

# Figures isoaires

Année 2013/2014

## Elèves :

Morgane DOMMANGET : terminale S,  
Gaétan FADAT, Quitterie LUCAS, Nicolas MARTEAU, Marie SOULARD : première S,  
Léa GUILLOTEAU, Arnaud ROGER : seconde.

## Etablissement :

Lycée Saint Joseph, 4 rue du Docteur Brillaud, 79 300 BRESSUIRE

## Etablissement jumelé :

Lycée Edouard Branly de Chatellerault

## Enseignants :

Gilles MARECHAL, Frédérique MARTIN-GATARD

## Chercheur :

Julien MICHEL, Université de Poitiers

## Sujet :

Est-il possible de construire une figure d'aire finie et de périmètre infini ? En particulier, peut-on modifier une figure pour augmenter son périmètre sans changer son aire ?

## Conjectures – Résultats :

La recherche des élèves a consisté à construire des procédés conservant l'aire mais augmentant le périmètre.

Presque tous les calculs ont été faits dans l'année mais tous n'ont pas été rédigés ici.

De même pour les procédures sous GéoTortue.

Les élèves ont mis en place des suites associées à des longueurs de côtés et à des périmètres, calculé certaines limites, élaboré des procédures, établi des tableaux de valeurs et de résultats ainsi que des graphiques comparatifs.

Procédé	Côté		Périmètre		Limite		Procédure	
	Formule	Démo	Formule	Démo	Résultat	Démo	Ecriture	Dessin
Escalier	*	*	*	*	*	*	*	*
Dentolite 1	*	*	*	*	*	*	*	*
Dentolite 2	*		*	*			*	*
Carré	*	*	*	*			*	*
Hexagone	*	*					*	*
Cercle	*	*	*	*	*	*	*	*
Peigne			*					*
Octogone	*		*				*	*
cgone			*				*	*

## Résumé :

Peut-on augmenter le périmètre d'une figure sans changer son aire ? Dans de nombreux sujets de maths, on rencontre des applications d'optimisation d'aires pour un périmètre fixe. Mais inversement, quel procédé faut-il mettre en œuvre pour avoir un périmètre maximal sans changer d'aire ? À notre aire fixe d'  $1 m^2$ , on peut également ajouter un paramètre supplémentaire : un cadre de  $4 m^2$  à ne pas dépasser. C'est en partant de carrés, rectangles, octogones, hexagones ou encore cercles, que nous avons baptisé ces objets nouvellement créés « *isoaires* ».

Les unités utilisées seront les  $m$ ,  $m^2$  et degrés.

## 1 - Escalier

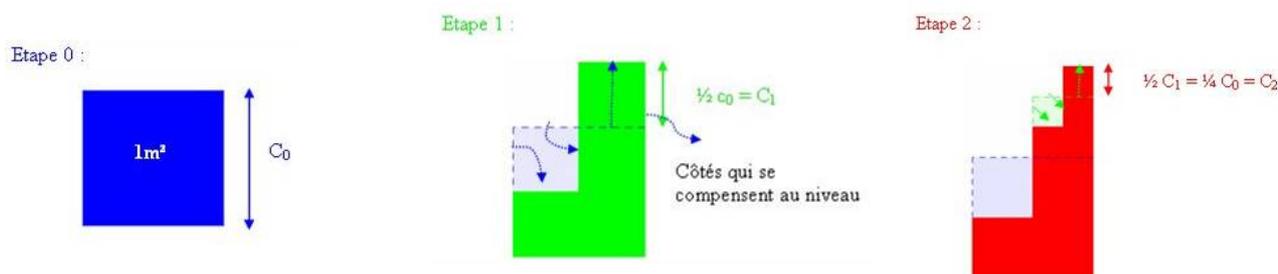
### Description du procédé :

Pour commencer, en partant d'une figure de côté 1, on "enlève"  $\frac{1}{4}$  de la surface du carré en haut à gauche, que l'on replace au dessus du coin supérieur droit. Ainsi l'aire est conservée. Le périmètre augmente à chaque étape de 2 fois la moitié du côté du carré précédent.

À chaque étape, on enlève un quart du dernier carré ajouté que l'on replace au dessus. Le périmètre augmente de manière semblable à chaque étape : 2 fois la moitié du côté du carré précédent.

### Calculs :

Soit  $P_n$  le périmètre,  $C_n$  le côté, et  $n$  leur indice à l'étape.



On a ainsi :

$$P_0 = 4 = 4C_0 \text{ et } P_1 = 4 + 2 \times \frac{1}{2} = 4C_0 + 2C_1 \text{ et } C_1 = \frac{1}{2} C_0 ;$$

$$\text{puis } P_2 = P_1 + 2 \times \frac{1}{4} = 4C_0 + 2C_1 + 2C_2 \text{ et } C_2 = \frac{1}{2} C_1 \text{ donc } P_2 = 2C_0 + 2C_0 + 2C_1 + 2C_2$$

on peut alors en induire une formule permettant de calculer le périmètre :

$$P_n = 2C_0 + 2 \sum_{i=0}^{i=n} C_i .$$

Voici une démonstration par récurrence de la suite  $P_n$  :

### Initialisation :

$$P_0 = 4 = 4C_0 = 2C_0 + 2C_0$$

### Hérédité :

Si  $P_n = 2C_0 + 2 \sum_{i=0}^{i=n} C_i$ , est-ce que  $P_{n+1} = 2C_0 + 2 \sum_{i=0}^{i=n+1} C_i$  est vraie ?

$$P_{n+1} = P_n + 2C_{n+1} \text{ car 2 nouveaux côtés sont rajoutés à la figure}$$

$$P_{n+1} = P_n + 2C_{n+1} = 2C_0 + 2 \sum_{i=0}^{i=n} C_i + 2C_{n+1} = 2C_0 + 2 \sum_{i=0}^{i=n+1} C_i$$

### Conclusion :

$P_{n+1}$  est vraie, donc par récurrence  $P_n$  est vraie pour tout  $n$ .

Par ailleurs  $C_0 = 1, C_1 = \frac{1}{2}$  ;  $C_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}, C_n = \frac{1}{2^n}$ , or  $P_n = 2C_0 + 2\sum_{i=0}^{n-1} C_i$  donc

$$P_n = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \text{ donc } P_n = 2 + 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 2 + 4 = 6$ .

Avec ce procédé, on a alors un périmètre qui tend vers une limite finie.

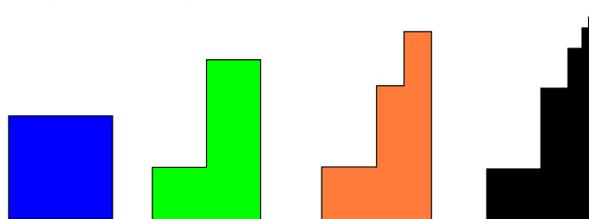


Figure 2 – Escaliers 0-1-2-10

A chaque étape deux segments du nouveau carré sont rajoutés, les premières valeurs du périmètre sont  $P_1 = 4 + 2 \times \frac{1}{2}$ ,  $P_2 = P_1 + 2 \times \frac{1}{2^2}$  et  $P_3 = P_2 + 2 \times \frac{1}{2^3}$ .

Le processus se continuant on a de même  $P_n = P_{n-1} + 2 \times \frac{1}{2^n}$ .

Le calcul des premières valeurs fait apparaître 6 comme limite. Peut-on faire mieux ?

### 2 – Dentiolite 1 :

En partant d'un carré de côté 1, on "enlève" du bord supérieur un triangle de hauteur la moitié du côté, que l'on replace sur le bord inférieur. L'aire est ainsi conservée.

Le périmètre est diminué de 2 côtés puis augmenté de 4 fois la longueur des côtés du triangle (qui est isocèle) par rapport au périmètre précédent.

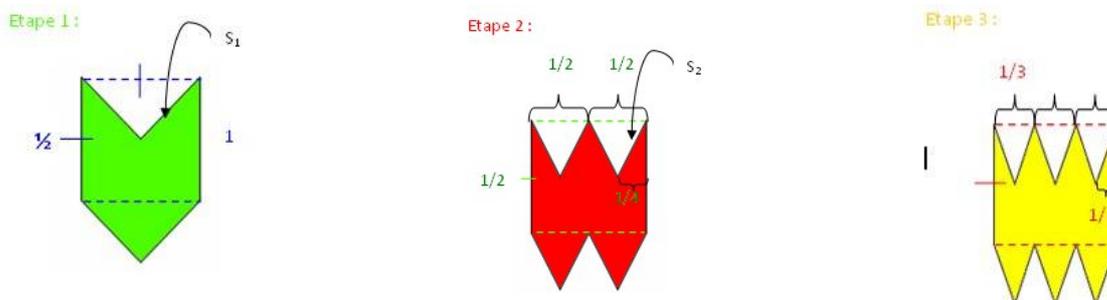


Figure 3 – Découpages pour Dentiolite 1

La figure initiale étant un carré, le périmètre initial est donc  $P_0 = 4$ .

On note  $P_n$  le périmètre,  $C_n$  le côté du triangle, et l'indice  $n$  l'étape.

A l'étape 1 on a  $C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $P_1 = 2 + 4C_1$ .

### Aux deux étapes suivantes

À chaque étape, on "coupe" le bord supérieur de la figure initiale d'un triangle de plus, en le replaçant sur le bord inférieur. Le périmètre augmente de manière semblable à chaque étape : on conserve toujours la longueur des 2 côtés latéraux de la figure et on ajoute le nombre de côtés de triangles autant de fois que l'étape le nécessite.

À l'étape 2 on a  $C_2 = \frac{\sqrt{5}}{4}$  et  $P_2 = 2 + 8C_2$ .

À l'étape 3 on a  $C_3 = \frac{\sqrt{10}}{6}$  et  $P_3 = 2 + 12C_3$ .

### Calcul de $P_n$ en fonction de $n$ et de $C_n$

On observe que  $P_1 = 2 + 4C_1$ ,  $P_2 = 2 + 8C_2$ ,  $P_3 = 2 + 12C_3$ .

On remarque que 4, 8 et 12 sont des multiples de 4 :  $P_1 = 2 + 4 \times 1C_1$ ,  $P_2 = 2 + 4 \times 2C_2$ ,  $P_3 = 2 + 4 \times 3C_3$ .

On peut alors en induire une formule permettant de calculer le périmètre  $P_n = 2 + 4 \times nC_n$ .

### Calcul de $C_n$ en fonction de $n$

Pour calculer  $C_n$  on utilise le théorème de Pythagore.



Figure 4 – Calcul des côtés

Par exemple à l'étape 2 on a  $C_2 = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{5}{16}}$ .

En suivant le même raisonnement que précédemment, on peut généraliser ce calcul :

$$C_n = AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2}} = \sqrt{\frac{n^2 + 1}{4n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{2n}.$$

### Procédure sous GéoTortue

Pour tracer la Dentiolite 1 nous avons utilisé le logiciel GéoTortue. Il nous faut la longueur des côtés, que l'on a pour le triangle avec la formule  $C_n$ , et l'angle pour faire tourner la tortue, notamment au niveau des triangles, que l'on a calculé (directement dans la procédure).

```
Procédures
1> pour dent n
2> av 100
3> rep n [tg (180 - atan (1/n)) ; av ((50/n)*√(n^2+1)) ;
4> td 2*(90-atan(1/n)) ; av ((50/n)*√(n^2+1)) ; td atan(1/n) ]
5> tg 180
6> av 100
7> rep n [tg atan(1/n) ; av ((50/n)*√(n^2+1)) ;
8> tg 2*(90-atan(1/n)) ; av ((50/n)*√(n^2+1)) ; td (180 -atan(1/n))]
9> fin
```

Figure 5 - Procédure Dentiolite 1

## Calcul de la limite de $P_n$

On a alors  $P_n = 2 + 4 \times nC_n = 2 + 4n \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{2n} = 2 + 2\sqrt{n^2 + 1}$ .

On a  $P_n \approx 2 + 2n$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$ . Avec ce procédé,  $P_n$  a une limite qui tend vers l'infini.

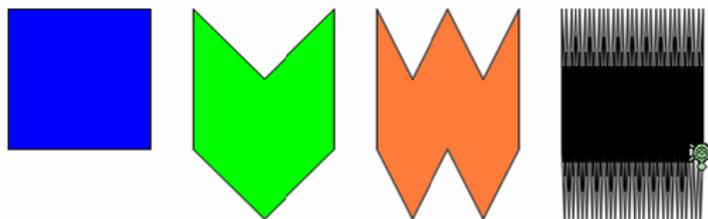


Figure 6 – Dentiolites 0-1-2-10

Peut-on faire mieux ?

### 3 - Dentiolite 2 :

#### Description du procédé :

Sur le même principe que la Dentiolite 1, au lieu de couper des triangles dans le carré, on peut couper à l'aide de paraboles. C'est-à-dire que pour la Dentiolite 1, on peut associer les segments de droite du triangle à des courbes de degré 1, et là on opère avec une courbe de degré 2. Cela permet d'avoir un processus d'augmentation du périmètre plus rapide, car les côtés ajoutés sont plus longs.

Pour chaque étape, le processus se déroule de la même manière que pour la Dentiolite 1 : on ajoute une dent à chaque fois.

Le périmètre augmente de manière semblable à chaque étape : on conserve les deux côtés latéraux et on ajoute autant de fois que l'étape le nécessite le nombre de côtés formés par les courbes.

On note  $P_n$  le périmètre,  $C_n$  la portion de courbe, et  $n$  leur indice l'étape.

#### Etape 1 :

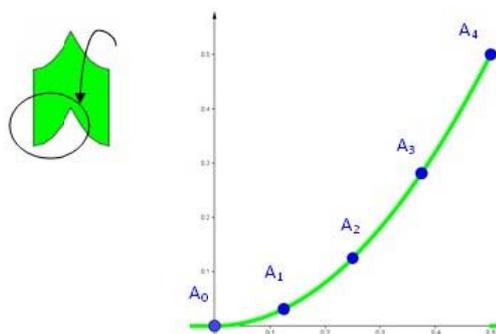


Figure 7 – Dentiolite 2 – Etape 1

De même que pour la Dentiolite 1, la figure initiale est un carré de côté 1, donc on a :

$$P_0 = 4 \text{ et } P_1 = 2 + 4C_1.$$

La formule de généralisation pour calculer le périmètre est ainsi  $P_n = 2 + 4 \times nC_n$ .

Pour calculer  $C_n$  on va étudier la portion de courbe dans un repère avec des coordonnées. On découpe en 4 et on choisit d'avoir 5 points par souci de faciliter les calculs, cependant le calcul est moins précis que si on en avait plus. Pour avoir la longueur de  $C_n$ , il faut additionner les distances entre les points.

Par construction, on connaît les coordonnées des points  $A_0$  et  $A_4$ . On définit ensuite les autres points en coupant de manière égale l'axe des ordonnées. On ne connaît ni leurs abscisses ni l'équation de la courbe pour le moment, on va donc les calculer.

### Recherche de la courbe

On a d'abord besoin de l'équation de la courbe pour pouvoir trouver les ordonnées.

On est sur une courbe de second degré sur l'intervalle  $[0; 0,5]$ .

On connaît le sommet de cette parabole qui est  $A_0(0; 0)$ .

Soit une équation du second degré :  $y = ax^2 + bx + c = f(x)$ ;  $S$  son sommet :  $S(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$ . On

sait que  $\frac{-b}{2a} = 0$ , donc  $b = 0$ , on a alors  $y = ax^2 + c = f(x)$ .

La courbe passe par  $A_0(0; 0)$  donc  $f(0) = 0$  donc  $c = 0$  d'où on a  $y = ax^2 = f(x)$

La courbe passe par  $A_4(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  donc pour  $x = \frac{1}{2}$  on a  $y = \frac{1}{2}$  donc  $\frac{1}{2} = a\left(\frac{1}{2}\right)^2$  donc  $\frac{1}{2} \times 4 = a$  d'où

$$a = 2$$

Ainsi on a pour l'étape 1 la parabole d'équation  $y = 2x^2$ .

### Calcul des coordonnées des points

On peut alors calculer les coordonnées des points  $A_0(x_0; y_0)$ ,  $A_1(x_1; y_1)$ ,  $A_2(x_2; y_2)$ ,  $A_3(x_3; y_3)$ ,  $A_4(x_4; y_4)$ .

On choisit  $x_1 = \frac{1}{8}$  d'où  $y_1 = 2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{32}$ , puis  $x_2 = \frac{2}{8}$  d'où  $y_2 = 2 \times \left(\frac{2}{8}\right)^2 = \frac{2^2}{32}$

puis  $x_3 = \frac{3}{8}$  d'où  $y_3 = 2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3^2}{32}$ .

On remarque que les ordonnées  $y$  forment une suite. Si on appelle  $p$  l'indice correspondant pour les points  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  on a alors :  $y_p = \frac{p^2}{32}$  car en prenant  $x_p = \frac{p}{8}$  on a  $y = 2 \times \left(\frac{p}{8}\right)^2 = \frac{p^2}{32}$ , et

ainsi pour  $x_4 = \frac{4}{8}$  on a  $y_4 = \frac{4^2}{32} = \frac{1}{2}$ , ce qui était attendu pour  $A_4(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ .

Les points du découpage sont donc  $A_0(0; 0)$ ,  $A_1(\frac{1}{8}; \frac{1}{32})$ ,  $A_2(\frac{2}{8}; \frac{4}{32})$ ,  $A_3(\frac{3}{8}; \frac{9}{32})$ ,  $A_4(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ .

### Périmètre

On a alors  $C_1 = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4$ , puis  $P_1 = 2 + 4C_1$ .

### **Etape 2**

À l'étape 2, on étudie la courbe sur  $\left[0; \frac{1}{4}\right]$  car l'on découpe la base de la « dent » en deux, on a ainsi

une dent en plus.

Soit  $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$  les points à l'étape 2.

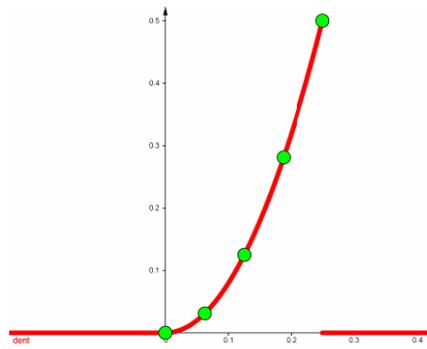


Figure 8 – Dentiolite 2 – Etape 2

### Recherche de l'équation de la courbe

De même que pour l'étape 1, par construction, on connaît les coordonnées des points  $B_0$  et  $B_4$ . On définit ensuite les autres points en coupant de manière égale l'axe des ordonnées :  $\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{4}{16}$ . Mais on ne connaît ni les abscisses des points, ni l'équation de la courbe.

En procédant comme pour l'étape 1, l'équation est de la forme  $y = ax^2$ .

La courbe passe par le point  $B_4(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$  d'où  $\frac{1}{2} = a\left(\frac{1}{4}\right)^2$  d'où  $a = 8$  d'où l'équation de la courbe est  $y = 8x^2$ .

### Calcul des coordonnées des points $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$

De même qu'à l'étape 1, on a  $x_1 = \frac{1}{16}, x_2 = \frac{2}{16}, x_3 = \frac{3}{16}, x_4 = \frac{4}{16}$ , c'est-à-dire  $x_p = \frac{p}{16}$ .

Pour l'abscisse des points, on peut définir une formule comme pour l'étape 1 :

Pour  $n = 1$  on avait  $x_p = \frac{p}{8}$ , pour  $n = 2$  on a  $x_p = \frac{p}{8 \times 2}$ , pour  $n = 3$  on aurait un découpage en

$24 = 8 \times 3$ , on aurait alors  $x_p = \frac{p}{8 \times 3}$ ; on peut alors induire que pour  $n$  on aura  $x_p = \frac{p}{8n}$ .

A l'étape 2 on a  $y_1 = 8 \times \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{32}$  et  $y_2 = 8 \times \left(\frac{2}{16}\right)^2 = \frac{4}{32}$ , puis dans le cas général

$y_p = 8 \times \left(\frac{p}{16}\right)^2 = \frac{p^2}{32}$ . On constate que  $y_p$  a les mêmes valeurs qu'à l'étape 1. On peut donc induire que  $y_p$  aura les mêmes valeurs pour toutes les étapes.

Les points du découpage sont donc  $B_0(0;0)$ ,  $B_1(\frac{1}{16}; \frac{1}{32})$ ,  $B_2(\frac{2}{16}; \frac{4}{32})$ ,  $B_3(\frac{3}{16}; \frac{9}{32})$ ,  $B_4(\frac{4}{16}; \frac{16}{32})$ .

### Périmètre

On a de même  $C_2 = B_0B_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4$ . Mais à l'étape 2 on a 8 segments de parabole d'où  $P_2 = 2 + 8C_2$ .

On remarque que :  $P_1 = 2 + 4C_1$  et  $P_2 = 2 + 2 \times 4C_2$ .

A l'étape 3 on aurait de même 12 segments, d'où on aurait  $P_3 = 2 + 3 \times 4C_3$ .

On peut alors en induire une formule pour le périmètre en fonction de  $n$  et  $C_n$  :  $P_n = 2 + n \times 4C_n$ .

On remarque que la formule du périmètre est la même que pour la Dentiolite 1, c'est bien ce qui était prévu dans le procédé.

### Etape 3

À l'étape 3, on étudie la courbe sur  $\left[0; \frac{1}{6}\right]$ , on aura 3 dents. Les abscisses des points du découpage seront alors  $x_p = \frac{p}{3 \times 2 \times 4} = \frac{p}{8 \times 3}$ .

### Généralisation pour la parabole :

En généralisant le procédé au dessus on peut alors induire que les points du découpage ont pour abscisses  $x_p = \frac{p}{8n}$ .

En procédant comme aux étapes 1 et 2, l'équation est de la forme  $y = ax^2$ .

La courbe passe par le point  $B_4\left(\frac{1}{2n}; \frac{1}{2}\right)$  d'où  $\frac{1}{2} = a\left(\frac{1}{2n}\right)^2$  d'où  $\frac{1}{2} = a \times \frac{1}{4n^2}$  d'où  $a = \frac{4n^2}{2} = 2n^2$  d'où l'équation de la courbe est  $y = 2n^2x^2$ .

### Remarques :

Nous avons utilisé le logiciel GéoTortue pour tracer la Dentiolite 2. Pour cela nous avons utilisé la distance entre les points pour pouvoir tracer la courbe, ainsi que l'angle pour tourner (directement dans la procédure). Nous l'avons réalisé uniquement pour l'étape 1, car il nous faudrait à chaque étape recalculer la distance et l'angle.

```
1> pour parad l
2> td 90
3> tg atan(1/4)
4> av l*(((1/8)^2+(1/32)^2)^(1/2))
5> tg (atan(3/4)-atan(1/4))
6> av l*(((1/8)^2+(3/32)^2)^(1/2))
7> tg (atan(5/4)-atan(3/4))
8> av l*(((1/8)^2+(5/32)^2)^(1/2))
9> tg (atan(7/4)-(atan(5/4)))
10> av l*(((1/8)^2+(7/32)^2)^(1/2))
11> fin
...
13> pour parag l
14> tg 90
15> td atan(1/4)
16> av l*(((1/8)^2+(1/32)^2)^(1/2))
17> td (atan(3/4)-atan(1/4))
18> av l*(((1/8)^2+(3/32)^2)^(1/2))
19> td (atan(5/4)-atan(3/4))
20> av l*(((1/8)^2+(5/32)^2)^(1/2))
21> td (atan(7/4)-(atan(5/4)))
22> av l*(((1/8)^2+(7/32)^2)^(1/2))
23> fin
...
```

```

24>
25> pour dent l
26> parad l
27> lc,td (atan(7/4)); av l/2; td 90; av l/2; tg 180; bc;
28> parag l
29> fin
30>
31> pour dentiolite2 l
32> dent l
33> tg (atan(7/4))
34> lc; av l/2; tg 90; av l/2; bc; av l; tg 180;
35> dent l
36> tg (atan(7/4)); tg 180; lc ; av l/2; td 90; av l/2; bc; tg 180; av l
37> fin

```

Figure 9 - Procédure Dentiolite 2

Il faut beaucoup de calculs pour passer à l'étape 2.

Nous avons aussi pensé à utiliser Algobox, logiciel sous lequel nous pouvons entrer des coordonnées de points. Cependant cela nécessite beaucoup de ligne de programmation (rien que pour l'étape 1, il y a  $5 \times 2 \times 4$  coordonnées à rentrer : 5 points par courbe, coordonnées  $x$  et  $y$ , courbe présente 4 fois dans la figure). On peut aussi mettre les formules pour calculer les coordonnées, mais cela implique de déclarer énormément de variables, ce qui ne raccourcit pas forcément le programme, contrairement à ce que l'on pouvait penser.

### Pistes d'amélioration :

Pour optimiser encore le processus d'augmentation du périmètre, on peut penser à augmenter le degré de la courbe, ce qui rallonge la longueur des côtés ajoutés. On imagine que la figure vers laquelle ça va tendre sera un rectangle dont on ne distinguera plus l'intérieur de l'extérieur, car la « dent » formée par la courbe va "s'aplatir".

On peut aussi penser à "creuser" les « dents » plus loin dans le carré de départ : au lieu d'aller seulement à 1/2 de hauteur, prendre une hauteur de 1, voir plus, mais après les « dents » s'emboîteraient les unes dans les autres.

Ces différents processus n'ont pas de limite : les périmètres tendent vers l'infini.

Peut-on améliorer la rapidité de croissance ?

## 4 – Carré avec récursivité

### Présentation

Pour répondre à notre problème, c'est-à-dire augmenter le périmètre d'une figure tout en conservant la même aire, nous pouvons continuer à nous placer dans un carré.

On divise chaque côté du carré (de longueur 1) en cinq segments égaux. On peut alors rajouter un carré de longueur 1/5 à l'extérieur du carré initial (à partir du deuxième segment).

Le périmètre a été augmenté (création de segments supplémentaires) mais l'aire aussi. C'est pourquoi il faut retirer un carré (à l'intérieur du carré initial) de même aire en prenant pour un de ses côtés le quatrième segment de longueur 1/5.

On réitère ce phénomène sur les quatre côtés du carré. Ainsi, l'aire est restée identique mais le périmètre a beaucoup augmenté (de 5 segments on en obtient 9 segments sur chaque côté du carré).

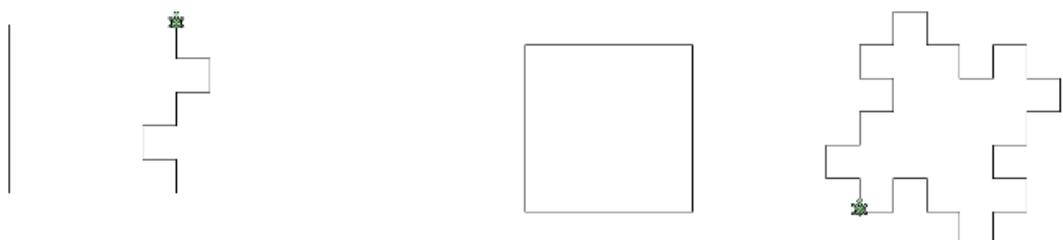


Figure 10 – Découpage d'une ligne - Carré 0 et Carré 1

### Récurtivité

A chaque étape, cette opération se répète à une échelle plus petite (on divise à nouveau par 5 chaque côté initialement divisé par 5) : on utilise le phénomène de récursivité.

```

Procédures
1> pour segment l n
2> si n==0 alors [ av l ] sinon [ segment l/5 n-1
3> tg 90; segment l/5 n-1
4> td 90; segment l/5 n-1
5> td 90; segment l/5 n-1
6> tg 90; segment l/5 n-1
7> td 90; segment l/5 n-1
8> tg 90; segment l/5 n-1
9> tg 90; segment l/5 n-1
10> td 90; segment l/5 n-1 ]
11> fin
12> pour carré l n
13> rep 4 [ segment l n; td 90 ]
14> rep 4 [ segment l n; td 90 ]
15> fin
    
```

Figure 11 - Procédure Carré

Sur la figure, cela se manifeste par la création de carrés de plus en plus petits en fonction des étapes.

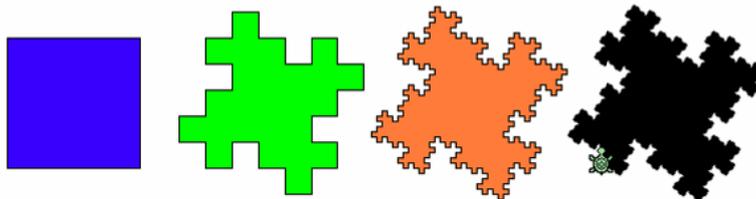


Figure 12 – Carré 0, Carré 1, Carré 2 et Carré 10

Les différentes valeurs sont relevées dans le tableau en dessous.

Etape	0	1	2	$n$
Nombre de côtés	$4 \times 1$	$4 \times 9$	$4 \times 9 \times 9$	$4 \times 9^n$
Longueur d'un côté	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5 \times 5}$	$\frac{1}{5^n}$
Périmètre	4	$4 \times 9 \times \frac{1}{5}$	$4 \cdot 9^2 \cdot \frac{1}{5^2}$	$4 \cdot 9^n \cdot \frac{1}{5^n}$

On construit ainsi la formule  $P_n = 4 \times 9^n \times \frac{1}{5^n}$  où 4 correspond aux quatre côtés du carré,  $n$  correspond au nombre d'étapes,  $1/5$  correspond à la division de chaque segment en 5 plus petits et 9 correspond aux segments créés à partir d'un seul initialement.

### Variante

Pour augmenter l'efficacité de cette méthode, nous pourrions diviser les segments par 4, et non par 5, afin d'augmenter la valeur du périmètre (les segments rajoutés seraient plus longs), et nous n'aurions que 8 nouveaux segments.

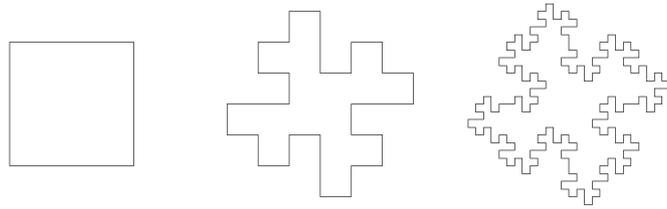


Figure 13 – Carré Variante

Etape	0	1	2	$n$
Nombre de côtés	$4 \times 1$	$4 \times 8$	$4 \times 8 \times 8$	$4 \times 8^n$
Longueur d'un côté	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4 \times 4}$	$\frac{1}{4^n}$
Périmètre	4	$4 \times 8 \times \frac{1}{4}$	$4 \cdot 8^2 \cdot \frac{1}{4^2}$	$4 \cdot 8^n \cdot \frac{1}{4^n}$

Les deux formules sont  $P_n^5 = 4 \times \left(\frac{9}{5}\right)^n$  et  $P_n^4 = 4 \times \left(\frac{8}{4}\right)^n = 4 \times 2^n$ .

Les deux périmètres deviennent infiniment grands lorsque  $n$  augmente infiniment, mais il est évident que la variante augmente plus rapidement car  $\frac{9}{5} < \frac{8}{4}$ .

### 5 - A partir d'un hexagone

On considère maintenant un hexagone régulier comme figure initiale (voir figure ci-dessous), contenue dans une surface dont l'aire fixe  $A_s = 4$  :

Si l'aire  $A_H$  de ce polygone régulier  $H$  est  $A_H = 1$  alors le côté  $c$  de l'hexagone prend comme valeur

$$c = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

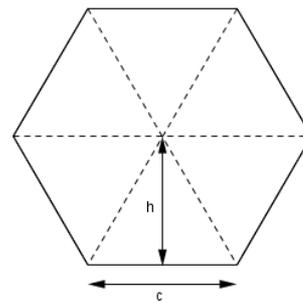
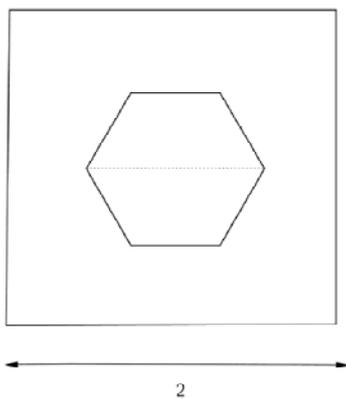


Figure 14 – Hexagone initial

### Calcul de $c$

Soit  $c$  un côté de l'hexagone. On a alors  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ ,  $h$  étant la hauteur du triangle équilatéral de base  $c$ .

L'aire d'un triangle équilatéral  $t$  de l'hexagone  $H$  est définie par  $A_t = \frac{c \times h}{2} = \frac{c \times \frac{\sqrt{3}}{2}c}{2} = \frac{\sqrt{3}c^2}{4}$ .

L'aire de l'hexagone  $H$  est alors définie par  $A_H = 6 \times A_t = 6 \times \frac{\sqrt{3}c^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}c^2}{2}$ .

Sachant que  $A_H = 1 \text{ m}^2$  on a donc  $A_H = \frac{3\sqrt{3}c^2}{2} = 1$  d'où  $c^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ , donc  $c = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$ .

### Construction initiale

Pour obtenir l'étape suivante, on peut appréhender le problème de la grandeur du périmètre en soustrayant des trapèzes (dont les côtés non parallèles et la petite base équivalent à  $\frac{c}{2}$ ) sur un côté de

l'hexagone et ensuite rajouter cette partie à l'extérieur du trapèze.

Pour cela, l'étude sur la moitié de l'hexagone, soit un trapèze, facilite la lecture de la construction. (1)

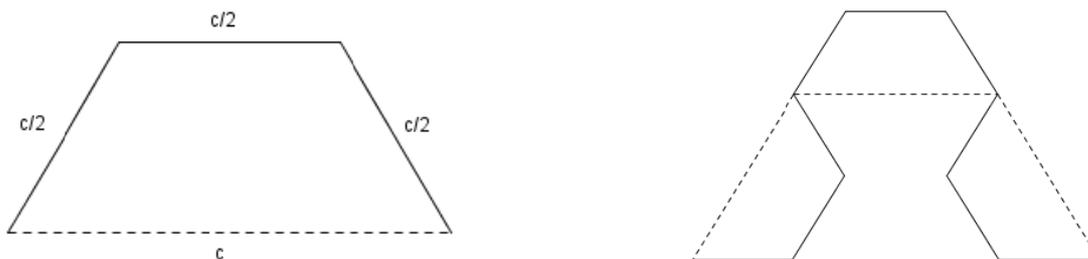


Figure 15 – Construction initiale

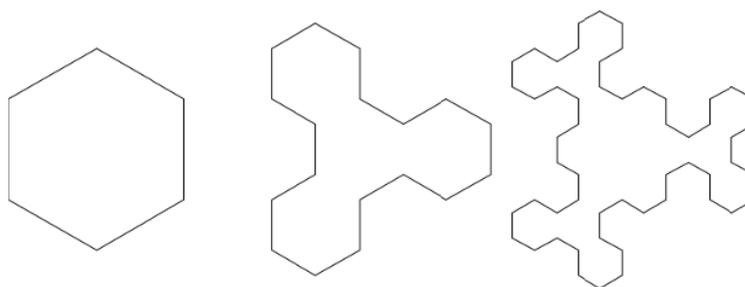


Figure 16 – Hexagones 0, 1 et 2

### Calcul du périmètre

Après avoir calculé à la main le périmètre  $P_n$  des figures créées selon les premières étapes  $n$ , on peut regrouper les résultats dans le tableau suivant.

$n$	$P_n$	
0	$6 \times c$	$6\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 3,7$
1	$18 \times \frac{c}{2}$	$9\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 5,6$
2	$54 \times \frac{c}{4}$	$13,5\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 8,4$
3	$162 \times \frac{c}{8}$	$20,25\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 12,6$
4	$486 \times \frac{c}{16}$	$30,375\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 18,8$

$n$	$P_n$	
0	$6 \times c$	$6 \times 1 \times \frac{c}{1}$
1	$9 \times c$	$6 \times 3 \times \frac{c}{2}$
2	$13,5 \times c$	$6 \times 9 \times \frac{c}{4}$
3	$20,25 \times c$	$6 \times 27 \times \frac{c}{8}$
4	$30,375 \times c$	$6 \times 81 \times \frac{c}{16}$

Après observation, on voit que le périmètre augmente en fonction de l'étape. On peut donc chercher à formuler une conjecture.

On peut donc généraliser en proposant la conjecture suivante  $P_n = 6 \times 3^n \times \frac{c}{2^n} = 6c \times \frac{3^n}{2^n} = 6c \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ .

### Démonstration

A chaque étape chaque côté est divisé par deux et remplacé par 3 côtés, 6 étant le nombre de côtés et  $c$  étant la dimension du côté de base.

### Calcul de la limite du périmètre

On a donc  $P_n = 6c \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ , or  $6c = 6 \times \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$  est une valeur constante, donc la valeur de la limite

porte sur  $\left(\frac{3}{2}\right)^n$  (suite géométrique de raison  $q = \frac{3}{2}$ ); or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$  car  $q = \frac{3}{2} > 1$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

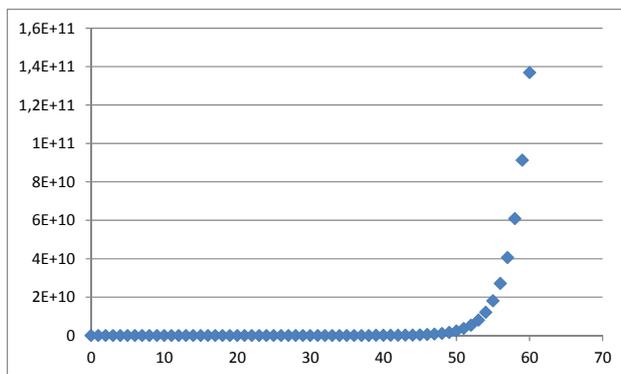


Figure 17 – Périmètre en fonction de n

### Construction avec GéoTortue

Le logiciel GéoTortue permet d'utiliser la récursivité. On peut visualiser l'évolution de l'allure de la figure et se rendre compte alors que le périmètre est d'autant plus grand que le rang de l'étape augmente.

Procédures		
1> pour trapèzeg l n	12> pour trapèzed l n	24> pour hexa l n
2> si n==0 alors [ av l ] sinon [	13> si n==0 alors [ av l ] sinon [	25> si n==0 alors [ av l ] sinon [
3> tg 60	14> td 60	26> trapèzeg l/2 n-1
4> trapèzeg l/2 n-1	15> trapèzed l/2 n-1	27> td 60
5> td 60	16> tg 60	28> trapèzed l/2 n-1 ]
6> trapèzed l/2 n-1	17> trapèzeg l/2 n-1	29> fin
7> td 60	18> tg 60	30>
8> trapèzeg l/2 n-1	19> trapèzed l/2 n-1	31> pour hexagone l n
9> tg 60]	20> td 60]	32> rep 3 [ td 60; hexa l n ]
10> fin	21> fin	33> fin

Figure 18 – Procédure Hexagone

La procédure permettant de construire la figure exige une programmation en 3 étapes. Sachant que la figure est un assemblage de trapèzes qui subissent un agrandissement ou une réduction selon la valeur de l'étape ; il a été nécessaire de créer deux procédures intermédiaires pour construire ces

trapèzes :

- une procédure intitulée *trapèzeg* pour les trapèzes « sortants » (ceux qui sont « recollés » à l'extérieur ;
  - une procédure intitulée *trapèzed* pour les trapèzes « rentrants » (ceux qui sont « creusés »).
- Enfin, la figure obtenue exige alors un assemblage de ces deux trapèzes (*hexa*) qui dépend du rang de l'étape. Ainsi, on répète 3 fois ce programme (*hexagone*) pour visualiser la figure selon l'étape  $n$ .

Il faut en plus paramétrer le programme pour modéliser une figure selon les variables  $l$  qui indique la longueur du segment initial et  $n$  qui indique l'étape.

Voici la modélisation finale jusqu'à l'étape 4 (l'aire est conservée et le périmètre augmenté.)

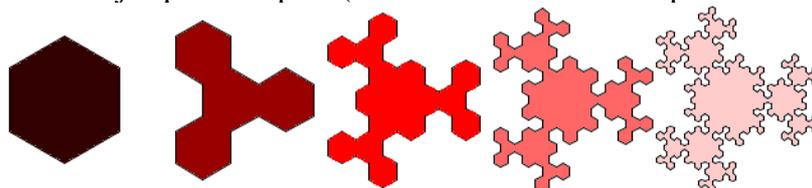


Figure 19 – Hexagones de 0 à 4

## 6 – A partir d'un cercle

Après être partis de figures polygonales, nous avons eu l'idée de débiter avec la figure pour laquelle une aire de 1 donnait un périmètre minimal: le cercle.

Dès lors, connaissant l'aire de notre figure il faut lui trouver son rayon.

Comme  $A_c = 1$  on a  $\pi r^2 = 1$  d'où  $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ .

### Construction du creux

Nous avons voulu reprendre l'idée d'enlever des morceaux de notre figure pour les remettre ailleurs, mais le problème dans un cercle est que les découpages doivent prendre en compte des parties arrondies, plus difficiles à superposer sur le reste du cercle.

Nous avons donc eu l'idée de prendre un « trapèze » dans le cercle auquel on ôterait sa partie arrondie. Pour tracer ce « trapèze » nous prenons deux points du cercle ( $A$  et  $A'$ ) chacun reliés au

centre du cercle  $O$ . L'angle que forme  $A'OA$  est noté  $\alpha$  :  $\alpha = \widehat{A'OA}$ . De ce rayon nous ôtons un segment de longueur  $d$ , qui nous permettra d'avoir une figure en une seule partie dont les différents morceaux ne coïncideraient pas par un seul point ( $O, C, C'$  distincts).

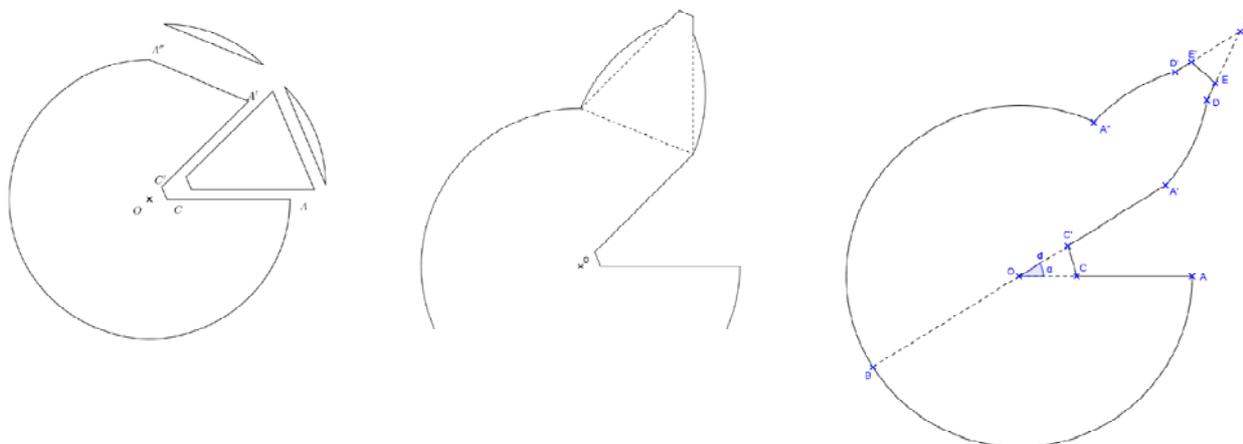


Figure 20 – Découpage dans un cercle

### Construction de la bosse

Revenons à la figure, nous relient les deux rayons amputés des segments de longueur  $d$  qui donnent les points  $C$  et  $C'$ , ainsi que les deux points initiaux:  $A$  et  $A'$ . Comme nous pouvons le voir sur la figure 20, la partie arrondie est écartée et préservée pour la suite. On définit alors le point  $A''$  symétrique de  $A$  par rapport à  $A'$ . En reliant ce point à  $A'$  et en découpant la partie extérieure, on obtient une nouvelle surface identique au premier morceau arrondi découpé. Nous avons également créé un nouveau côté plat sur lequel nous pouvons poser le trapèze qui a exactement les bonnes dimensions,  $AA'$  étant égal à  $A''A'$ . Les deux morceaux arrondis trouvent alors naturellement leur place chacun d'un côté du trapèze.

### Conditions

Sachant que  $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$  le périmètre du cercle est  $P_0 = 2\pi r = 2\pi \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi}$ .

Par ailleurs on a  $d = OC = OC' \in \left] 0; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right[$  et  $AC = A'C' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - d$ .

Nous avons aussi besoin des points  $D, D', E, E', O'$  définis en reposant le trapèze au dessus de  $[A'A'']$ .

Nous avons aussi alors remarqué qu'il fallait un angle pas trop grand sinon les parties arrondies du cercle recollées sur le trapèze se chevaucheraient.

On cherche donc l'ensemble de définition de  $\alpha$  :  $A''D' \leq A''O' = r$  sinon  $[A''D']$  et  $[A'D]$  seraient sécants, et  $A''D' \neq A''O'$  sinon  $O', D', D$  seraient confondus et alors le triangle  $O'E'E$  serait « vide ».

Si  $O' = D'$  alors le triangle  $AA'O'$  est équilatéral, l'angle  $\hat{A'O'A''} = \hat{A'O'A} = \alpha$  vaut alors  $60^\circ$ . Pour que la construction soit possible il faut donc que  $\alpha < 60^\circ$ .

### Calcul de distances

1 –  $\cos \hat{AA'O}$  en fonction de  $AA'$

Soit  $B$  la symétrique de  $A'$  par rapport à  $O$  : le triangle  $BA'A$  est rectangle en  $A$  donc  $\cos \hat{AA'B} = \frac{AA'}{A'B} = \frac{AA'}{2r} = \frac{AA'}{2/\sqrt{\pi}} = \frac{AA'\sqrt{\pi}}{2}$  donc  $\cos \hat{AA'O} = \frac{AA'\sqrt{\pi}}{2}$ .

2 –  $AA'$  en fonction de  $\alpha$

De plus  $AOA'$  est isocèle en  $O$  et  $\hat{AOA'} = \alpha$  donc  $\hat{AA'O} = \frac{180-\alpha}{2}$ , de plus  $\cos \hat{AA'O} = \frac{AA'\sqrt{\pi}}{2}$

donc  $\frac{2 \cos \hat{AA'O}}{\sqrt{\pi}} = AA'$  donc  $AA' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)$ .

2 – Autre calcul de  $AA'$

En prenant  $I$  milieu de  $[AA']$  le triangle  $OAI$  est rectangle en  $O$  et  $\hat{AOI} = \frac{\alpha}{2}$  d'où  $\sin \hat{AOI} = \frac{AI}{AO}$

d'où  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{AA'/2}{1/\sqrt{\pi}}$  d'où  $AA' = 2 \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

On retrouve bien le même résultat qu'au dessus puisque  $\cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right) = \cos\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

3 –  $CC'$  en fonction de  $\alpha$

$(OA)$  et  $(OA')$  sont sécantes en  $O$  ;  $O, C, A \in (OA)$  et sont dans cet ordre, de même  $O, C', A' \in (OA')$  ;

on a  $\frac{OC}{OA} = \frac{d}{r}$  et  $\frac{OC'}{OA'} = \frac{d}{r}$  donc  $\frac{OC}{OA} = \frac{OC'}{OA'}$

donc d'après la réciproque du théorème de Thalès  $(CC') \parallel (AA')$

$$\text{donc } \frac{d}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} = \frac{CC'}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)} \text{ donc } d\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{CC'}{\cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)} \text{ donc } CC' = \frac{2d\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \times \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)$$

$$\text{donc } CC' = 2d \times \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right).$$

### 3' - Autre expression pour $CC'$

Dans le triangle  $OCC'$  soit  $H$  le milieu de  $[CC']$ .

Le triangle  $OCH$  est rectangle en  $H$  avec  $\hat{COH} = \frac{\alpha}{2}$  d'où  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{CH}{OC} = \frac{CC'/2}{d}$

$$\text{d'où } CC' = 2d \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Là encore on retrouve bien le même résultat qu'au dessus.

### 4 - Calcul de l'augmentation du périmètre

Nos constructions sur le cercle n'altèrent pas l'aire de départ du cercle, ainsi chaque fois que nous utilisons le processus de construction le périmètre augmente de :

$$p = AC + CC' + C'A' + DE + EE' + E'D' = 2AC + 2CC' + 2AC - 2AA' = 4AC + 2CC' - 2AA'$$

$$p = 4\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) + 2\left(2d \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)\right) - 2 \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right) \text{ d'où}$$

$$p = 4\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \times \left(1 - \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)\right).$$

### 4' - Autre formule

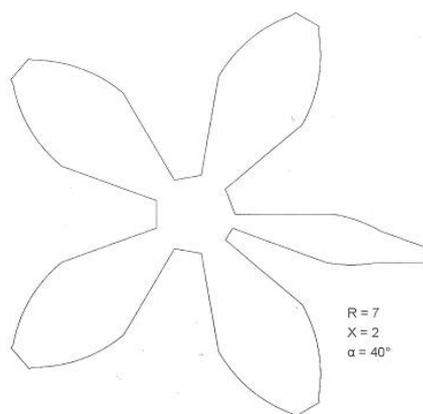
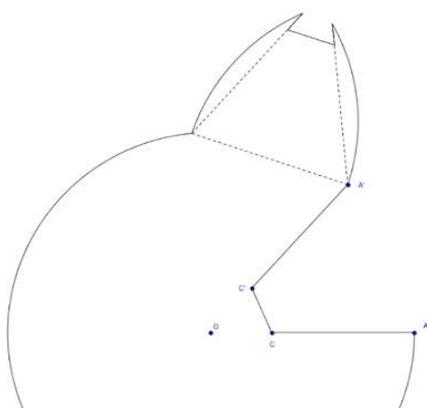


Figure 21 – Figures particulières

Pour tenir compte des situations particulières selon  $d$ , on pose  $DE = |A'E - A'D| = |AC - AA'|$

$$\text{d'où } DE = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|.$$

$$p = AC + CC' + C'A' + DE + EE' + E'D' = 2AC + 2CC' + 2DE$$

$$p = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) + 2\left(2d \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + 2\left|\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|$$

### Répétition

Notre idée de départ était de répéter le processus jusqu'à avoir fait le tour du cercle.

Ces augmentations sont opérées un nombre maximum de fois dépendant de l'angle pris au départ. Pour simplifier les calculs nous n'avons pas cherché à utiliser la partie de cercle restante. Nous

n'avons donc pris que la partie entière de  $\frac{360}{2\alpha}$  notée  $E\left(\frac{360}{2\alpha}\right)$ .

La partie ajoutée au périmètre du cercle vaut donc  $E\left(\frac{360}{2\alpha}\right) \times p$  c'est-à-dire

$$4E\left(\frac{360}{2\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \left(1 - \cos\left(\frac{180 - \alpha}{2}\right)\right).$$

En notant  ${}^d P_\alpha$  le périmètre total dépendant de  $\alpha$  et de  $d$  on a donc

$${}^d P_\alpha = 2\sqrt{\pi} + 4E\left(\frac{360}{2\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \left(1 - \cos\left(\frac{180 - \alpha}{2}\right)\right)$$

### Découpage par étapes

Nous intégrons la notion d'étape dans la formule précédente, c'est-à-dire que le périmètre  ${}^d P_\alpha$  pourra être calculé à n'importe quelle étape  $n$  du processus. Une étape  $n$  correspond à une division par 2 de l'angle  $\alpha$  :

si  $n = 0$  on a 0 pétale ; si  $n = 1$  on a  $E\left(\frac{360}{2\alpha}\right)$  bosses ou pétales ; si  $n = 2$  on a  $E\left(\frac{360}{2\alpha/2}\right)$  pétales ;

si  $n = 3$  on a  $E\left(\frac{360}{2\alpha/4}\right)$  pétales ; ...

On peut donc conclure en prenant comme angle  $\alpha$  en fonction des étapes  $n$  :  $\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ .

On remplace donc  $\alpha$  par  $\frac{\alpha}{2^{n-1}}$  dans la formule  ${}^d P_\alpha$  ce qui donne

$${}^d P_n = 2\sqrt{\pi} + 4E\left(\frac{360}{2\frac{\alpha}{2^{n-1}}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \left(1 - \cos\left(\frac{180 - \frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2}\right)\right)$$

Ce qui donne  ${}^d P_n = 2\sqrt{\pi} + 4E\left(\frac{360 \times 2^{n-1}}{2\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \left(1 - \cos\left(\frac{180 - \frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2}\right)\right)$ .

En choisissant  $\alpha = 45^\circ$  on obtient  ${}^d P_n = 2\sqrt{\pi} + 4E\left(\frac{360 \times 2^{n-1}}{90}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \left(1 - \cos\left(\frac{180 - \frac{45}{2^{n-1}}}{2}\right)\right)$

Ce qui donne  ${}_{45}^d P = 2\sqrt{\pi} + 4E(2^{n+1}) \times \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} - d \right) \left( 1 - \cos\left(90 - \frac{45}{2^n}\right) \right)$ .

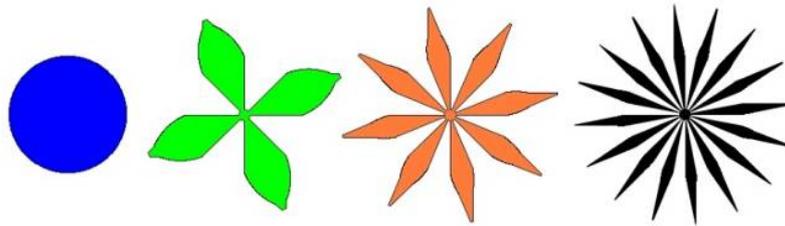


Figure 22 – Fleurs 0-1-2-3

<pre> Procédures 1&gt; pour trou r d a 2&gt; f:= r-d 3&gt; b:= (180-a)/2 4&gt; l:= 2*d*sin(a/2) 5&gt; couleur 255 0 0 6&gt; td 180; av f 7&gt; tg b; av l 8&gt; tg b; av f 9&gt; fin </pre>	<pre> 11&gt; pour bosse r d a 12&gt; n:=a 13&gt; g:= r-d-2*r*sin(a/2) 14&gt; b:= (180-a)/2 15&gt; l:= 2*d*sin(a/2) 16&gt; s:=2*r*sin(a/2) 17&gt; c:=a/n 18&gt; couleur 0 0 255 19&gt; rep n [ av s; td c ] 20&gt; couleur 255 0 0 21&gt; tg a/2; av g 22&gt; td b; av l 23&gt; td b; av g 24&gt; tg a/2 25&gt; couleur 0 0 255 26&gt; rep n [ av s; td c ] 27&gt; fin </pre>	<pre> 29&gt; pour figure r d a 30&gt; ct 31&gt; trou r d a 32&gt; td a/2 33&gt; bosse r d a 34&gt; tg 180-(a/2) 35&gt; fin </pre>	<pre> 37&gt; pour Fleur r d p 38&gt; a:= 180/p 39&gt; rep (180/a) [figure r d a] 40&gt; lc 41&gt; tg 180; av 320 42&gt; td 90; av 80; tg 90 43&gt; bc 44&gt; écris nombre de pétales = p 45&gt; lc 46&gt; av 15; tg 90; av 30; td 90 47&gt; bc 48&gt; écris rayon = r 49&gt; lc 50&gt; av 15; td 90; av 15; tg 90 51&gt; bc 52&gt; écris rayon central = d 53&gt; fin </pre>
---	--	---	--

Figure 23 – Procédure Fleurs

<pre> 1&gt; pour trou r d a 2&gt; f:= r-d 3&gt; b:= (180-a)/2 4&gt; l:= 2*d*sin(a/2) 5&gt; crayon rouge 6&gt; td 180; av f 7&gt; tg b; av l 8&gt; tg b; av f 9&gt; fin </pre>	<pre> 11&gt; pour bosse r d a 12&gt; si (a&gt;0.1) alors [n:=10*a] sinon [n:=1] 13&gt; g:= r-d-2*r*sin(a/2) 14&gt; b:= (180-a)/2 15&gt; l:= 2*d*sin(a/2) 16&gt; c:=a/n 17&gt; s:=2*r*sin(c/2) 18&gt; crayon bleu 19&gt; rep n [ av s; td c ] 20&gt; crayon rouge 21&gt; tg a/2; av g 22&gt; td b; av l 23&gt; td b; av g 24&gt; tg a/2 25&gt; crayon bleu 26&gt; rep n [ av s; td c ] 27&gt; fin </pre>	<pre> 29&gt; pour figure r d a 30&gt; ct 31&gt; trou r d a 32&gt; td a/2 33&gt; bosse r d a 34&gt; tg 180-(a/2) 35&gt; fin </pre>	<pre> 37&gt; pour Fleur r d p 38&gt; a:= 180/p 39&gt; rep (180/a) [figure r d a] 40&gt; lc 41&gt; tg 180; av 320 42&gt; td 90; av 80; tg 90 43&gt; bc 44&gt; écris nombre de pétales = p 45&gt; lc 46&gt; av 15; tg 90; av 30; td 90 47&gt; bc 48&gt; écris rayon = r 49&gt; lc 50&gt; av 15; td 90; av 15; tg 90 51&gt; bc 52&gt; écris rayon central = d </pre>
---	---	---	---

Figure 23 bis – Procédure Fleurs (conforme)

## 7 – Peigne

Une autre idée a été de modifier un rectangle pour faire un « peigne » ou « radiateur ».

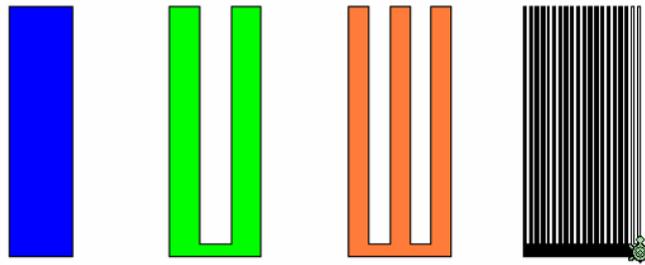


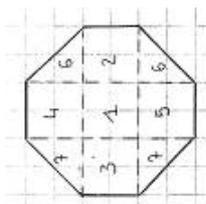
Figure 24 – Peignes 0-1-2-10

Le périmètre est donné par  $P_n = 4 + 3,8n + \frac{4n + 2}{2,1n + 2}$ .

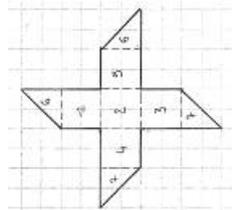
Cette figure est paradoxale puisqu'on a l'impression que l'aire devient plus grande quand  $n$  est très grand. (2)

### 8 - Octogone

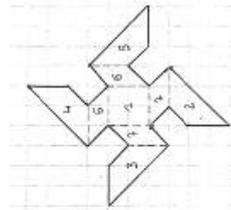
Une tentative limitée a été faite à partir d'un octogone, les mesures sont en *cm*. La mise en place d'un processus ne semble pas possible.



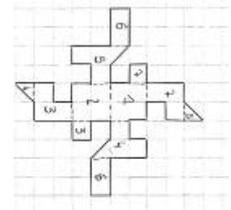
$8 + 8\sqrt{2}$   
1,93



$24 + 8\sqrt{2}$   
3,53



$8 + 24\sqrt{2}$   
4,20



$48 + 4\sqrt{2}$   
5,37

Figure 25 – Découpage d'un Octogone

Une variante a été cherchée en reprenant l'idée utilisée pour le carré : découper les bords et rajouter des octogones réduits. Mais pour éviter que des morceaux se superposent il a fallu modifier le découpage.

Voici une procédure avec GéoTortue avec un redécoupage de chaque segment en 11.

```

1> pour segment l n
2> si n==0 alors [av l] sinon [segment l/11 n-1]
3> av 2*l/11
4> tg 135; segment l/11 n-1
5> td 45; segment l/11 n-1
6> td 45; segment l/11 n-1
7> td 45; segment l/11 n-1
8> td 45; segment l/11 n-1
9> td 45; segment l/11 n-1
10> td 45; segment l/11 n-1
11> tg 135; segment l/11 n-1
12> av 2*l/11
13> td 135; segment l/11 n-1;
14> tg 45; segment l/11 n-1
15> tg 45; segment l/11 n-1
16> tg 45; segment l/11 n-1
17> tg 45; segment l/11 n-1
18> tg 45; segment l/11 n-1
19> tg 45; segment l/11 n-1
20> td 135; segment l/11 n-1]
21> av 2*l/11
22> fin
23>
24> pour octogone l n
25> rep 8 [segment l n; td 45]
26> fin

```

Figure 26 – Procédure Octogone

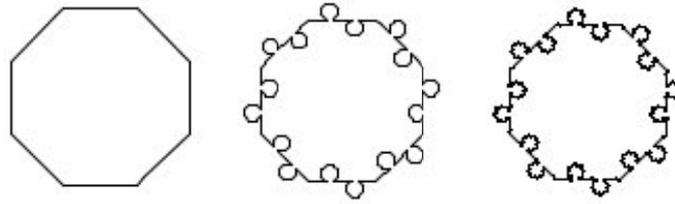


Figure 26bis – Octogone 0-1-2

## 8 – Cgone

En cherchant à étendre à des polygones réguliers il a fallu utiliser la partie entière pour découper en 3. Une première tentative a fait apparaître, en zoomant, des superpositions : sans doute qu'il y a trop de rajouts intermédiaires.

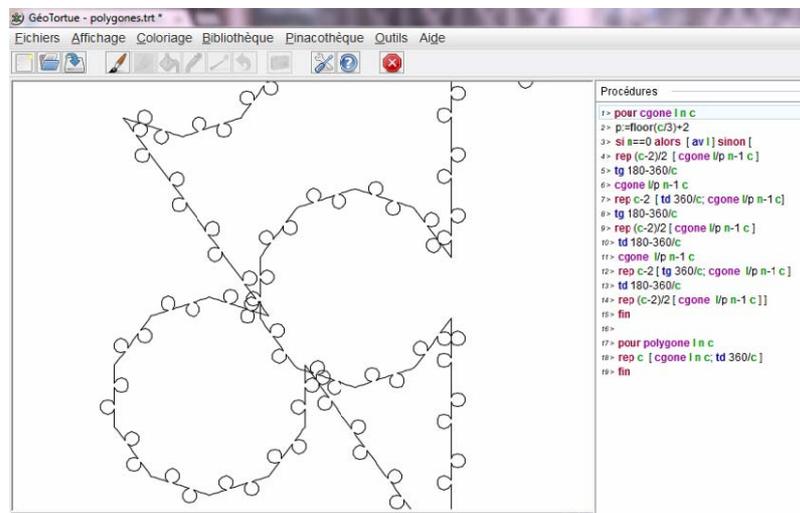


Figure 27 – Procédure Octogone 2 - Erreur

En procédant comme dans les figures précédentes, c'est-à-dire en ne rajoutant que deux insertions par segments et en utilisant un découpage avec  $(3 * \text{floor}(c/3) + 5)$  on obtient des figures satisfaisantes.

```

1> pour cgone l n c
2> p:=3*floor(c/3)+5
3> si n==0 alors [ av l ] sinon [ av (floor(c/3)+3)*l/p;
4> tg 180-360/c;
5> rep c-1 [ cgone l/p n-1 c; td 360/c ]
6> td 180; av (floor(c/3)-1)*l/p; td 180-360/c
7> rep c-1 [ cgone l/p n-1 c; tg 360/c ]
8> td 180; av (floor(c/3)+3)*l/p ]
9> fin
10>
11> pour polygonepubli l n c
12> rep c [ cgone l n c; td 360/c ]
13> fin
14>

```

Figure 28 – Procédure cgone

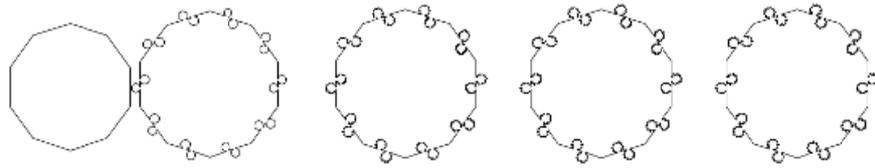


Figure 29 – 10gones 0-1-2-3-4

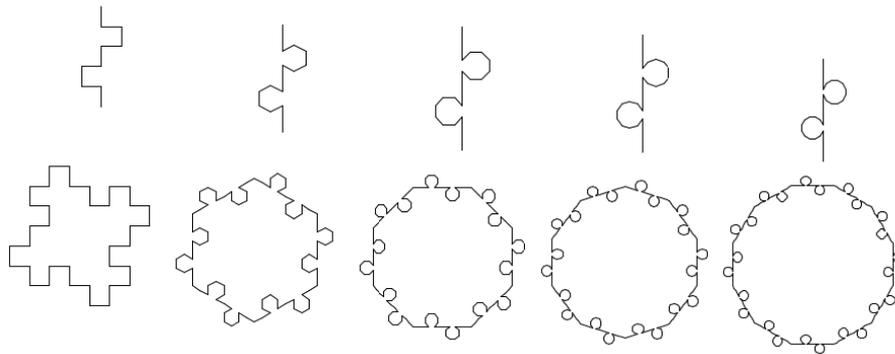


Figure 30 – cgonnes 1 pour c valant 4-6-8-10-12

Les différentes formules donnant le périmètre sont regroupées en dessous :

$$4\left(\frac{9}{5}\right)^n \quad 6\left(\frac{16}{8}\right)^n \quad 8\left(\frac{23}{11}\right)^n \quad 10\left(\frac{30}{14}\right)^n \quad 12\left(\frac{37}{17}\right)^n$$

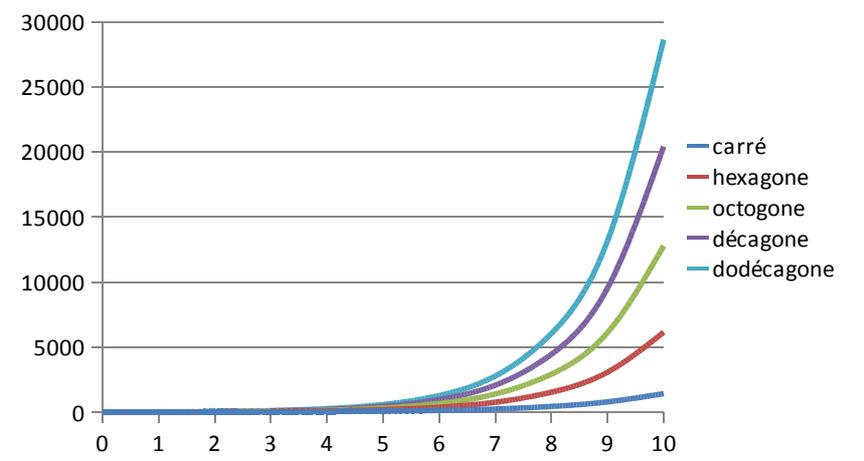


Figure 31 – Comparaison 1 des périmètres

## 10 – Comparaisons

Afin de mieux appréhender les différentes formules que nous avons trouvées et d'en comparer les résultats, nous les avons rentrées sur un tableur pour pouvoir comparer l'évolution du périmètre selon les étapes.

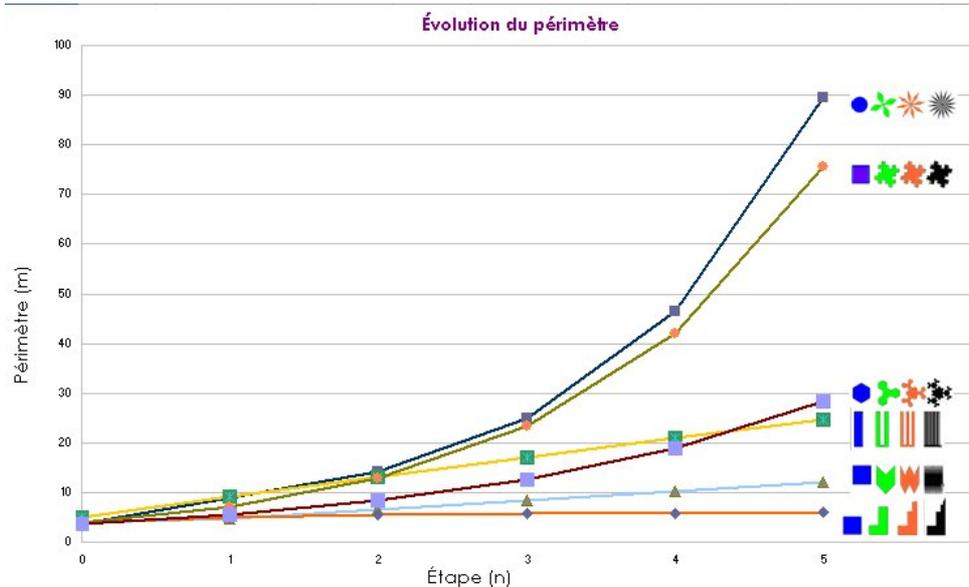


Figure 32 - Comparaison 2 de périmètres

Ainsi comme nous pouvons le voir sur la figure qui présente les 6 premières étapes, nous pouvons regrouper les méthodes de construction en trois groupes différents.

Dans le premier, nous mettrons l'Escalier. Ce dernier augmente légèrement et a une limite de 6.

Dans le groupe suivant se trouvent les Dentolites et le Peigne. Tous augmentent doucement mais ne plafonnent à aucune limite.

Dans le dernier groupe, à l'instar des fractales (de carrés, d'hexagones ou autre polygones), la fleur connaît une forte croissance (bien que pour l'hexagone, la figure ne montre pas parfaitement sa rapide augmentation). Les membres de ce groupe vont donc voir leur périmètre tendre vers l'infini de façon plus fulgurante que les méthodes utilisées pour les figures du second groupe.

### Conclusions

Par ailleurs toutes ces figures restent bien dans un domaine limité. Il resterait à vérifier que les figures restent dans le carré de côté 2, en particulier pour toutes les fleurs ou alors à trouver les conditions pour que ce soit réalisé.

Deux applications en technologie et dans le monde du vivant ont été citées lors de la présentation au forum Faîtes de la Science.

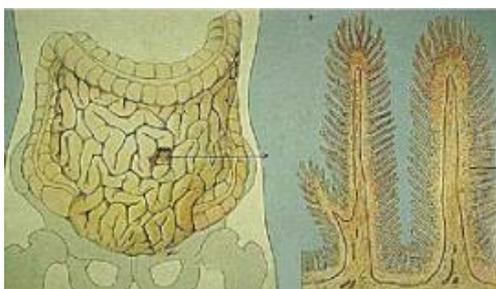


Figure 33 – Applications

## Notes d'édition

(1) Au final, à chaque étape on enlève et rajoute alternativement un trapèze à chaque côté. Comme il y a toujours un nombre pair de côtés, on enlève et rajoute autant de trapèzes, donc l'aire est bien conservée ! Par exemple, à l'étape 1 on enlève 3 trapèzes et l'on en rajoute 3, à l'étape 2, on enlève 9 trapèzes et on en rajoute 9, etc.

(2) Il manque les paramètres de la construction pour retrouver cette formule ... Néanmoins, en supposant que le rectangle initial est de côtés 2 et 0,5 (donc d'aire 1) et que pour chaque  $n$ , la largeur des bâtonnets est identique à la largeur des interstices qui les séparent, saurez-vous retrouver la hauteur  $H$  des interstices (qui est inférieure à 2, et la même pour tout  $n$ ), et la largeur  $\ell(n)$  des bâtonnets et interstices à l'étape  $n$  ? Vous pouvez alors vérifier si l'aire est bien toujours égale à 1.

(Réponse :  $H = 1/2$  et  $\ell(n) = 1/(2n+2)$ .)