions égyptiennes ?

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$$

Or

$4+5=9$
$4\times 5=20$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$$

Or

$3+8=11$
$3\times 8=24$

Dans ces deux cas, on constate que la somme des deux dénominateurs donne le numérateur du résultat et le produit des deux dénominateurs donne le dénominateur du résultat.

## 3. Conclusion des premiers essais

Propriété 1 :

$$\frac{a+b}{a\times b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

Démonstration 1 :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{a+b}{a\times b}$$

On met au même dénominateur

Donc, les fractions de ce type se décomposent en somme de 2 fractions égyptiennes.

### 3.1. Fractions égyptiennes

Nous avons essayé de décomposer des fractions égyptiennes en somme de fractions égyptiennes.

Nous avons trouvé :

Propriété 2 :

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

Il est possible de décomposer une fraction égyptienne en somme de la même fraction égyptienne.

Exemple :

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

Et on décompose chaque $\frac{1}{8}$ avec la formule trouvée dans la propriété 2 :

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8\times 9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8\times 9}$$

Et on recommence pour chaque fraction identique, on trouve à la fin :

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}+\frac{1}{10}+\frac{1}{90}+\frac{1}{73}+\frac{1}{5256}$$

C'est une décomposition assez longue.

### 3.2. Chercher une décomposition plus courte

Il a donc été question de trouver une décomposition plus rapide.
On soustrait la fraction égyptienne la plus grande possible. Puis on recommence avec la fraction obtenue jusqu'à ce qu'on obtienne une fraction égyptienne.

Exemples:

Décomposition de $\frac{3}{8}$

$\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{8}>\frac{1}{3}$

$\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$

Donc

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

de $\frac{11}{13}$

$\frac{11}{13}>\frac{1}{2}$ $\frac{11}{13}-\frac{1}{2}=\frac{9}{26}$

$\frac{9}{26}>\frac{1}{3}$ $\frac{9}{26}-\frac{1}{3}=\frac{1}{78}$

Donc

$$\frac{11}{13}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{78}$$

Résultat 3 : La décomposition n'est pas unique.

Cette méthode semble permettre d'avoir une décomposition avec un minimum de fractions égyptiennes.

### 3.3. Notre algorithme Python

Pour éviter de devoir tout calculer à la main, nous avons élaboré un programme python. Dans ce programme, on demande $a$ et $b$ (fraction $\frac{a}{b}$) avec $a < b$.
Ensuite, tant qu'on n'est pas arrivé à une fraction simplifiée du type $\frac{1}{n}$,
on cherche la plus grande fraction égyptienne que contient $\frac{a}{b}$.
On remplace alors $a$ par $an - b$ et $b$ par $bn$ car $\frac{a}{b}-\frac{1}{n}=\frac{an-b}{bn}$

Programme Python.

```
from math import*
def decomposition():
    n=2
    a=int(input("a ?"))
    b=int(input("b ?"))
    while b%a!=0 :


        while n*a-b<0
            n=n+1
        a=a*n-b
        b=b*n
        print(n)
    print(b//a)
```

## 4. Est-on certain que le programme s'arrête ? (2)

Pour cela, nous avons appliqué le programme manuellement sur un exemple :

| $a =$ | 7 | $b =$ | 8 | $n =$ | 2 | Début |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $7 \times 2 - 8 =$ | 6 | $8 \times 2 =$ | 16 | | 2 | |
| $6 \times 3 - 16 =$ | 2 | $16 \times 3 =$ | 48 | | 3 | |

Nous avons observé que les valeurs de $a$ diminuaient.

Montrons ce point :
Dans le programme, on cherche l'entier $n$ le plus petit possible tel que $an - b$ soit positif
Ainsi $an$ est le plus petit multiple de $a$ dépassant $b$.
Ainsi $an - b < a$ car sinon, on aurait $an - b \geq a$ et donc $an - b - a \geq 0$ d'où $a(n-1) - b \geq 0$ ce qui voudrait dire qu'il y a une valeur plus petite que $n$ qui vérifie notre condition d'arrêt. Ce qui est impossible.
Donc $an - b < a$, ainsi nos valeurs de $a$ successives diminuent, et comme il s'agit d'entiers supérieurs à 1, notre programme finira forcément par s'arrêter.

Petite précision :
Notre condition d'arrêt finale est $b\%a \,! = 0$. Cela a pour but de détecter si nous avons une fraction égyptienne sous forme non simplifiée. Dans ce cas, le dénominateur est multiple du numérateur.

## 5. Conclusion

Nous avons trouvé des techniques pour décomposer toutes les fractions inférieures à 1 en somme de fractions égyptiennes.
Mais nous ne sommes pas encore sûres d'avoir la décomposition la plus courte possible.
Nous avons aussi montré que cette décomposition n'est pas unique. (3)

### Notes d'édition

(1) Le mot utilisé, « divisible », est mal choisi. Il s'agit d'écrire ici une fraction comme *somme* d'autres fractions. Le mot « divisible » est à prendre au sens de « fractionner ».

(2) Une très bonne question qu'il ne faut pas oublier de se poser dans ce genre lorsqu'on fait un programme.

(3) À ce propos on pourrait par exemple se poser la question du nombre de façons de décomposer une fraction donnée en somme d'un nombre fixé de fractions égyptiennes. Par exemple combien de décompositions de $2/45$ comme somme de deux fractions égyptiennes existe-t-il ? Les expliciter.