La force totale de l'eau s'exerçant sur un barrage

Lycée de Pézenas 2005

1 - Introduction :

1 - 1 - Le sujet :

Le sujet que nous avons choisi se nomme « La force de l'eau s'exerçant sur un barrage ».
Il consiste comme son nom l'indique, de calculer la force (et non pas la pression) de l'eau s'exerçant sur un barrage. Mais pour que le sujet soit plus intéressant nous nous sommes fixé comme but de calculer cette force comme l'auraient fait de vrais chercheurs, c'est à dire en expliquant le plus possible nos formules, sans en utiliser des pré-établies.

1 – 2 – Hypothèses :

Il est légitime de penser que la profondeur est un facteur influent sur la pression. Par exemple le ballon de baudruche dans l'eau. Et on peut avoir le sentiment que plus la longueur et la largeur sont importantes, plus la pression est forte. Par exemple une retenue d'eau de 1000km sur 1000km et une de 300km sur 300km.

2 - Présentation des expériences :

2 – 1 – la capsule barométrique :

Principe :

En fonction de la force s'exerçant sur la membrane de la sonde le niveau du liquide coloré varie.

Résultats :

Ont s'aperçoit que comme nous l'avions initialement pensé, plus la capsule est profondément immergée plus le liquide coloré monte, donc que la pression augmente.

Nous voyons donc que la hauteur d'eau est un des facteurs influent, il nous reste à vérifier s'il existe d'autres facteurs.

2 – 2 – Le barrage :

Principe : Nous avons fait la maquette d'un barrage hydraulique pour connaître l'importance
De la largeur, longueur et profondeur du bassin.
Plus il y a de pression, plus le jet d'eau est puissant, donc plus l'hélice tourne vite,
. donc plus le galvanomètre donne une grande valeur.

Résultats :Ont s'aperçoit que notre seconde hypothèse était fausse puisque la largeur et la longueur du bassin n'influent pas sur la pression.

2 – 3 – De l'huile à la place de l'eau :

Cela consiste à faire la même expérience qu'avec la capsule mais avec de l'huile à la place de l'eau. On se rend compte que la pression varie toujours avec la hauteur d'eau, cependant à profondeur égale, l'huile a une pression moindre que l'eau. On en déduit que la pression dépend aussi de la nature du liquide. Par la même occasion de la pesanteur s'exerçant sur ce liquide.

Nous en déduisons que la pression dépend de la masse volumique (ρ), l'accélération de la pesanteur (g) et de la profondeur (z).D'où la formule suivante (avec P en Pascal):

$$\mathbf{P = \rho \times g \times z}$$

Or sur terre g = 9,81 N . Kg ^-1 et travaillant dans l'eau ρ = 1 g . Cm ^3. Par la suite de notre exposé nous poserons que g = 10 N . Kg ^-1 pour simplifier les calculs. Donc nous avons :

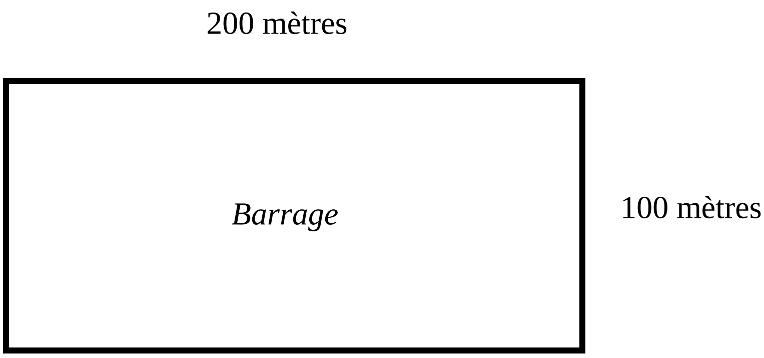
$$\mathbf{P = 10 \times z}$$

3 – Développement de la théorie :

1 – 1 – Protocole de notre étude :

Nous posons que la force totale est égale à la sommes des petites forces qui la composent.

Nous posons un bassin de 100 mètres de hauteur sur 200 mètres de largeur, la longueur n'a aucun intérêt comme vu précédemment. Ce qui nous donne un barrage ayant les même mesures :

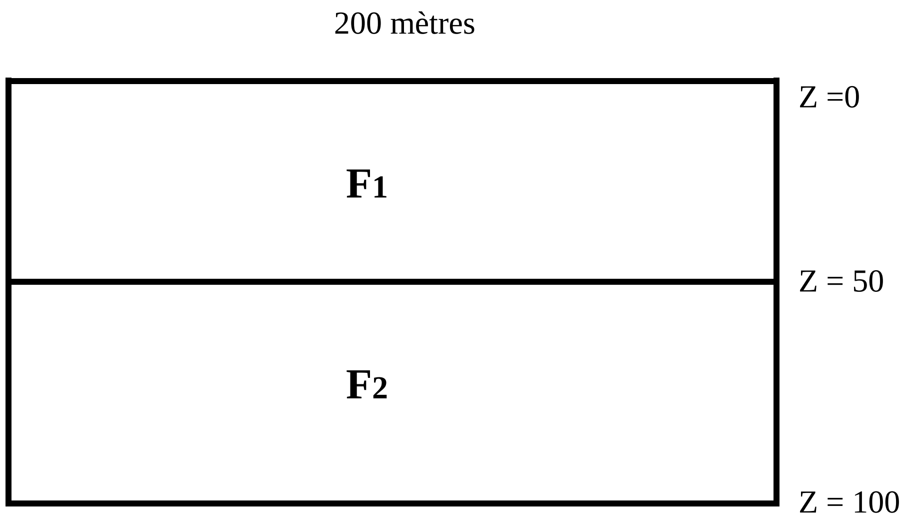


Nous savons que la Pression = $\frac{\text{Force}}{\text{Surface}}$, donc la Force = Pression × Surface.

1 – 2 – Approche numérique :

Approche numérique :

Partagé en 2



F_T = force totale

$F_T = F_1 + F_2$

F = Pression × surface

F = 1 × 10 × Z × surface

F = 10 × Z × Surface

1ère étape:

$0 \leq F_T \leq 10 \times 100 \times 20\,000$

$0 \leq F_T \leq 20\,000\,000$

2ème étape:

$0 \leq F_1 \leq 10 \times 50 \times 10\,000$

$0 \leq F_1 \leq 5\,000\,000$

$5\,000\,000 \leq F_2 \leq 10 \times 10 \times 10\,000$

$5\,000\,000 \leq F_2 \leq 10\,000\,000$

Donc :

$F_{1\,min} + F_{2\,min} \leq F_T \leq F_{1\,max} + F_{2\,max}$

$0 + 5\,000\,000 \leq F_T \leq 5\,000\,000 + 10\,000\,000$

$5\,000\,000 \leq F_T \leq 15\,000\,000$

Partagé en 8

F1
F2
F3
F4
F5
F6
F7
F8

$0 \leq F1 \leq 312\,500$
$312\,500 \leq F2 \leq 625\,000$
$625\,000 \leq F3 \leq 937\,500$
$937\,500 \leq F4 \leq 1\,250\,000$
$1\,250\,000 \leq F5 \leq 1\,562\,500$
$1\,562\,500 \leq F6 \leq 1\,875\,000$
$1\,875\,000 \leq F7 \leq 2\,187\,500$
$2\,187\,500 \leq F8 \leq 2\,500\,000$

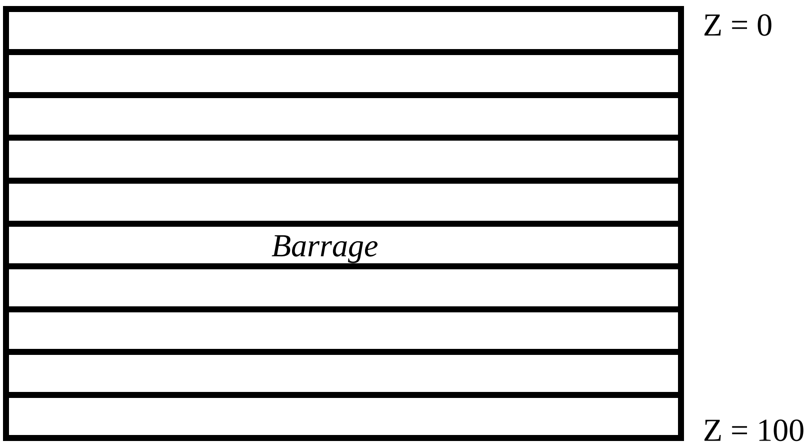
On a donc : $8\,750\,000 \leq FT \leq 11\,250\,000$

On a le sentiment que FT est égal à 10 000 000

1 – 3 – Première méthode :

Soit la fonction F : $[0\,;100] \longrightarrow \mathbb{R}$
$Z \longrightarrow F(Z)$ = Force qui s'exerce sur le barrage entre la hauteur 0 et la hauteur Z.

On cherche F (100) :



On note Z_0 la profondeur fixée et $Z_0 + h$ la même profondeur plus un petit quelque chose noté h. On pose $\Delta F = F(Z_0 + h) - F(Z_0)$ la force s'exerçant sur le petit quelque chose. On obtient l'encadrement suivant :

$$\mathbf{F(Z_0) \leq \Delta F \leq F(Z_0 + h)}$$
$$\mathbf{\text{Surface de la bande} \times P(Z_0) \leq \Delta F \leq \text{Surface de la bande} \times P(Z_0 + h)}$$
$$\mathbf{h \times 200 \times \rho \times g \times Z_0 \leq \Delta F \leq h \times 200 \times \rho \times g \times (Z_0 + h)}$$
$$\mathbf{200 \times \rho \times g \times Z_0 \leq \frac{F(Z_0 + h) - F(Z_0)}{h} \leq 200 \times \rho \times g \times Z_0 + 200 \times \rho \times g \times h}$$

Hors $\frac{F(Z_0 + h) - F(Z_0)}{h}$ est égal au nombre dérivé $F'(Z_0)$

Limite pour $h \to 0$: $\mathbf{200 \times \rho \times g \times Z_0 \leq F'(Z_0) \leq 200 \times \rho \times g \times Z_0}$

On en déduit par le théorème des gendarmes qui dit que une fonction comprise entre deux autres tendant vers un résultat, tendra elle aussi vers ce résultat :

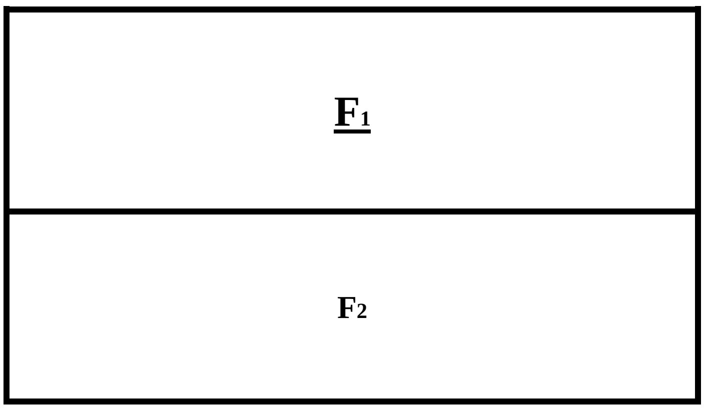
$$\begin{aligned} \mathbf{F'(Z)} &= \mathbf{200 \times \rho \times g \times Z} \\ &= \mathbf{200 \times 1 \times 10 \times Z} \\ &= \mathbf{2000\ Z} \end{aligned}$$

Par les primitives on peut dire que $\forall$ Z appartenant à [0 ;100] , $\mathbf{F(Z) = 1000\ Z^2 + C}$
$\mathbf{= 1000\ Z^2}$

Calculons F (100): $\mathbf{F(100) = 1000 \times 100^2}$
$\mathbf{= 10\ 000\ 000}$

1 – 4 – Seconde méthode :

Partagé en 2 :



$$\begin{aligned} P(h) &= \rho \times g \times h \\ &= 10 \times h \end{aligned}$$

$$P(50) = 10 \times 50 = 500 \Rightarrow 200 \times P(50) = 100\ 000$$

$$P(100) = 10 \times 100 = 1\,000 \Rightarrow 200 \times P(100) = 200\,000$$

Donc :

$$200 \times \rho \times g \times 0 \leq F_1 \leq 200 \times 50 \times \rho \times g \times 50$$
$$0 \leq F_1 \leq 5\,000\,000$$
$$200 \times 50 \times \rho \times g \times 50 \leq F_2 \leq 200 \times 50 \times \rho \times g \times 100$$
$$5\,000\,000 \leq F_2 \leq 10\,000\,000$$

Donc :

$$F_{1\,min} + F_{2\,min} \leq F_T \leq F_{1\,max} + F_{2\,max}$$
$$0 + 5\,000\,000 \leq F_T \leq 5\,000\,000 + 10\,000\,000$$
$$5\,000\,000 \leq F_T \leq 15\,000\,000$$

<u>Partagé en 4 :</u>

<u>Partagé en 8 :</u>