

FICELLES EN FOLIE

(Année 2016-2017)

Élèves :

VEY Naïs : 6^{ème}
SILVESTRE Séréna : 6^{ème}
BENTOUMLIA Tim: 6^{ème}
TOLA Lise: 5^{ème}
FATH Hiba: 5^{ème}
CADOUX Alexiane: 5^{ème}
BERTHUIT Nicolas : 4^{ème}
DOULET Scander : 4^{ème}
BELMADANI Ahlem : 2^{nde}
PAVILI Alicia : 2^{nde}

Enseignants :

François Denizou
Cécile Hess

Chercheur :

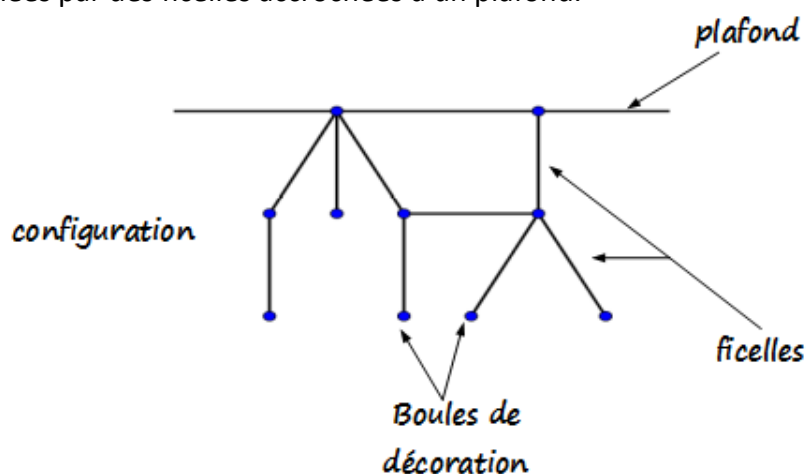
Daniel Hirschhoff (ENS Lyon)

Établissement :

Cité scolaire Lacassagne

Règles du jeu

- ~ Deux joueurs.
- ~ Des boules sont reliées par des ficelles accrochées à un plafond.



Règle du jeu: Les joueurs retirent une ficelle tour à tour.

But du jeu: NE PAS RETIRER LA DERNIÈRE FICELLE!

Une configuration A est une configuration où le joueur qui joue en premier possède une stratégie qui lui permet de gagner.

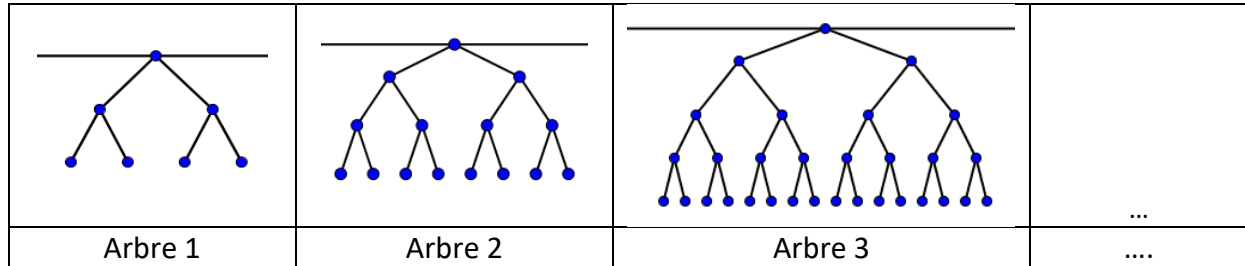
Une configuration B est une configuration où le joueur qui joue en deuxième gagne qu'importe ce que joue le premier.

Les chercheurs nous ont proposé plusieurs configurations et nous devons trouver si c'étaient des configurations A ou B

Notation : Dans tout l'article, nous noterons J1 le joueur qui joue en 1^{er}, et J2 le joueur qui joue en 2^{ème}.

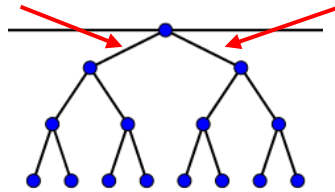
Les arbres

Pour dessiner cette configuration, il suffit de toujours doubler le nombre de ficelles en allant vers le bas. On peut reproduire cette étape indéfiniment.



La configuration des arbres est une configuration où le joueur qui commence gagne forcément s'il applique une certaine stratégie : c'est une configuration A.

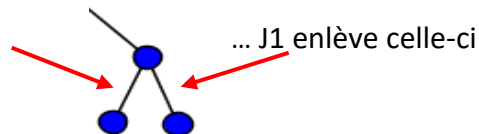
Afin de gagner à tous les coups, le premier joueur doit pour son premier tour retirer une des deux ficelles les plus hautes :



Puis au cours de la partie il va toujours enlever la ficelle qui est en face de celle que le deuxième joueur a enlevée.

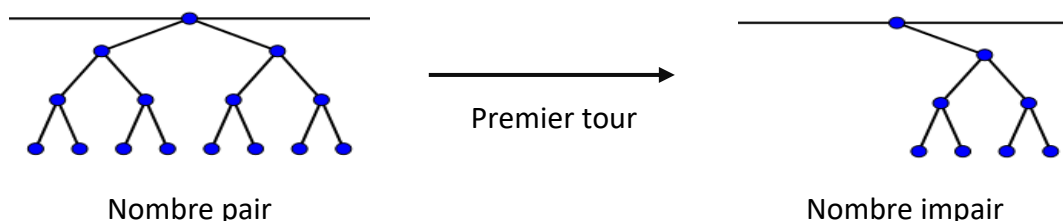
Exemple :

Si J2 enlève cette ficelle...



Pourquoi cette stratégie fonctionne -t-elle toujours ?

En retirant la moitié des ficelles, le premier joueur laisse toujours un nombre impair de ficelles (qui était pair au début).



Puis en retirant toujours la ficelle en face de celle que le deuxième joueur a enlevée, le premier joueur ramène le nombre de ficelles à un nombre impair.

Le nombre de ficelles diminue petit à petit mais le nombre de ficelles reste toujours impair quand c'est au 2^{ème} joueur de jouer, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une ficelle.

Le deuxième joueur a perdu !

Les deux chaînes

On a deux chaînes de longueurs n et k .

Dans quels cas la configuration est-elle A, dans lesquels est-elle B ?

Notation :



On note cette configuration $(n ; k)$ Par exemple, on a ici la configuration $(1 ; 3)$

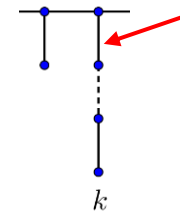
Étude des différents cas :

- **Premier cas** : $n = 1$ et $k \geq 1$: configuration $(1 ; k)$.

C'est une **configuration A**.

Démonstration :

J1 joue $(1 ; 0)$ donc il gagne. On a bien une configuration A.

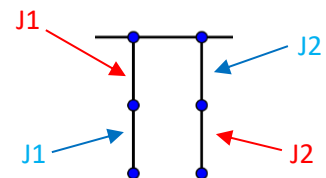


- **Deuxième cas** : Si les chaînes sont de longueurs égales, c'est-à-dire $n = k > 1$, alors c'est une **configuration B**.

Démonstration :

Utilisation d'un raisonnement par récurrence

- **Initialisation** pour $n = 2$ (configuration $(2 ; 2)$)
 - Si J1 joue $(0 ; 2)$, J2 joue $(0 ; 1)$.
 - Si J1 joue $(1 ; 2)$, J2 joue $(1 ; 0)$.Dans les deux cas, J2 gagne. On a donc une configuration B.

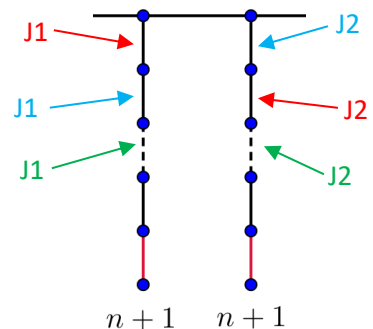


- **Hérédité**
On suppose que toutes les configurations $(k ; k)$ pour $2 \leq k \leq n$ sont B.
Démontrons que $(n+1 ; n+1)$ est une configuration B.

- Si J1 joue $(0 ; n+1)$, J2 joue $(0 ; 1)$.
- Si J1 joue $(1 ; n+1)$, J2 joue $(1 ; 0)$.
- Sinon, si J1 joue $(k ; n+1)$ avec $2 \leq k \leq n$, J2 joue $(k ; k)$.
Par hérédité, c'est une configuration B.

Stratégie de J2 : jouer « en face » de J1

Ainsi, dans tous les cas, qu'importe ce que joue J1, J2 gagne.
On a bien une configuration B pour $(n+1 ; n+1)$.



- **Conclusion** : Toutes les configurations $(n ; n)$ avec $n \geq 2$ sont des **configurations B**.

- **Troisième cas** : Si $k > n > 1$, alors $(n ; k)$ est une configuration A.

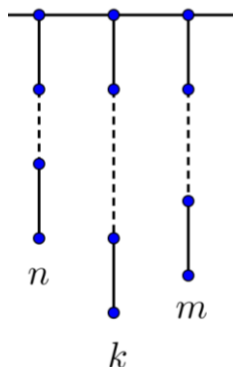
Démonstration :

À partir du cas précédent, on peut prouver que cette configuration est A : J1 a une **stratégie** : *il égalise d'abord les chaînes donc joue $(n ; n)$* pour revenir à la configuration des chaînes égales où J2 joue en premier donc J1 gagne.

Les trois chaînes

On a trois chaînes de longueur n , k et m que l'on note $(n ; k ; m)$

Dans quels cas la configuration est-elle A, dans lesquels est-elle B ?



- **Premier cas** : Si les chaînes sont toutes de longueur 1 (configuration $(1 ; 1 ; 1)$), alors c'est une configuration B.

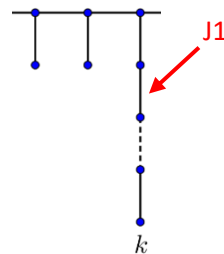
Démonstration :

Si J1 joue $(1 ; 1 ; 0)$ J2 joue $(1 ; 0 ; 0)$ donc gagne. On a une configuration B.

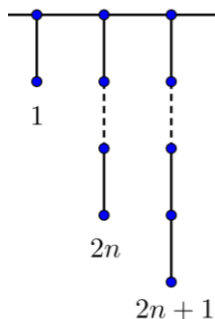
- **Deuxième cas** : Si $n = m = 1$ et $k > 1$ $(1 ; 1 ; k)$ alors c'est une configuration A.

Démonstration :

J1 joue $(1 ; 1 ; 1)$. Retour au cas précédent où J2 joue en premier donc J1 gagne. On a bien une configuration A.



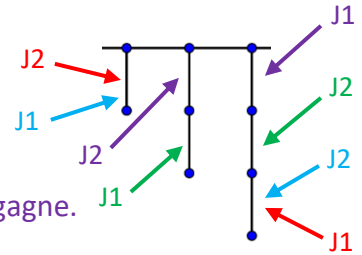
- **Troisième cas** : Si la configuration est $(1 ; 2n ; 2n+1)$ alors c'est une configuration B.



Démonstration :

Utilisation d'un raisonnement par récurrence.

- Initialisation : configuration $(1 ; 2 ; 3)$
 - Si J1 joue $(1 ; 2 ; 2)$ alors J2 joue $(0 ; 2 ; 2)$. Retour au cas des deux chaînes égales où J1 joue en premier, J2 gagne.
 - Si J1 joue $(0 ; 2 ; 3)$ J2 joue $(0 ; 2 ; 2)$, retour au cas des chaînes égales. J2 gagne.
 - Si J1 joue $(1 ; 1 ; 3)$ [ou $(1 ; 2 ; 1)$] alors J2 joue $(1 ; 1 ; 1)$, retour au premier cas des trois chaînes, donc J2 gagne.
 - Si J1 joue $(1 ; 2 ; 0)$ [ou $(1 ; 0 ; 3)$] alors J2 joue $(1 ; 0 ; 0)$ et gagne.



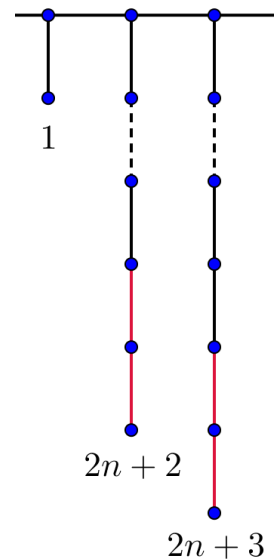
Dans tous les cas le joueur 2 gagne, c'est donc une configuration B.

- Hérédité

On suppose que $(1 ; 2k ; 2k+1)$ est une configuration B pour $2 \leq k \leq n$. Si l'on ajoute deux ficelles aux deux dernières chaînes, a-t-on toujours une configuration B ?

On a $(1 ; 2(n+1) ; 2(n+1)+1)$, c'est-à-dire $(1 ; 2n+2 ; 2n+3)$.

- Si J1 joue $(0 ; 2n+2 ; 2n+3)$, retour au cas des deux chaînes de longueurs différentes où J2 joue en premier donc J2 gagne.
- Si J1 joue $(1 ; 2n+2 ; 2n+2)$ J2 joue $(0 ; 2n+2 ; 2n+2)$. Retour au cas des chaînes égales où J1 joue en premier, il gagne.
- Si J1 joue $(1 ; 0 ; 2n+3)$ ou $(1 ; 2n+2 ; 0)$ J2 gagne en jouant $(1 ; 0 ; 0)$.
- Si J1 joue $(1 ; 2k ; 2n+3)$ ou $(1 ; 2n+2 ; 2k)$ avec $1 \leq k \leq n$, J2 joue $(1 ; 2k ; 2k+1)$. J2 gagne par hérédité.
- Si J1 joue $(1 ; 2n+2 ; 2k+1)$ ou $(1 ; 2k+1 ; 2n+3)$ avec $1 \leq k \leq n$, J2 joue $(1 ; 2k ; 2k+1)$ et gagne par hérédité.



Dans tous les cas, qu'importe ce que joue J1, J2 gagne.

- Conclusion : On a bien une configuration B pour toutes les configurations $(1 ; 2n ; 2n+1)$ avec $n \geq 1$.

➤ Quatrième cas : La configuration $(1 ; 2n+2 ; 2n+3)$ est une configuration A. [1]

Démonstration :

À partir du cas précédent, on peut prouver que cette configuration est A.

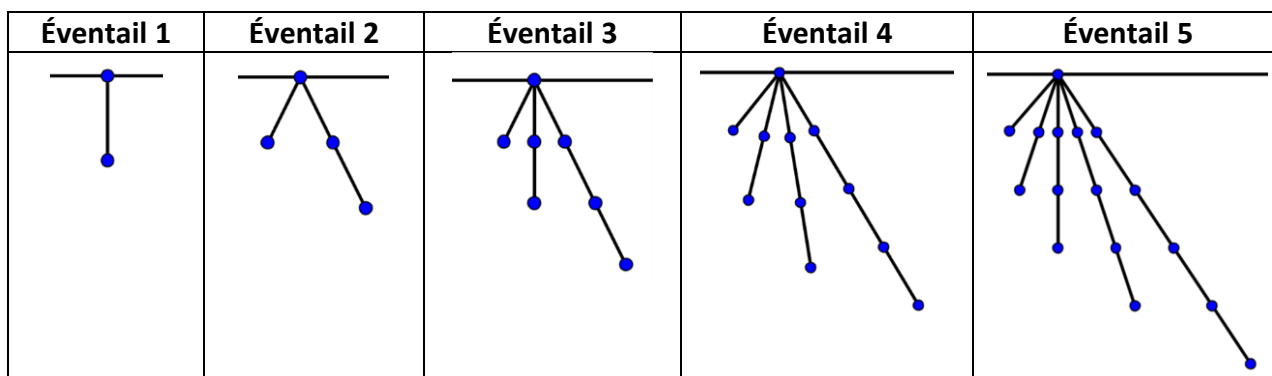
J1 a une stratégie : **il revient au cas précédent donc à $(1 ; 2n+2 ; 2n+1)$** où J2 joue en premier donc J1 gagne.

➤ Cas général : Nous n'avons pas trouvé de réponse.

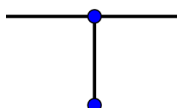
Les éventails

Les éventails sont composés d'une suite de branches, elle mêmes composées d'un nombre croissant de ficelles.

Exemple : Le premier éventail comporte une branche composée d'une seule ficelle ; l'éventail 2 est composé de deux branches, l'une comportant une ficelle et l'autre deux ; et ainsi de suite pour les figures suivantes.



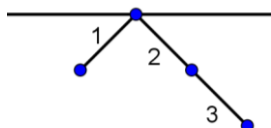
A) L'éventail 1



Configuration B

Stratégie gagnante : Dans cette configuration, il n'y a pas vraiment de stratégie ; le premier joueur est forcé de retirer la première et dernière ficelle : donc il perd forcément.

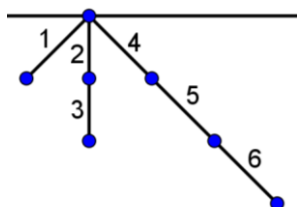
B) L'éventail 2



Configuration A

Stratégie gagnante : Pour gagner, le premier joueur doit retirer la ficelle 2 ; il ne reste alors qu'une ficelle au tour du second joueur.

C) L'éventail 3



Configuration B

Ce cas correspond au cas (1 ; 2 ; 3) des 3-chaînes.
On a donc déjà démontré que c'était une configuration B.
Rappel de la **stratégie gagnante** pour le joueur 2 :

Si J1 joue 1 ➔ J2 joue 6 ➔ J1 joue 2 ➔ J2 joue 5	}	J1 perd !
J1 joue 3 ➔ J2 joue 4		
J1 joue 4 ➔ J2 joue 3		
J1 joue 5 ➔ J2 joue 2		

Si J1 joue 2 ➔ J2 joue 4 ➔ J1 perd !

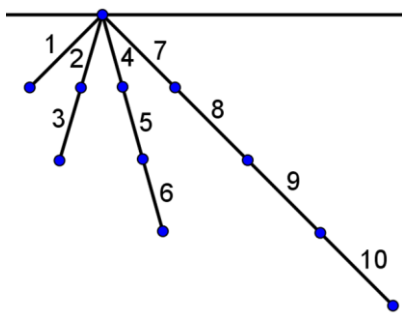
Si J1 joue 3 ➡ J2 joue 5 ➡ J1 joue 2 ➡ J2 joue 1 ou 4
 J1 joue 1 ➡ J2 joue 4 ou 2
 J1 joue 4 ➡ J2 joue 2 ou 1 } J1 perd !

Si J1 joue 4 ➡ J2 joue 2 ➡ J1 perd !

Si J1 joue 5 ➡ J2 joue 3 ➡ J1 joue 2 ➡ J2 joue 1 ou 4
 J1 joue 1 ➡ J2 joue 4 ou 2
 J1 joue 4 ➡ J2 joue 2 ou 1 } J1 perd !

Si J1 joue 6 ➡ J2 joue 1 ➡ J1 joue 2 ➡ J2 joue 5
 J1 joue 3 ➡ J2 joue 4
 J1 joue 4 ➡ J2 joue 3
 J1 joue 5 ➡ J2 joue 2 } J1 perd !

D) L'éventail 4

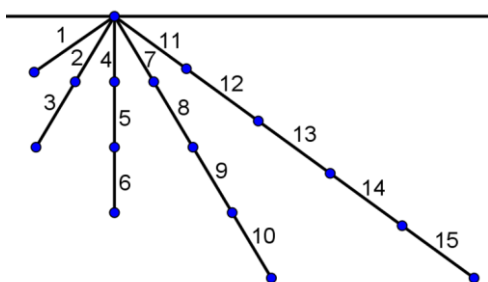


Configuration A

Stratégie gagnante :

Le premier joueur doit enlever la ficelle 7 ; on se retrouve dans le cas précédent sauf que c'est le second joueur qui commence.

E) L'éventail 5 [2]



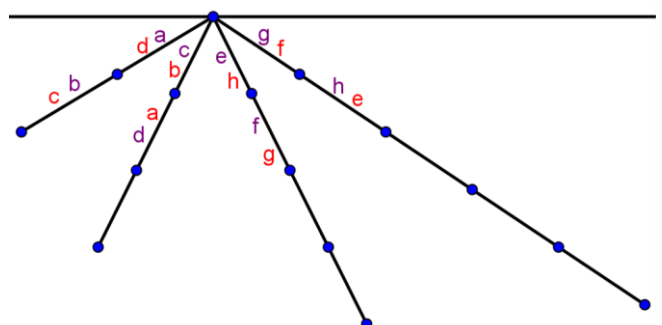
Configuration A

Stratégie gagnante : Le premier joueur doit enlever la ficelle 1.

➡ Si le joueur 2 joue « en haut », c'est-à-dire sur les ficelles : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 11 ou 12, alors le joueur 1 joue selon le dessin ci-contre en rouge.

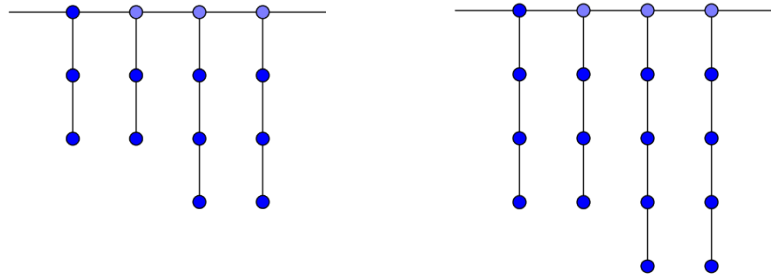
Ainsi, il se ramène à l'éventail 3 ou aux 3 chaînes (1 ; 4 ; 5) qui sont des configurations B que le joueur 2 joue en premier.

Donc, le joueur 1 gagne.



Les réponses de J1 selon ce que joue J2

➔ Si le joueur 2 joue « en bas », c'est-à-dire sur les ficelles : 6 ; 9 ; 10 ; 13 ; 14 ou 15, alors le joueur 1 joue en face (stratégie miroir) pour se ramener aux configurations B suivantes où le joueur 2 va jouer en premier : [3]

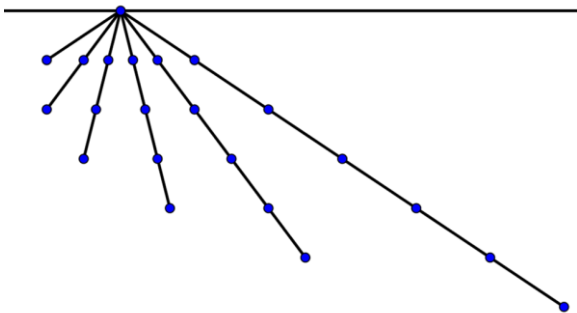


En effet en jouant en face, le joueur 1 va soit obliger le joueur 2 à jouer deux chaînes de même longueur soit trois chaînes de longueur 1.

Ainsi, le joueur 1 gagne l'éventail 5. C'est donc une **configuration A**

Conclusion : On avait conjecturé que les éventails suivaient la suite ABABAB.... Or ce n'est pas le cas !!!

F) L'éventail 6



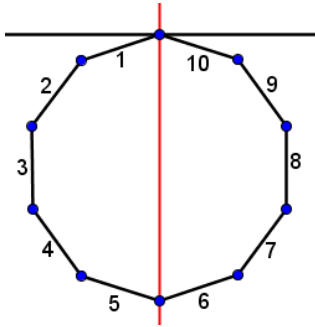
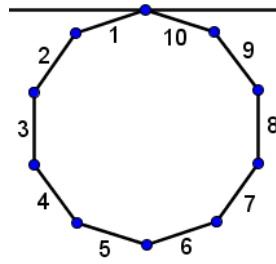
On n'a pas cherché le 6 : c'était trop difficile car il comporte trop de possibilités. En effet, le premier joueur peut jouer 21 ficelles, le joueur 2 au maximum a 20 ficelles à jouer etc...

Le nombre maximum de parties est de : [4]

$$21 \times 20 \times 19 \times \dots \times 2 \times 1 = 5109094217 \ 1709440000$$

Les colliers

1. Collier simple avec un nombre pair de ficelles

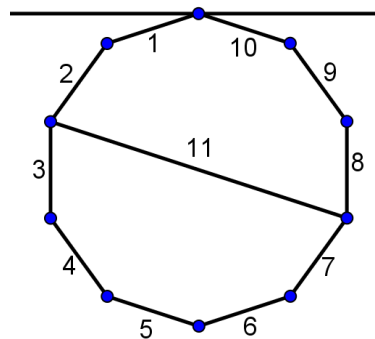


Pour jouer, nous avons tracé un axe de symétrie axiale.

- Si J1 joue en 1 (ou 10), alors J2 joue en 9 (ou 2). J2 gagne.
- Si J1 joue en 2 (ou 9), alors J1 joue en 10 (ou 1). J2 gagne.
- Sinon, où que joue J1, J2 joue en face (donc en symétrie) jusqu'à arriver sur les ficelles précédentes. Là on se retrouve au cas précédent, et J2 gagne.

C'est donc une **configuration B**.

2. Collier à une corde



Pour trouver si c'est une configuration A ou B, nous avons raisonné de la façon suivante : si le 1^{er} joueur retire la ficelle n°11, on se retrouve alors avec la configuration B précédente et comme c'est le 2^{ème} joueur qui commence, il perd.

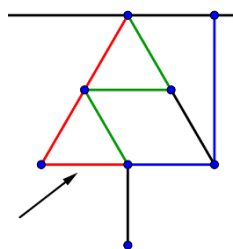
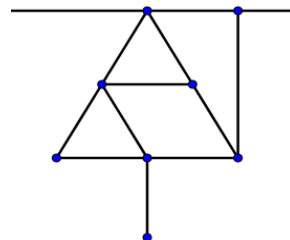
C'est donc une **configuration A**.

La partie la plus longue

Ici, la consigne est différente : étant donnée une configuration, comment faire pour que la partie dure le plus longtemps possible ?

Pour faire la partie la plus longue il faut savoir mesurer la distance du plafond à une ficelle choisie, notion que nous avons introduite.

Pour cela il faut savoir ce qu'est un chemin. Un chemin, c'est une suite de boules et de ficelles partant du plafond et allant jusqu'à l'une des deux boules de la ficelle choisie. La longueur d'un chemin correspond au nombre de boules qui s'y trouvent.

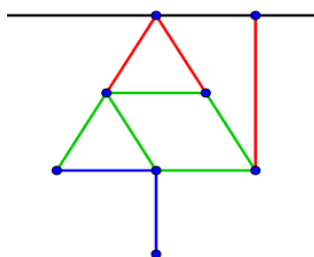


Chaque ficelle peut être reliée au plafond par une multitude de chemins différents. Par exemple, la ficelle désignée par la flèche ci-contre, est reliée au plafond par le chemin rouge (de longueur 3 ou 4), le chemin vert (de longueur 4 ou 5) et le chemin bleu (de longueur 3 ou 4).

Parmi tous ces chemins, on choisit celui dont la longueur est la plus courte. Cette longueur correspond alors à la distance de la ficelle au plafond. (Sur l'exemple, la ficelle est à une distance 3 du plafond).

Lorsqu'une configuration nous est donnée, on doit calculer la distance au plafond de chacune des ficelles de la configuration. Pour que la partie dure le plus longtemps possible, la stratégie est alors de retirer systématiquement la ficelle dont la distance au plafond est la plus grande.

Par exemple, sur la figure ci-contre, il faut d'abord retirer les ficelles bleues (à distance 3 du plafond), puis les ficelles vertes (à distance 2) et enfin les ficelles rouges (à distance 1).



Notes d'édition :

[1] Une configuration $(1 ; 2n+2 ; 2n+3)$ s'écrit aussi $(1 ; 2m ; 2m+1)$, avec $m = n+1$. Comme on nous l'a très bien expliqué dans le troisième cas, il s'agit donc d'une configuration B.

[2] Le résultat annoncé ici est juste, mais le relecteur confesse ne pas avoir compris le raisonnement des auteurs.

[3] On notera que les auteurs ont changé de représentation graphique, puisque les différentes ficelles ne sont plus rattachées au même endroit du plafond ; mais cela ne change rien au problème, et c'est plus facile à dessiner.

[4] Le nombre indiqué ici est juste une majoration ; en réalité, il n'y a pas autant de parties possibles que ça. Mais cela reste quand même très grand, et il est vrai qu'on ne peut pas regarder toutes les parties ; il faut donc des arguments de nature plus abstraite pour s'en sortir...