Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

La formule d'Euler

Année 2018 - 2019

Kilpéric COURILLEAU, Thibaut DEBUISCHERT, Inès DESO, Inès NIMIER (élèves de 3ème).

Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).

Encadrés par : Florence Ferry et Claudie Asselain.

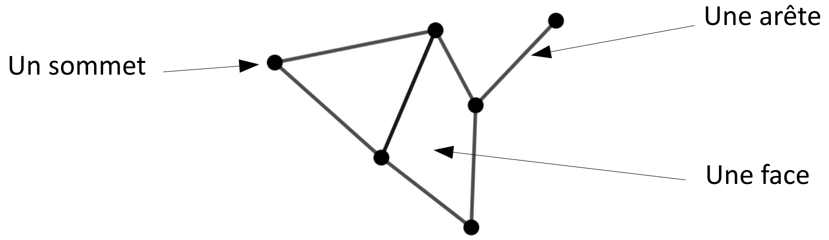
Chercheur: Raphaël Tinarrage (Université Paris Sud) .

<u>Le sujet</u> : Un graphe planaire est obtenu de la façon suivante : on choisit des points du plan appelés sommets. On peut ensuite choisir de relier les points distincts par des segments appelés arêtes, telles qu'elles ne s'intersectent pas. On appelle face du graphe une région du plan entourée par des segments. Que dire de la quantité suivante :

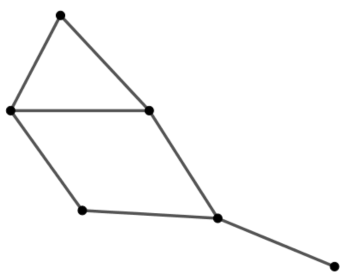
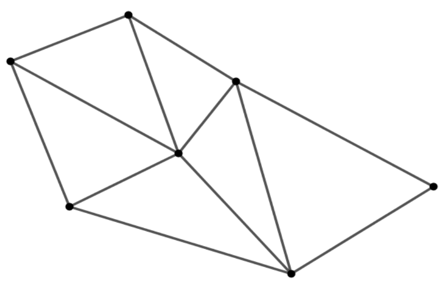
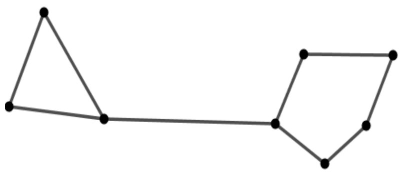
nombre de faces – nombre d'arêtes + nombre de sommets ?

I – Exemples et conjecture

Vocabulaire :



Dans la suite, nous noterons F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets.
Le résultat de la quantité cherchée sera noté χ : $\chi = F - A + S$.

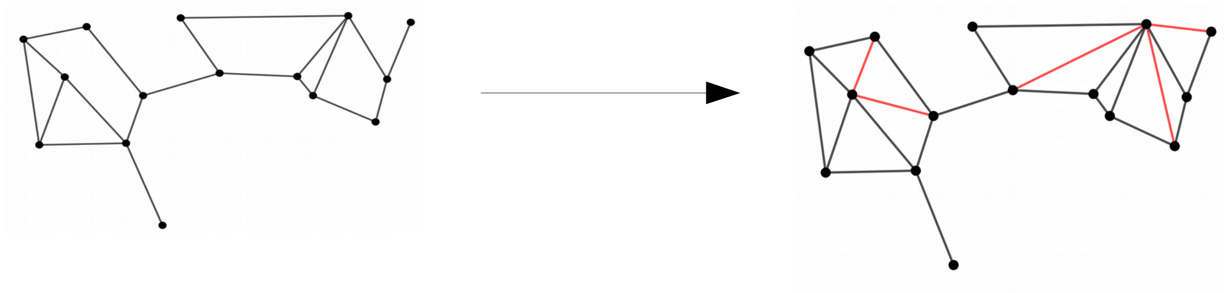
Exemple 1 :	Exemple 2 :	Exemple 3 :
		
F = 2, A = 7 et S = 6	F = 6, A = 12 et S = 7	F = 2, A = 9 et S = 8
On a donc : $\chi = 2 - 7 + 6 = 1$	On a donc : $\chi = 6 - 12 + 7 = 1$	On a donc : $\chi = 2 - 9 + 8 = 1$

Conjecture : Pour un graphe planaire donné, χ est égal à 1.(1)

II – La démonstration

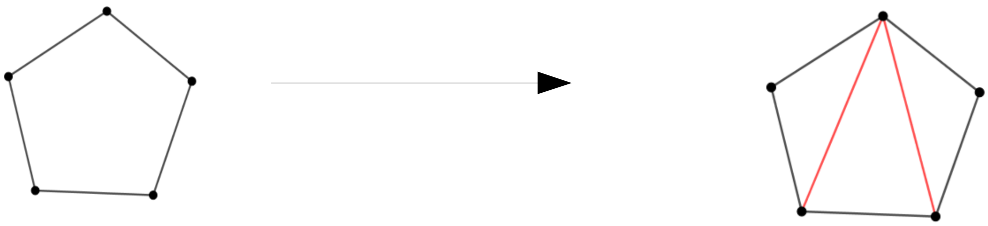
Remarque : Si on prend un triangle, $F = 1$, $A = 3$ et $S = 3$. Donc : $\chi = 1$.

1) Triangulation
Prenons un graphe quelconque ; nous allons rajouter des arêtes pour le découper en triangles.



Transformer un graphe en figure ne comportant que des triangles est toujours possible. Nous allons démontrer maintenant le χ du graphe ainsi transformé est le même que celui du graphe de départ.

Prenons un polygone à n sommets avec $n > 3$.



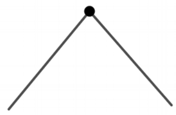
Pour découper ce polygone en triangles, il faut ajouter $n – 3$ arêtes ; on crée alors $n – 2$ triangles ce qui ajoute $n – 3$ faces et il y a toujours n sommets.(2)
χ de la nouvelle figure devient :
$\chi' = (F + n – 3) – (A + n – 3) + S = F + n – 3 – A – n + 3 + S = F – A + S = \chi$
Le χ de la figure de départ n'a pas changé.
Donc en ajoutant des arêtes sur un graphe quelconque de façon à n'avoir que des triangles (éventuellement séparés par des arêtes), le χ reste inchangé.

2) Simplification
Nous allons maintenant simplifier le graphe ainsi fait, dont toutes les faces sont des triangles, sans changer son χ.

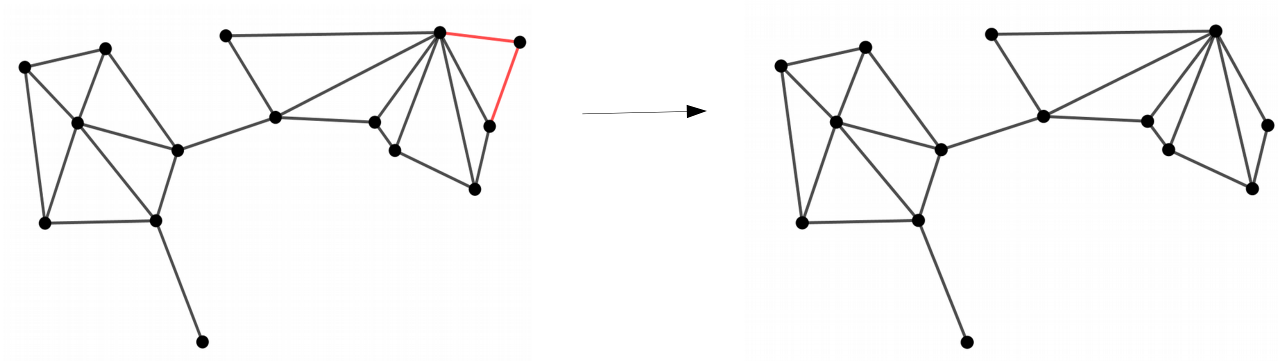
Cas 1 : suppression des arêtes

On supprime n sommets et n arêtes :
Le χ devient : $\chi' = F – (A – n) + (S – n) = F – A + n + S – n = F – A + S = \chi$ Il reste inchangé.

Cas 2 : suppression d’un « chapeau »



Par exemple :

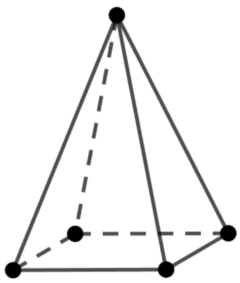
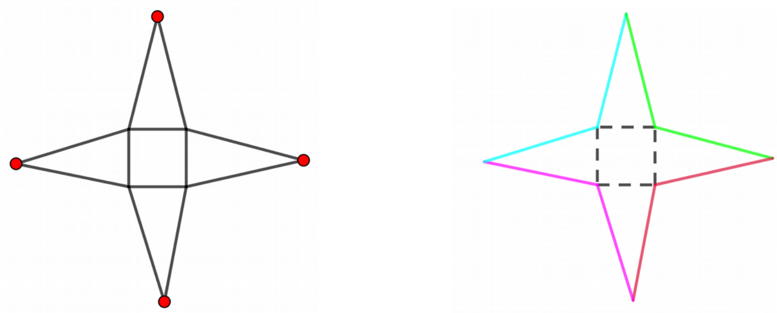


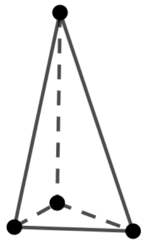
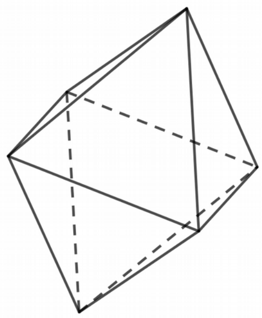
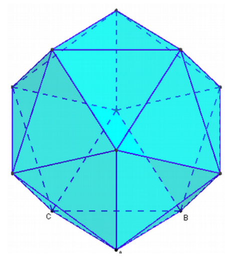
Dans ce cas, on enlève 1 face, 1 sommet et 2 arêtes.
Le χ devient : $\chi' = F - 1 - (A - 2) + (S - 1) = F - 1 - A + 2 + S - 1 = F - A + S = \chi$ Il reste inchangé.
Cas 3 : suppression d’une arête(3)
On peut également supprimer uniquement une arête ; dans ce cas on enlève une face et une arête(4) mais le nombre de sommets ne change pas.
Le χ devient : $\chi' = F - 1 - (A - 1) + S = F - 1 - A + 1 + S = F - A + S = \chi$ Il reste inchangé.

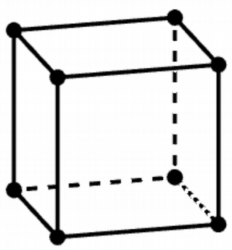
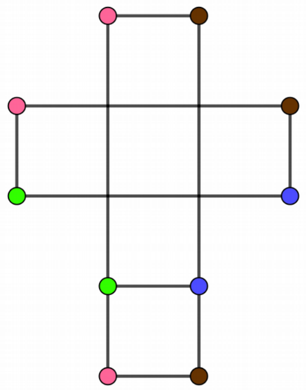
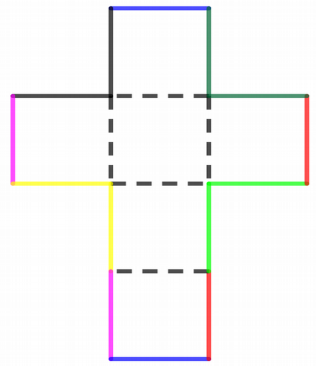
En combinant toutes ces simplifications, le graphe de départ peut être simplifié à un triangle(5) et donc un graphe quelconque a le même χ qu'un triangle c'est à dire 1.
(6)

III – En dimension 3

Nous allons maintenant observer si la formule est encore vraie avec des solides.

Exemple 1 : Pyramide a base carré  $F = 5$, $A = 8$ et $S = 5$. On a : $F - A + S = 5 - 8 + 5 = 2$	Nous obtenons 1 de plus au résultat. Nous pouvons l’expliquer avec le patron :  Par rapport au patron, le solide aura 3 sommets en moins (4 points sur le patrons n’en forment plus qu’un sur le solide) et 4 arêtes en moins (les arêtes latérales adjacentes sur le patron n’en forment plus qu’une sur le solide).
Exemple 2 : tétraèdre	Exemple 3 : octaèdre Exemple 4 : icosaèdre

 F = 4, A = 6 et S = 4. On a : F – A + S = 4 – 6 + 4 = 2	 F = 8, S = 6 et A = 12 F – A + S = 8 – 12 + 6 = 2	 F = 20, S = 12 et A = 30 F – A + S = 20 – 30 + 12 = 2

Exemple 5 : Le cube  F = 6, A = 12 et S = 8. On a : F – A + S = 6 – 12 + 8 = 2	Nous pouvons, comme pour l'exemple 1, l'expliquer avec le patron :   Sur le patron : le nombre de faces est inchangé, A = 19 (+7 par rapport au solide) et S = 14 (+6 par rapport au solide).

Conclusion : Pour les solides, le χ semble être toujours égal à 2. Nous ne l'avons pas démontré mais nous remarquons qu'en traçant le patron du solide, la différence entre les sommets supplémentaires et les arêtes supplémentaires est égale à 1, ce qui rajoute 1 à notre χ trouvé dans la partie I et II.

Notes d'édition

(1) Si le graphe planaire est constitué de 2 morceaux séparés (on dit 2 composantes connexes), par exemple 2 sommets sans arête, alors la formule d'Euler donne $\chi = 2$. Si le graphe planaire est constitué de *k* composantes connexes, alors $\chi = k$. La formule énoncée est donc fausse pour un graphe planaire général. Il faut ajouter l'hypothèse « connexe », c'est-à-dire en un seul morceau.

(2) Quelles arêtes faut-il ajouter ? Est-on sûr qu'elles ne vont jamais intersecter le polygone ? Rien n'est moins sûr : considérer par exemple un polygone avec beaucoup de côtés et avec un « creux » (non convexe). La triangulation demande quelques précautions supplémentaires.

(3) Il faut lire « suppression d'une arête refermant une face ».

(4) Effectivement, on enlève une face si l'arête referme cette face. Au passage, cette hypothèse (arête refermant une face) empêche qu'on coupe le graphe en deux morceaux ; la formule alors ne serait plus valide (voir la première note d'édition).

(5) Ici il manque un gros argument. Est-on sûr de pouvoir simplifier n'importe quel graphe planaire en un triangle en combinant les 3 cas ? Par où commencer en pratique ? Peut-on toujours enlever un chapeau ou une arête, et ce, sans nuire à la connexité du graphe ? De plus, vouloir absolument se ramener à un triangle est une erreur : voir le cas d'un graphe planaire à 1 ou 2 sommets, ou à *n* sommets reliés en « chaîne ».

(6) Etant donné les remarques de la note précédente, la démonstration présentée dans cette partie est tout à fait incomplète.