RECHERCHE D'EXTREMA …

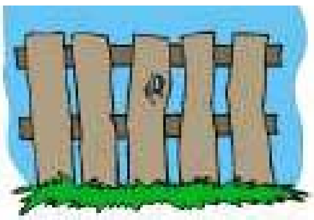
par

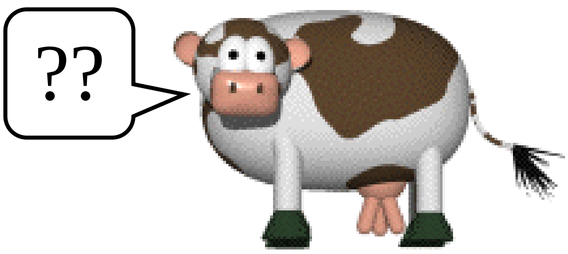
Frédérique BIZART, Fanny DAMIENS, Ismahane HEMMALI,
Amandine KAMINSKI et Delphine PARTIKA,
élèves de troisième
au collège Adulphe DELEGORGUE de Courcelles lès Lens (Pas de Calais)

2003

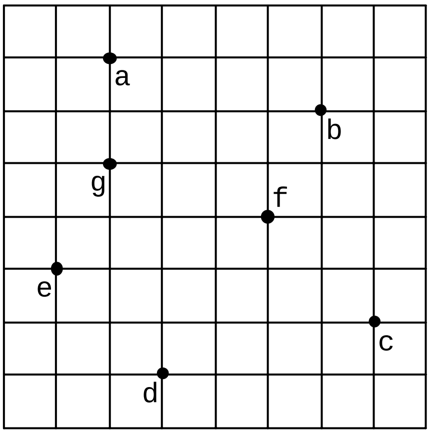
Enseignant : Stéphane ROBERT (collège DELEGORGUE)
Chercheur : Valério VASSALLO (université de Lille I)

Un fermier possédant des champs régulièrement plantés d'arbres (ils forment ainsi un quadrillage régulier soit un réseau de points), veut délimiter une partie de ce champs par des barrières ayant sept de ces arbres pour extrémités. Il désire enfin obtenir soit la parcelle de plus grande surface possible soit de plus petite surface possible. Enfin, il décide de ne pas croiser ses barrières.
Perdu, le fermier demande notre aide …

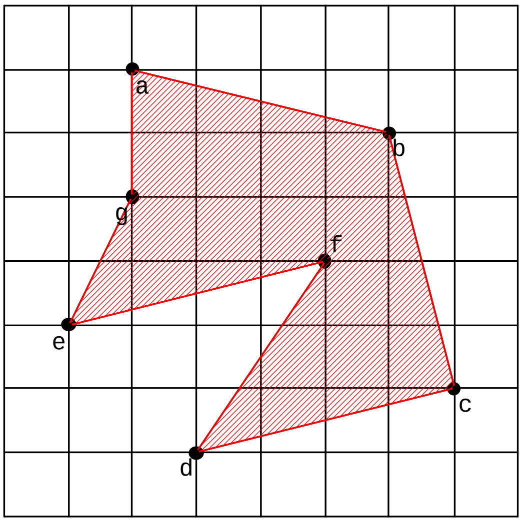


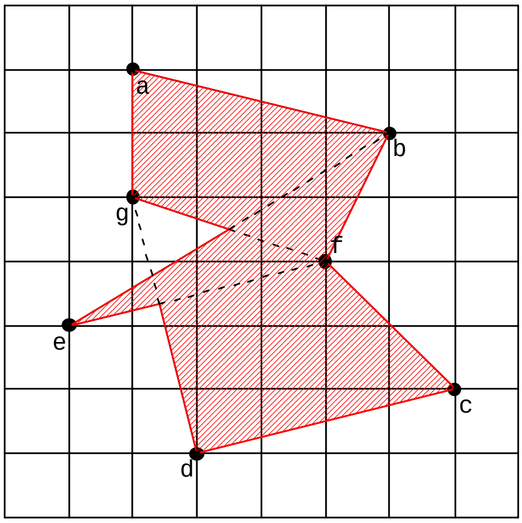


Sur la figure ci dessous, les points a, b, c, d, e, f et g représentent les arbres qui délimitent la parcelle.
Leur position a été choisi arbitrairement.



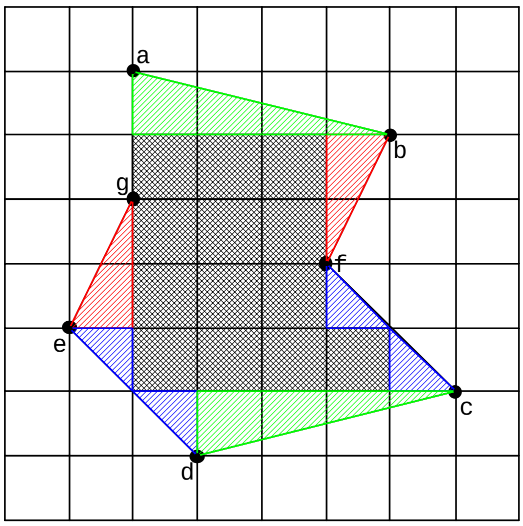
D'après les conditions indiquées, des deux cas proposés ci-dessous, le premier est un exemple de clôture possible d'une partie du champ alors que le second est à exclure puisque certaines barrières se croisent.





I – Comment calculer l’aire ?

Les points représentant les piquets étant sur les nœuds (intersections des horizontales et verticales du quadrillage), nous avons donc décidé de nous servir du carreau comme unité d’aire.
En comptant les carreaux, nous ne pouvons calculer la totalité de l’aire, tous les carreaux n’étant pas complets. Cependant, il est possible de rassembler des triangles rectangles entre-eux afin d’obtenir des carreaux entiers.



La zone noire comporte 13 carreaux ; en rassemblant les deux triangles rectangles rouges, nous obtenons une aire de 2 carreaux, avec les bleus aussi et enfin avec les verts une aire de 4.
Au final, l’aire de cet heptagone est de 21 carreaux.

L’une des premières idées qui nous soit venue est qu’il existe peut-être un rapport entre le périmètre et l’aire des figures obtenues. Pour le vérifier, il nous faut donc pouvoir calculer le périmètre de ces polygones.

II – Comment calculer le périmètre ?

Les sommets de nos figures se situant toujours à des nœuds d’un quadrillage, il n’est pas bien difficile de trouver des triangles rectangles ; qui dit triangle rectangle, dit bien entendu théorème de Pythagore.
Notre unité de longueur sera le côté d’un carreau.

ab + bf +fc + cd + de + eg + ga

Soit $\sqrt{17} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 2$ côtés de carreaux.

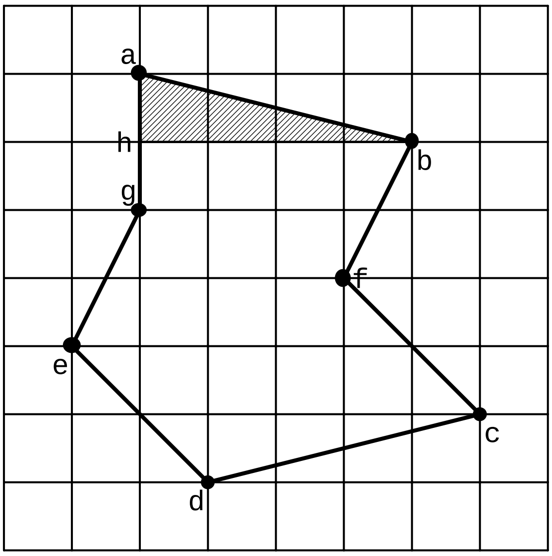
Dans le triangle abh rectangle en h, nous avons :

$ab^2 = ah^2 + hb^2$

$ab^2 = 1^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17$

Donc ab = $\sqrt{17}$

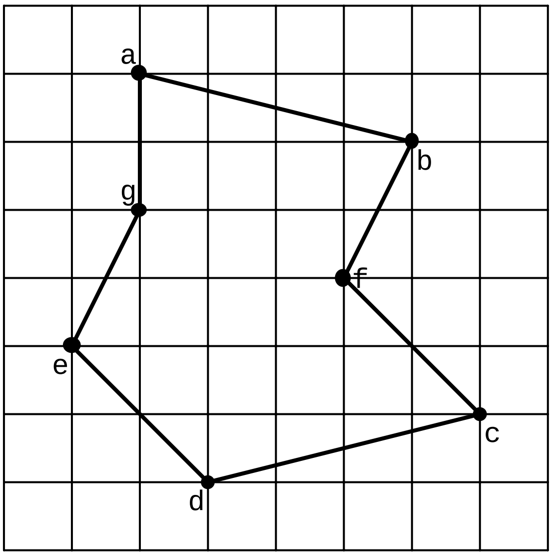
En procédant de même, nous pouvons en conclure que le périmètre de cet heptagone est égal à :



III – <u>Y-a-t-il un rapport entre aire et périmètre ?</u>

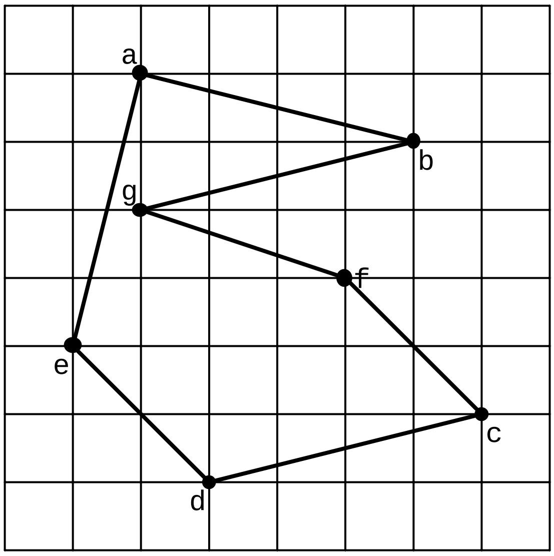
<u>Hypothèse 1</u> : plus l'aire d'un polygone serait grande, plus son périmètre serait grand.

Pour vérifier la validité de cette hypothèse, il nous faut soit la démontrer soit trouver un contre-exemple qui prouverait sa non validité.
Après une rapide recherche, 2 possibilités de clôturer la parcelle répondant aux conditions imposées nous ont permis de trancher.



$A_{abfcdeg}$ = 21 carreaux

$P_{abfcdeg} = \sqrt{17} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 2$



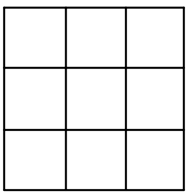
$A_{abgfcde}$ = 18,5 carreaux

$P_{abgfcde} = 4\sqrt{17} + \sqrt{10} + 4\sqrt{2}$

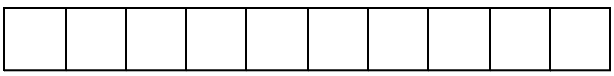
Ainsi $A_{abfcdeg} > A_{abgfcde}$ et pourtant $P_{abfcdeg} < P_{abgfcde}$. L'hypothèse 1 est donc fausse.

<u>Hypothèse 2</u> : plus l'aire d'un polygone serait grande, plus son périmètre serait petit.

Assez rapidement, cette hypothèse nous semble aller à l'encontre du bon sens commun. Pour achever de nous en convaincre, trouvons un contre-exemple.



aire : 9 carreaux
périmètre : 12 côtés de carreaux



aire : 10 carreaux
périmètre : 22 côtés de carreaux

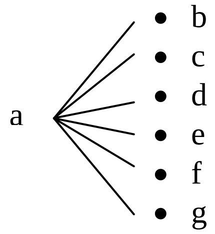
Ces deux polygones ont leurs aires classées dans l'ordre inverse de leurs périmètres, ce qui contredit clairement l'hypothèse 2.

Mais alors si aucune méthode assez évidente d'élimination de certaines configurations n'existe, comment alors déterminer les surfaces maximales et minimales que l'on peut clôturer à partir de ces 7 piquets ?
Et pourquoi ne pas étudier tous les heptagones (non croisés) que l'on peut construire partir des 7 sommets a, b, c, d, e, f et g ?

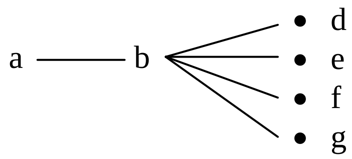
IV – <u>Dénombrement des configurations ?</u>

Nous avons donc voulu trouver le nombre de polygones à sept côtés (heptagone) que l'on pouvait former dans notre cas. Pour cela, nous allons raisonner en réalisant un « arbre ».

En partant du point a, il y a 6 possibilités de le relier à un autre sommet :



Puis, par exemple, pour le couple ab, il y a 5 possibilités de le relier aux sommets restants.

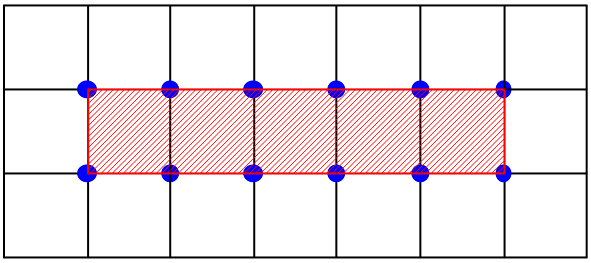


En procédant de même, on comprend assez vite qu'au final, il y aurait 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 soit 720 polygones possibles. Cependant, il ne faut pas oublier que nous avons exclu de notre étude les configurations croisées et que dans ces 720 polygones possibles, existent des répétitions. En effet, le polygone abcdefg a été compté au moins deux fois puisque identique au polygone gfedcba.
En conséquence le nombre de polygones a étudier est inférieur à 720.
Toutefois, il est très certainement trop élevé pour réaliser la recherche des aires extrémales en étudiant chaque configuration possible. De plus, si nous voulons généraliser notre étude à un enclos à plus de sept piquets de clôture, le nombre de configurations deviendra rapidement bien trop grand.
Il nous faut donc trouver une autre méthode !!

V – <u>Formule de Pick</u>

Après réflexion, il nous a semblé qu'il devait exister un lien entre l'aire d'un polygone et le nombre de nœuds du quadrillage situés à l'intérieur du polygone. En effet, il semble logique que plus le nombre de nœuds à l'intérieur du polygone est grand plus l'aire de ce dernier doit être elle aussi grande.
Peut-être qu'il existe aussi un lien avec le nombre de nœuds sur la « frontière » du polygone.
Pour confirmer notre hypothèse et trouver cette éventuelle relation, nous avons tenter de trouver un lien sur un grand nombre de figures « élèmentaires », des rectangles.
Notons : **I**, le nombre de nœuds du quadrillage à l'**<u>intérieur</u>** du polygone
F, le nombre de nœuds du quadrillage sur la **<u>frontière</u>** du polygone
A, l'**<u>aire</u>** du polygone.
Déterminer de manière immédiate une relation liant trois quantités n'est pas chose évidente, nous avons donc étudier un grand nombre de figures « simples », des rectangles, en fixant l'une des trois quantités, I, F ou A.
Pour commencer, si I = 0 :

Nous avons pour ce rectangle :
I = 0, F =12 et A = 5



En étudiant un grand nombre de rectangles, nous avons pu compléter le tableau suivant :

I	F	A
0	4	1
0	6	2
0	8	3
0	10	4
0	12	5

Il semblerait donc que : $\mathbf{\frac{F}{2} - 1 = A}$

Procédons de même en fixant F = 20 et en étudiant un grand nombre de rectangles vérifiant cette condition. Nous pouvons alors compléter le tableau suivant :

I	F	A
0	20	9
7	20	16
12	20	21
15	20	24
16	20	25

Il semblerait donc que : **I + 9 = A**

Nous constatons de plus que si F = 20, $\frac{F}{2} - 1 = \frac{20}{2} - 1 = 10 - 1 = 9$.

Ainsi nous aurions peut-être : $\frac{F}{2} - 1 + I = A$. Vérifions le expérimentalement en étudiant différents rectangles pour lesquels I, F et A varient :

I	F	A
18	22	28
18	26	30
18	42	38

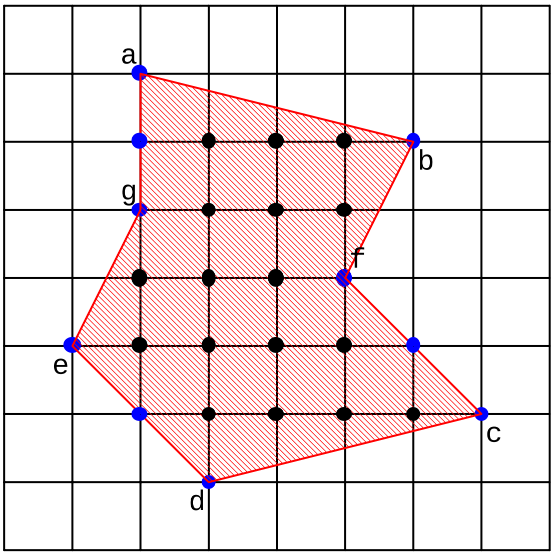
Nous avons bien : $\mathbf{\frac{F}{2} - 1 + I = A}$

Finalement nous retrouvons la formule découverte par Georges Alexander Pick mathématicien autrichien en 1899

Resterait donc à démontrer cette formule, ce que nous n'avons pas eu le temps de faire.

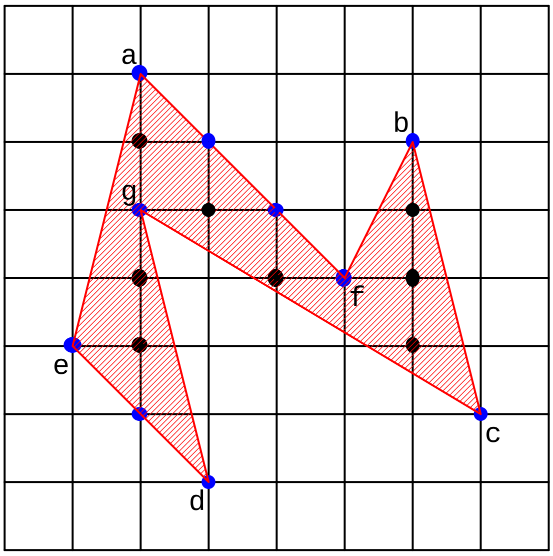
VI – Conclusion

D'après la formule de Pick, pour rendre maximale l'aire de l'enclos que nous voulons clôturer, il faut rendre maximum le nombre de nœuds du quadrillage à l'intérieur et sur la frontière du polygone (pour la rendre minimale, il faudrait procéder à la recherche inverse).
Il nous semble donc que les solutions cherchées sont les suivantes :



Cette parcelle est celle d'aire maximale que nous pouvons clôturer à partir des 7 piquets proposés.
En effet : I = 17 et F = 10 (valeurs maximales que l'on puisse obtenir)

D'où A = $\frac{10}{2} - 1 + 17 = 21$ carreaux.



Cette parcelle est celle d'aire minimale que nous pouvons clôturer à partir des 7 piquets proposés.
En effet : I = 8 et F = 10 (valeurs minimales que l'on puisse obtenir)

D'où A = $\frac{10}{2} - 1 + 8 = 12$ carreaux.