Les figures magiques

Année 2014 - 2015

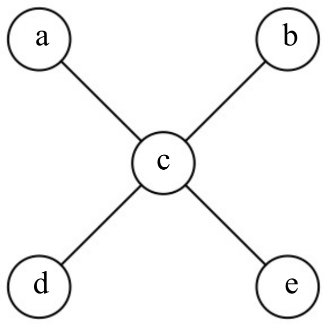
Elèves de 4è : Line Garcia, Louise Roulot, Clotilde Guyard-Gilles, Léna Feingold, Romane Jaconelli et Elodie Voilque.
Etablissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY, Claudie ASSELAIN et Nicolas SEGARRA.
Chercheur : Céline ABRAHAM, université Paris-Sud Orsay.

Le sujet

Une figure magique est une figure géométrique constituée de bulles reliées entre elles par des branches. Il s'agit de remplir les bulles avec des nombres en suivant les deux règles ci-dessous :

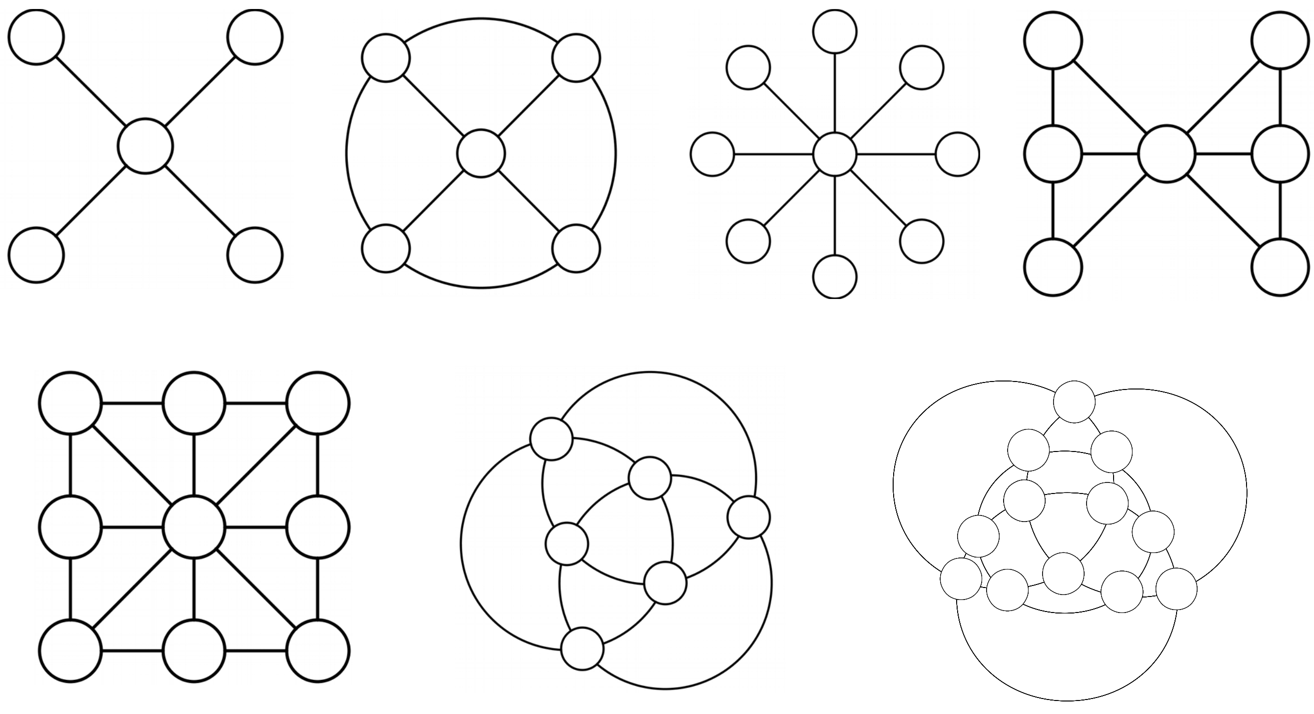
- S'il y a n bulles (n étant un nombre entier au moins égal à 2), elles seront remplies par les nombres de 1 à n.

- La somme des nombres de chaque ligne (segment ou cercle) doit toujours être la même.



Par exemple ici, pour que cette figure soit magique, on doit avoir : a + c + e = b + c + d.

Voici les 7 figures que l'on doit compléter



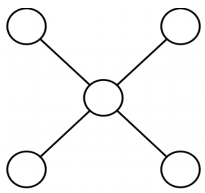
<u>Somme totale des nombres à placer</u>

Dès les premiers exemples nous avons eu besoin de connaître la somme totale des nombres à placer dans les bulles. On cherche donc une formule qui nous donne cette somme *S* en fonction du nombre *n* de bulles.

Exemple avec *n* pair	Exemple avec *n* impair
$S=1+2+3+4+5+6$ $S=3\times 7$ $S=\frac{6}{2}\times 7$ $S=\frac{6\times 7}{2}$	$S=1+2+3+4+5+6+7$ $S=0+1+2+3+4+5+6+7$ $S=4\times 7$ $S=\frac{8\times 7}{2}$

Généralisons cette formule :
Soit *n,* un nombre entier supérieur ou égal à 1. On a : $S=1+2+3+...+n-2+n-1+n$
On a aussi : $S=n+n-1+n-2+...+3+2+1$
En additionnant membre à membre, on obtient :
$2\text{S}=(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+...+(n-2+3)+(n-1+2)+(n+1)$
En simplifiant, on obtient :
$2\text{S}=(n+1)+(n+1)+(n+1)+...+(n+1)+(n+1)$
Donc :
$2\text{S}=n(n+1)$
Par conséquent :
$S=\frac{n(n+1)}{2}$ On a donc une formule générale vraie pour tous les nombres entiers supérieurs ou égaux à 1.

<u>Figure 1</u> : étoile à deux branches



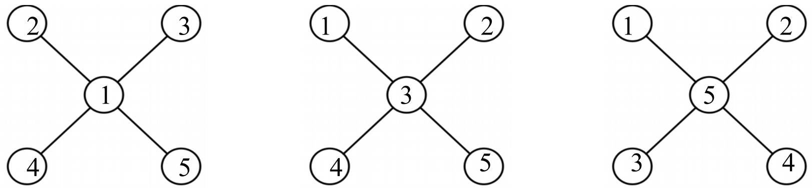
On a commencé par essayer de trouver des additions donnant le même résultat autour de la case du milieu.
On s'est aperçu que le nombre placé au milieu ne pouvait pas être pair. Démontrons ce résultat : on doit placer les nombres entiers de 1 à 5 ; il y a donc 2 nombres pairs et 3 nombres impairs.
Si on met un nombre pair au milieu, il reste, pour les extrémités 3 nombres impairs et un 1 nombre pair. Il y aura donc, sur une branche, 2 nombres impairs et, sur l'autre branche, 1 nombre pair et 1 nombre impair. Or, la somme de 2 nombres impairs est égale à un nombre pair et la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est égale à un nombre impair. On ne pourra donc pas avoir la même somme.
La bulle du milieu ne pourra être que 1, 3 ou 5.

La somme totale des nombres est : $S=\frac{5\times(5+1)}{2}=15$

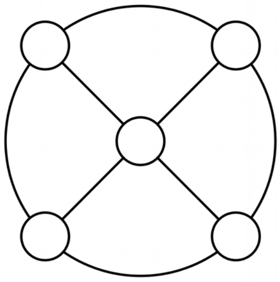
Nous avons ici deux branches ; si on enlève le nombre du milieu il faut donc que la somme des nombres restants soit divisible par 2. Les nombres 1,3 et 5, trouvés plus haut, respectent cette condition.

– Si on met 1 au milieu, la somme des nombres restants est 14 ; 14 : 2 = 7. Il faudra 7 + 1 sur chaque branche.
– Si on met 3 au milieu, la somme des nombres restants est 12 ; 12 : 2 = 6. Il faudra 6 + 3 sur chaque branche.
– Si on met 5 au milieu, la somme des nombres restants est 10 ; 10 : 2 = 5. Il faudra 5 + 5 sur chaque branche.

On teste les 3 cas et on remarque qu'ils donnent chacun une figure magique. Ce sont les seules dispositions possibles.



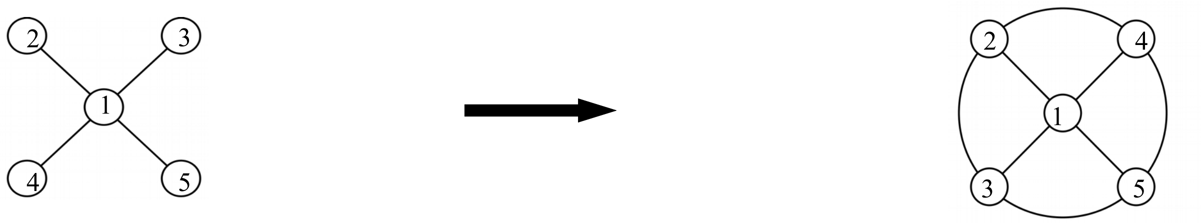
<u>Figure 2</u> : 2 branches et un cercle



Pour que cette figure soit magique**,** il faut que l'on prenne les cas trouvés à la première figure en rajoutant une contrainte sur les 4 bulles extérieures dont la somme doit être la même que sur les segments.

Solution 1 :

Sur la nouvelle figure :



Les nombres aux extrémités des segments peuvent être inversés sans que la somme des nombres sur le cercle change.

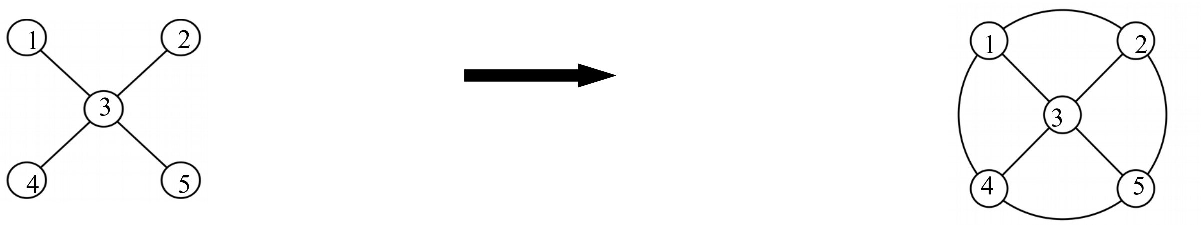
- Sur les segments : 2 + 1 + 5 = 4 + 1 + 3 = 8

- Sur le cercle : 2 + 3 + 4 + 5 = 14

Donc ce cas ne convient pas.

Solution 2 :

Sur la nouvelle figure :



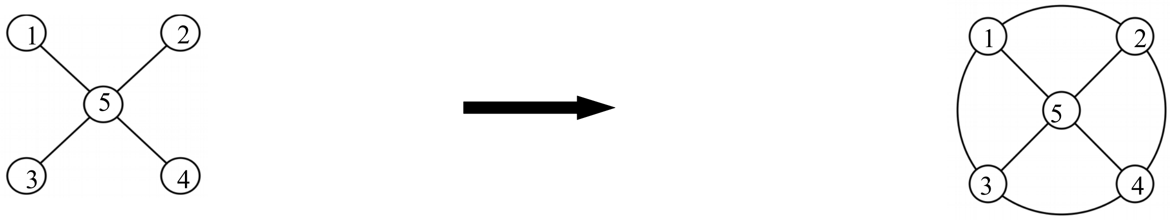
- Sur les segments : 2 + 3 + 4 = 1 + 3 + 5 = 9

- Sur le cercle : 1 + 2 + 4 + 5 = 12

Donc ce cas ne convient pas.

Solution 3 :

Sur la nouvelle figure :

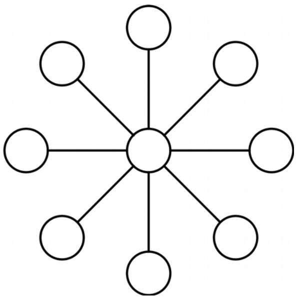


- Sur les segments : 1 + 4 + 5 = 2 + 5 + 3 = 10

- Sur le cercle : 1 + 2 + 3 + 4 = 10

Cette figure est magique et c'est le seul cas possible.

<u>Figure 3</u> : étoile à quatre branches



Comme pour la figure 1, on a commencé par essayer de trouver des additions donnant le même résultat autour de la case du milieu : [1]

1 2 3 4 9 5 6 7 8

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 3 4 5 1 6 7 8 9

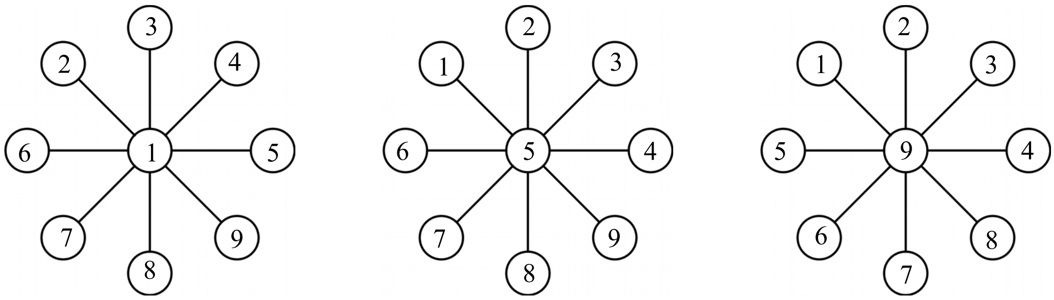
Pour savoir si ce sont les seules solutions on fait un raisonnement identique à celui fait pour la figure 1.

La somme totale des nombres est : $S=\frac{9\times(9+1)}{2}=45$

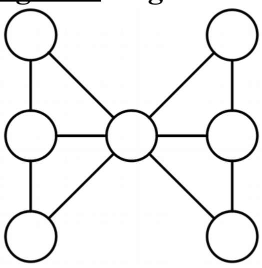
Nous avons ici 4 branches ; si on enlève le nombre du milieu il faut donc que la somme des nombres restants soit divisible par 4. Il ne peut y avoir au milieu que 1, 5 ou 9.

– Si on met 1 au milieu, la somme des nombres restants est 44 ; 44 : 4 = 11. Il faudra 11 + 1 sur chaque branche.
– Si on met 5 au milieu, la somme des nombres restants est 40 ; 40 : 4 = 10. Il faudra 10 + 5 sur chaque branche.
– Si on met 9 au milieu, la somme des nombres restants est 36 ; 36 : 4 = 9. Il faudra 9 + 9 sur chaque branche.

On a donc bien uniquement 3 figures magiques qui sont les seules dispositions possibles et on peut les remplir très facilement avec les calculs précédents.



<u>Figure 4</u> : figure à 7 bulles

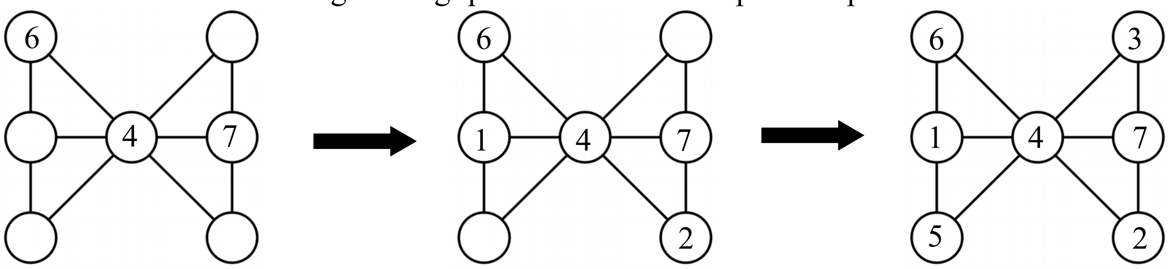


La somme totale des nombres est : $S = \frac{7 \times (7+1)}{2} = 28$

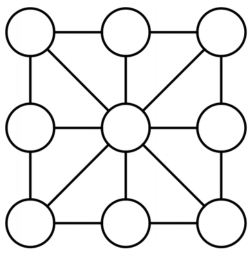
Appelons x le nombre placé au milieu.
3 branches passent par le milieu donc il faut que $28 - x$ soit divisible par 3. Il y a 3 possibilités pour x : 1, 4 ou 7.

- Si on met 1 au milieu, la somme des nombres restants est 27 ; 27 : 3 = 9.
- Si on met 4 au milieu, la somme des nombres restants est 24 ; 24 : 3 = 8.
- Si on met 7 au milieu, la somme des nombres restants est 21 ; 21 : 3 = 7.

Les nombres sur les 2 branches ne passant pas par le centre ont une somme de $28 - x$; il faut donc également que $28 - x$ soit divisible par 2. Ceci élimine les cas $x = 1$ et $x = 7$.
Il ne nous reste qu'un cas à tester : $x = 4$ et la somme des nombres sur chaque branche est 8 + 4 = 12. Avec ce dernier calcul nous savons que 6 et 7 ne sont pas sur la même branche ; on les place donc en premier. On complète ensuite leur branche pour que le total fasse 12. Enfin on place les 2 derniers nombres. On obtient une figure magique : c'est la seule disposition possible.

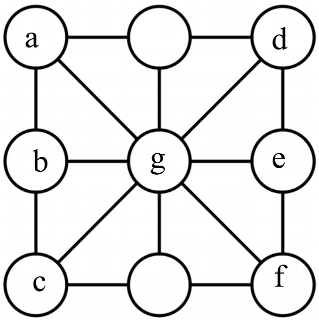


<u>Figure 5</u> : figure à 9 bulles



La somme totale des nombres est : $S = \frac{9 \times (9+1)}{2} = 45$

La somme sur chacune des branches horizontales, verticales ou en diagonale fait : 45 : 3 = 15.
Cherchons le nombre que l'on peut placer au milieu.



a + g + f = 15 ; b + g + e = 15 ; c + g + d = 15

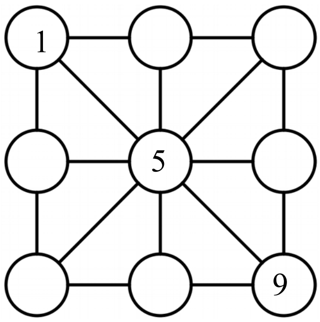
On a donc : (a + g + f) + (b + g + e) + (c + g + d) = 45

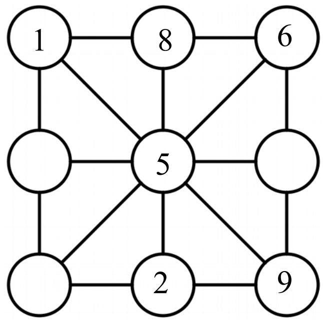
En changeant l'ordre des termes, on obtient :
(a + b + c) + (d + f + e) + (g + g + g) = 45

Or : a + b + c = 15 et d + f + e = 15

Donc : 15 + 15 + 3g = 45   D'où : 3g = 15 et g = 5.

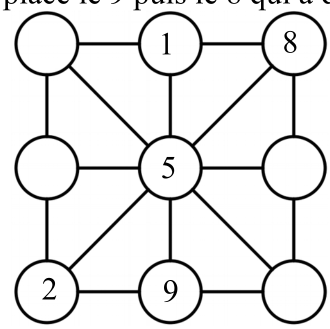
La seule possibilité pour le nombre du milieu est 5.
Essayons de mettre 1 dans un coin ; dans ce cas 9 est dans le coin opposé. 8 ne pouvant être sur la même branche que 9 (car 8 + 9 dépasse 15), on place 8 à côté de 1 ainsi que 2 et 6 pour que les branches contenant 8 aient une somme de 15 :



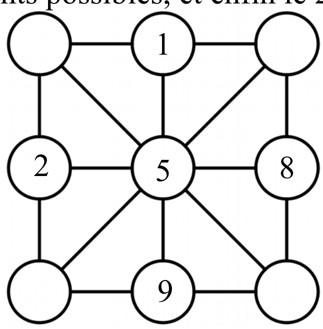


Il est impossible de poursuivre puisque, sur la branche verticale de droite, on a déjà un total de 15.

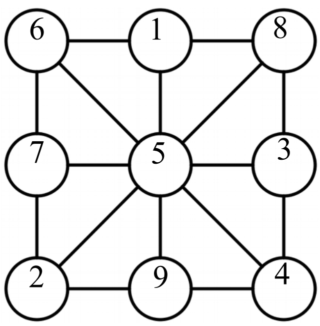
Donc 1 ne peut pas être dans un coin. On le place donc au milieu d'un côté et on recommence : on place le 9 puis le 8 qui a deux emplacements possibles, et enfin le 2, opposé au 8.



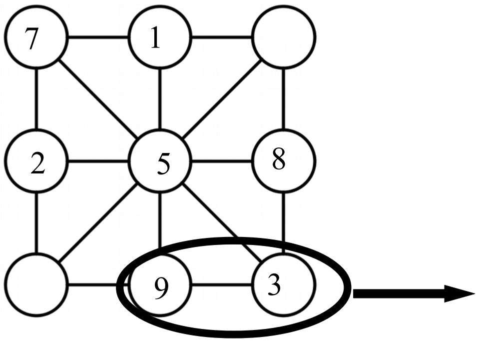
ou



Regardons tout d'abord le premier.
On continue avec le 4, le 6, le 7 et enfin le 3 : on obtient une figure magique.



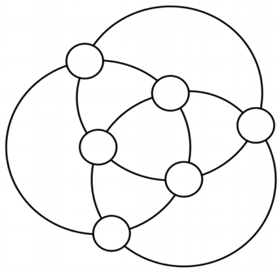
Dans le second cas, on peut placer le 7 qui ne peut pas être sur la branche du 9 ni sur celle du 8 ; on place ensuite le 3.



9 + 3 = 12 il manque 3 sur cette ligne pour faire 15 ; ce qui est impossible puisque 3 a déjà été utilisé.

Il n'y a donc qu'une seule configuration possible dans ce cas.
Nous n'avons donc, pour cette figure, qu'un seul cas magique.

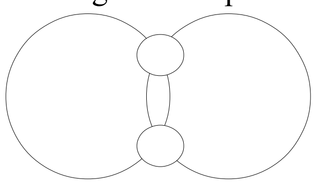
<u>Figure 6</u> : 3 cercles



La figure est composée de 3 cercles et de 6 bulles. La somme des nombres est : $S=\frac{6\times(6+1)}{2}=21$

Chaque cercle est composé de 4 bulles et chaque bulle est au croisement de 2 cercles. Soit $c1$, $c2$ et $c3$ les sommes des nombres sur chacun des 3 cercles , et soit $T=c1+c2+c3$. Chaque bulle étant comptée 2 fois, la somme T vaut donc : $21\times2=42$ et la somme des nombres sur chaque cercle est de : $\frac{42}{3}=14$.

Si on regarde une partie de la figure :

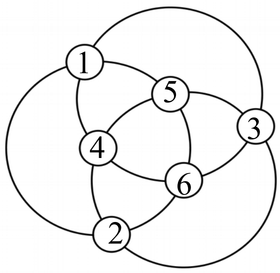


On sait que :
- la somme sur chaque cercle doit faire 14.
- chaque cercle contient 4 bulles mais seules deux bulles ont les deux mêmes cercles en commun.

Donc la somme de ces deux bulles doit être égale à 7. [2]

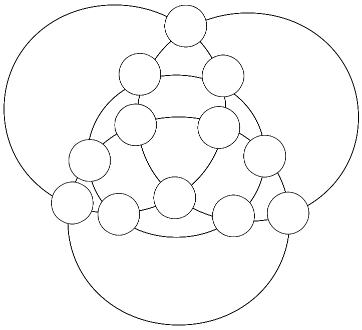
Cherchons toutes les sommes possibles égales à 7 : 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7

Donc la seule figure magique est la configuration suivante :



On peut bien sûr échanger les nombres en gardant leur binôme ; cette opération ne change pas la somme sur chaque cercle.

<u>Figure 7</u> : 4 cercles



La figure est composée de 4 cercles et de 12 bulles.

La somme totale des nombres est : $S=\frac{12\times(12+1)}{2}=78$.

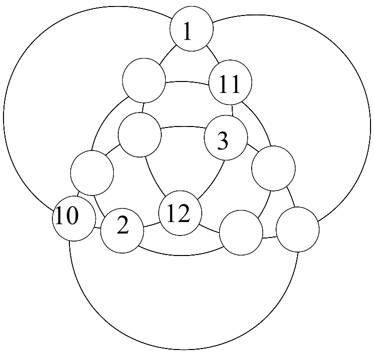
Chaque cercle est composé de 6 bulles et chaque bulle est au croisement de 2 cercles.

La somme des nombres des cercles est donc de : $78\times2=156$ et la somme des nombres sur chaque cercle est de : $\frac{156}{4}=39$.

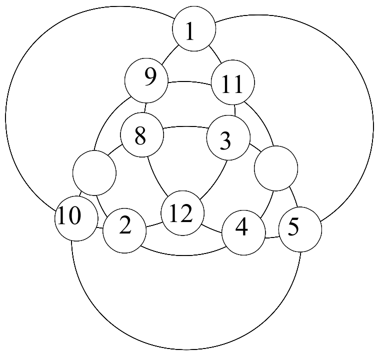
Sachant que chaque cercle coupe trois autres cercles en deux bulles chacun, on divise par trois la somme totale des bulles de chaque cercle, ce qui nous donne 13, pour obtenir la somme de deux bulles à l'intersection des deux mêmes cercles.

Nous avons donc choisi trois couples de nombres étant égaux à 13 : 1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 13.

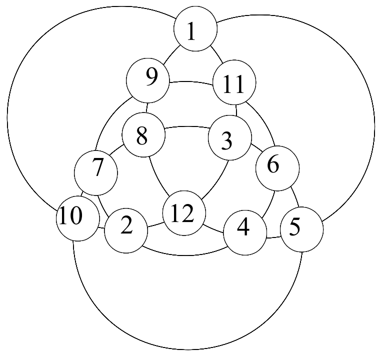
Avec ces couples, on remplit un premier cercle :



On remplit un deuxième cercle en choisissant deux autres couples de nombres ayant 13 pour somme ;
par exemple : 4 + 9 = 5 + 8.

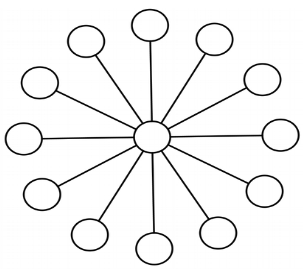


On termine avec le dernier couple : 6 + 7 = 13.



Bien sûr, ce n'est pas le seul résultat : on peut toujours changer l'ordre entre deux nombres d'une même paire ou changer de place les paires entres elles, en veillant bien à ce que la somme de ces paires de deux nombres fasse toujours 13.

<u>Extension du sujet : nous avons inventé et complété une figure, l'étoile à 6 branches</u>



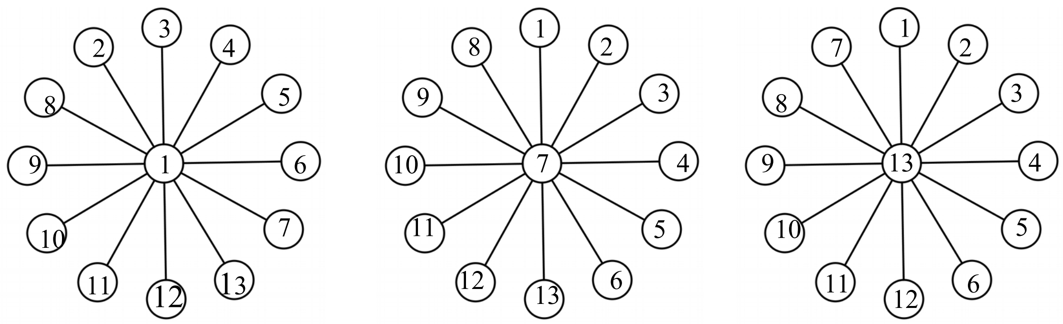
On a fait le même raisonnement que pour la figure 3.

La somme totale des nombres est : $S = \frac{13 \times (13+1)}{2} = 91$

Nous avons ici 6 branches ; si on enlève le nombre du milieu il faut donc que la somme des nombres restants soit divisible par 6. Il ne peut y avoir au milieu que 1, 7 ou 13.

- Si on met 1 au milieu, la somme des nombres restants est 90 ; 90 : 6 = 15. Il faudra 1 + 15 sur chaque branche.
- Si on met 7 au milieu, la somme des nombres restants est 84 ; 84 : 6 = 14. Il faudra 7 + 4 sur chaque branche.
- Si on met 13 au milieu, la somme des nombres restants est 78 ; 78 : 6 = 13. Il faudra 13 + 13 sur chaque branche.

On a donc 3 figures magiques qui sont les seules dispositions possibles et on peut les remplir très facilement avec les calculs précédents.



On peut faire une généralisation de ces étoiles à m branches (où m est un entier strictement positif). Chaque branche de l'étoile a deux nombres aux extrémités et nous rajoutons le nombre du milieu. Nous devons donc placer les nombres entiers de 1 à $n = 2m + 1$.

La somme totale des nombres est : $S = \frac{n \times (n+1)}{2}$

Si on place 1 au milieu voilà ce que l on obtient sur les extrémités des branches :

Extrémité d'une branche	2	3	4	5	...	$m + 1$
Extrémité correspondante	$2m + 1$	$2m$	$2m - 1$	$2m - 2$	...	$m + 2$

Tous les nombres ont été utilisés et la somme des deux extrémités de chaque branche est toujours de $2m + 3$, donc l'étoile est magique.

Nous plaçons ensuite $m + 1$ au milieu et nous recommençons l'opération.

Extrémité d'une branche	1	2	3	4	...	m
Extrémité correspondante	$2m + 1$	$2m$	$2m - 1$	$2m - 2$	...	$m + 2$

Tous les nombres ont été utilisés et la somme des deux extrémités de chaque branche est toujours de $2m + 2$, donc l'étoile est magique.

Notes d'éditions

[1] La somme de deux nombres symétriques par rapport au milieu de la ligne est égale à 9 dans la première ligne, 10 dans la deuxième et 11 dans la troisième.

[2] Ce résultat est juste, mais il faut un petit raisonnement pour le justifier