La propagation d'un feu de forêt

Année 2019-2020,
Par Garnier Emilien, Robin Roman – terminale S
Gabarren Alexandre, Spiquel--Bandin Emilien – première générale
Pollet Emilie – première STMG

Encadré par Monsieur Créchet, Madame Herminier, Monsieur Pelletier
Lycée Marguerite de Navarre, Bourges
Enseignant chercheur : Monsieur Nguyen, INSA Centre Val de Loire

Au cours de cette année, notre étude a porté sur la propagation d'un feu de forêt. Ce sujet est particulièrement intéressant dans la mesure où il est extrêmement présent dans le monde. Par exemple, cinq millions d'hectares de la forêt australienne ont disparu à cause d'incendies au cours du mois de janvier 2020.

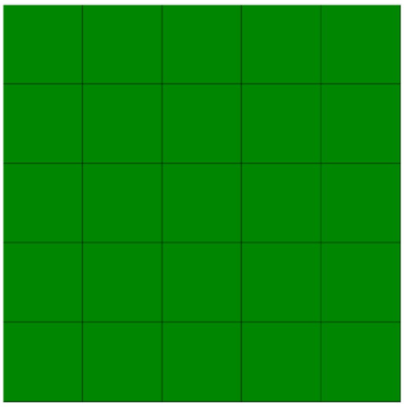
Notre objectif va être de modéliser des forêts et la propagation d’incendies dans ces dernières afin de trouver le moyen de minimiser le plus possible l'impact d'un potentiel feu. Pour cela, nous pouvons préalablement disposer des tranchées qui empêchent la propagation du feu. Une fois l'incendie terminé, le moyen de déterminer la qualité d'une configuration de tranchées est de compter le nombre d'arbres restés intacts.

Nous allons traiter ce sujet en abordant trois thèmes : nous commencerons par élaborer la manière de modéliser des forêts et un outil pour comparer des dispositions de tranchées, puis nous étudierons le nombre de tranchées optimal pour enfin nous concentrer sur la manière d’obtenir la meilleurE disposition de tranchées. Lorsque nous travaillerons sur le nombre de tranchées, nous nous concentrerons uniquement sur l’aspect numérique et nous aborderons les dispositions de tranchées uniquement dans la dernière partie.

Modélisation de forêts et disposition de tranchées :

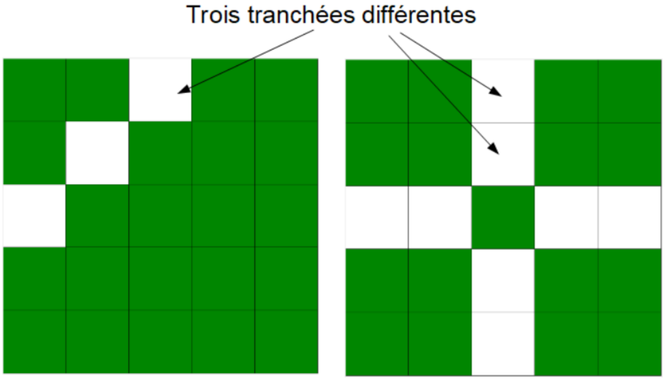
Création d'une forêt :

Tenter d'élaborer une stratégie pour entraver la propagation d'un feu sur une forêt réaliste est une tâche extrêmement complexe. C'est pourquoi nous avons décidé de représenter nos forêts par des grilles. Il est possible de choisir arbitrairement la taille d'une case dans la réalité. Par exemple, en prenant un mètre par un mètre comme dimension pour une case, une forêt carrée de quinze mètres de côté sera représentée par une grille carrée de quinze cases de côté. Chaque case peut donc contenir un ou plusieurs arbres en fonction de l'échelle choisie.



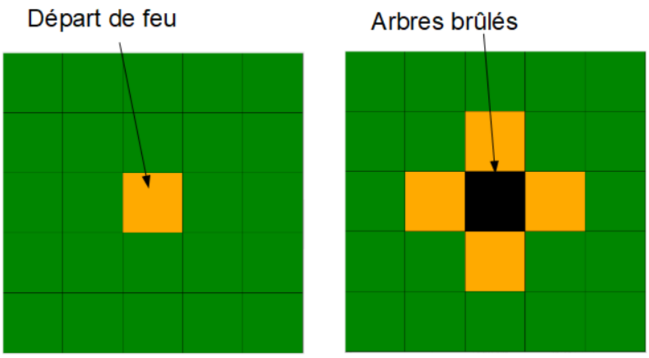
Exemple pour une forêt de taille 5x5

La forêt étant représentée, nous avons maintenant besoin d'un moyen pour combattre l'incendie. Nous emploierons donc des cases sans arbres, appelées tranchées. Il est important de retenir qu'une tranchée représente une unique case et non une ligne de cases. Nous considérons que ces tranchées bloquent entièrement le passage du feu et qu'il est impossible que celui-ci se propage en leur présence.



Exemple de dispositions de tranchées

Le dernier élément à définir pour véritablement débuter l'étude est le comportement du feu. Ce dernier a pour départ une case de forêt. Cette case ne peut être une tranchée. Pour suivre l'évolution du feu, nous utilisons une unité de temps arbitraire, le tour. À chaque tour, le feu se transmet d'une case à l'autre si celles-ci sont adjacentes. Les cases en diagonales ne sont pas considérées comme adjacentes.

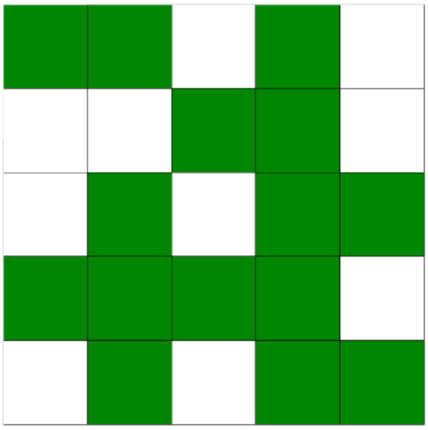


Forêt avec un départ de feu, puis la même forêt un tour plus tard

Élaboration et comparaison de placements de tranchées :

Il nous est maintenant possible de créer des forêts et de disposer sur celles-ci des tranchées afin de réduire la propagation du feu. Le dernier outil nécessaire à l'élaboration du meilleur arrangement pour les tranchées est de pouvoir les comparer. Notre objectif est de maximiser la quantité de forêt intacte. Nous allons donc nous intéresser au nombre de cases n'ayant pas été touchées après l'incendie.

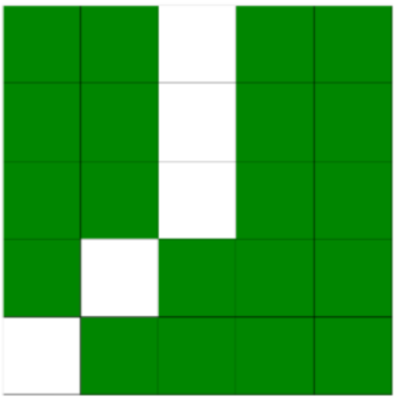
Nous devons prendre en compte que le lieu de départ de feu n'est pas connu à l'avance et que le nombre d'arbres sauvés peut directement dépendre de ce lieu. Nous allons par conséquent considérer que le lieu de départ de l'incendie peut être chaque case boisée, avec une probabilité égale pour chacune. Ainsi, pour une forêt carrée de cinq cases de côté comme ci-contre, sur laquelle nous avons disposé dix tranchées, représentées par les cases blanches, il reste quinze cases avec des arbres. Le départ de feu a donc une probabilité de $\frac{1}{15}$ pour chaque case.



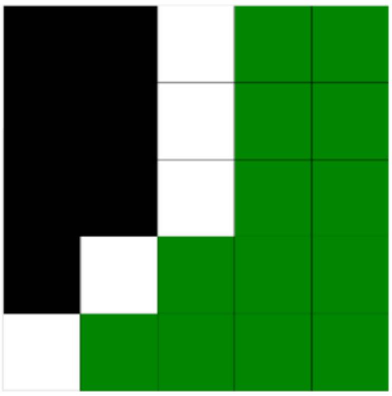
Forêt de taille 5x5 avec 10 tranchées disposées

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de cases intactes après l'incendie en fonction du lieu de départ. Nous pouvons, pour la première forêt représentée ci-dessous, établir la loi de probabilité de X. À l'origine, il y avait *25-5 = 20* cases d'arbres. Le feu peut démarrer à gauche des tranchées que nous avons disposées. Cela donnera lieu à l'incendie représenté par la deuxième forêt. Après que le feu se soit propagé, il reste *13* cases intactes. Ainsi, $X = 13$ a une probabilité de $\frac{7}{20}$. En faisant de même quand le feu débute à droite des tranchées, comme l'expose la dernière forêt, le résultat est $X = 7$ avec une probabilité de $\frac{13}{20}$.

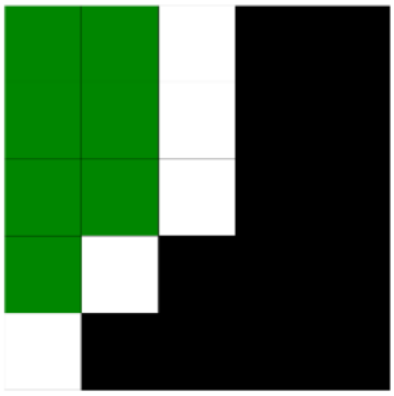
Par conséquent, la loi de probabilité de X est la suivante :



Forêt après disposition des tranchées



Forêt après l'incendie à gauche des tranchées



Forêt après l'incendie à droite des tranchées

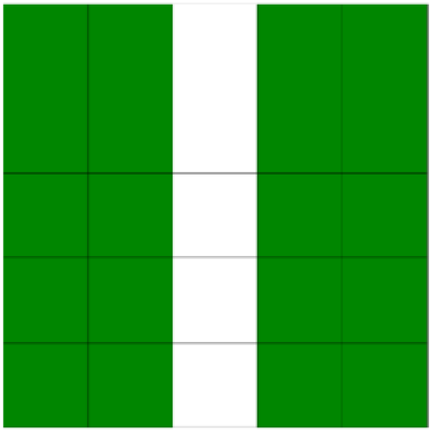
x_i	*13*	*7*
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{13}{20}$

À partir de cette loi de probabilité, nous pouvons calculer l'espérance mathématique de X, qui correspond à la valeur moyenne du nombre de cases sauvées par la pose de nos tranchées.

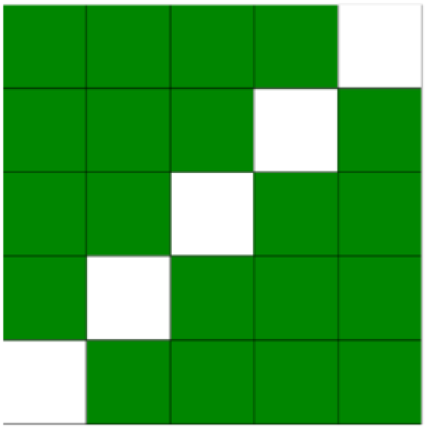
$$E(X) = 13 \times \left(\frac{7}{20}\right) + 7 \times \left(\frac{13}{20}\right) = \frac{2\times7\times13}{20} = \frac{7\times13}{10} = 9{,}1$$

Ainsi, cette configuration de tranchées permet de sauver *9,1* cases d'arbres en moyenne par incendie. Si un meilleur placement de tranchées existe, l'espérance de X sera strictement supérieure à *9,1*.

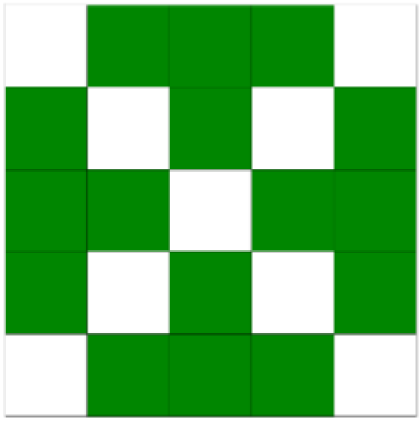
Afin de pouvoir tester un maximum de configurations pour trouver celle qui est optimale, nous avons réalisé un programme qui est capable de calculer automatiquement l'espérance pour une configuration de tranchées définie par l'utilisateur. Voici quelques exemples de dispositions de tranchées et la valeur de l'espérance correspondante.



E(X) = 10



E(X) = 10



E(X) = 12

Ces essais nous permettent d'observer que placer une ligne de tranchées sur la colonne centrale ou sur une diagonale donne des résultats identiques pour cette taille de grille. Le dernier essai présente un placement de tranchées plus avantageux que les précédents car son espérance est plus élevée. C'est donc le modèle à privilégier si un choix doit s'effectuer parmi les trois essais.

Nombre optimal de tranchées nécessaires pour maximiser l'espérance :

Après plusieurs tentatives, nous avons observé que l'espérance dépend de deux paramètres : le nombre de tranchées placées et leur disposition. Dans cette partie, nous allons nous intéresser au nombre de tranchées et tenter de déterminer lequel permet d’obtenir une espérance maximale.

Pour cela, nous avons procédé à de nombreux essais de placements de tranchées grâce au programme que nous avons réalisé. C’est au moyen de ce programme que nous avons créé les forêts des illustrations précédentes. Nous l’avons conçu pour qu’il génère des forêts dans lesquelles nous pouvons disposer des tranchées à notre guise et qu’il soit capable de calculer automatiquement l’espérance d’un placement de tranchées. Il utilise pour cela la méthode que nous avons décrite précédemment. Il prend une case de la forêt et l’utilise comme départ de feu. Ensuite, il compte le nombre d’arbres restants et calcule la probabilité de ce départ de feu ou d’un autre départ aboutissant au même résultat : les cases qui ont brûlé en même temps. Puis, il réitère avec une case qui n’a pas encore brûlé pendant le calcul d’espérance. Lorsque toutes les cases ont brûlé exactement une fois et que le programme a obtenu chaque nombre de cases sauvées avec la probabilité correspondante, il applique la formule de l’espérance et affiche le résultat.

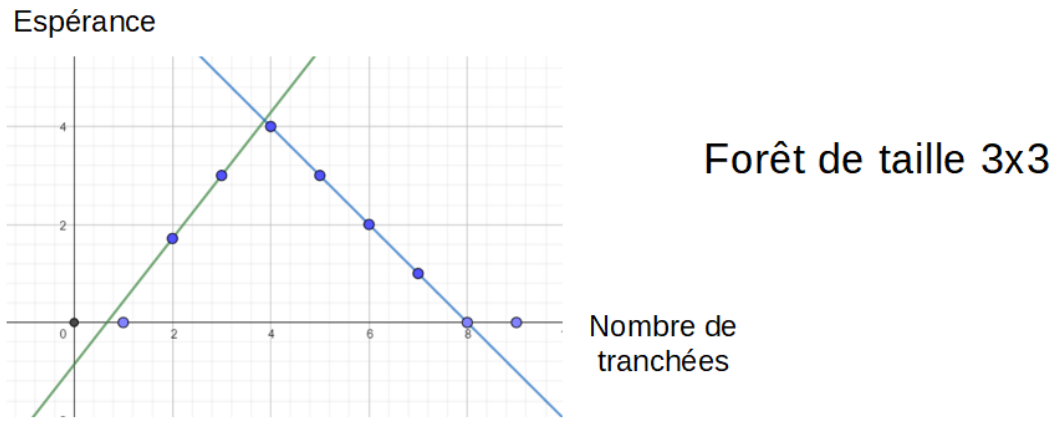
Notre première intention était de tester automatiquement toutes les dispositions de tranchées mais cela est impossible. En effet, si nous voulons disposer k tranchées, pour placer la première tranchée, il y a n^2 possibilités, c’est-à-dire le nombre de cases de la grille. Pour la seconde, il y a n^2-1 possibilités et ainsi de suite jusqu’à la k-ième tranchée où nous avons n^2-k+1 possibilités. Cela représente $\frac{n^2!}{(n^2-k)!}$ possibilités. Mais avec ce calcul, certaines dispositions de tranchées sont identiques puisque notre programme n’est pas capable de distinguer les tranchées entre elles. Il faut donc enlever au résultat précédent le nombre de permutations possibles des k tranchées soit $k!$. Le nombre de placements différents de k tranchées sur une grille de côté n est par conséquent $\frac{n^2!}{(n^2-k)!k!}$.

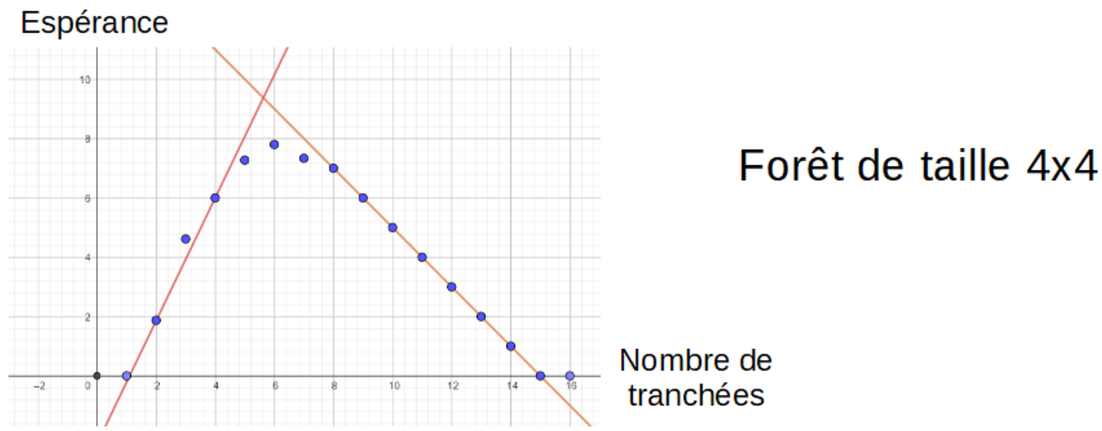
Ce nombre devient rapidement beaucoup trop important pour permettre de calculer l’espérance pour chaque cas. Par exemple, en calculant l’espérance d’un million de dispositions de tranchées sur une grille carrée de six cases de côté, le programme n’avait pas terminé après avoir fonctionné pendant deux heures. Pour y remédier, nous avons décidé de disposer nous-même les tranchées pour essayer d’augmenter l’espérance en évitant de réaliser des tentatives sur des placements que nous savons moins bons. [1]

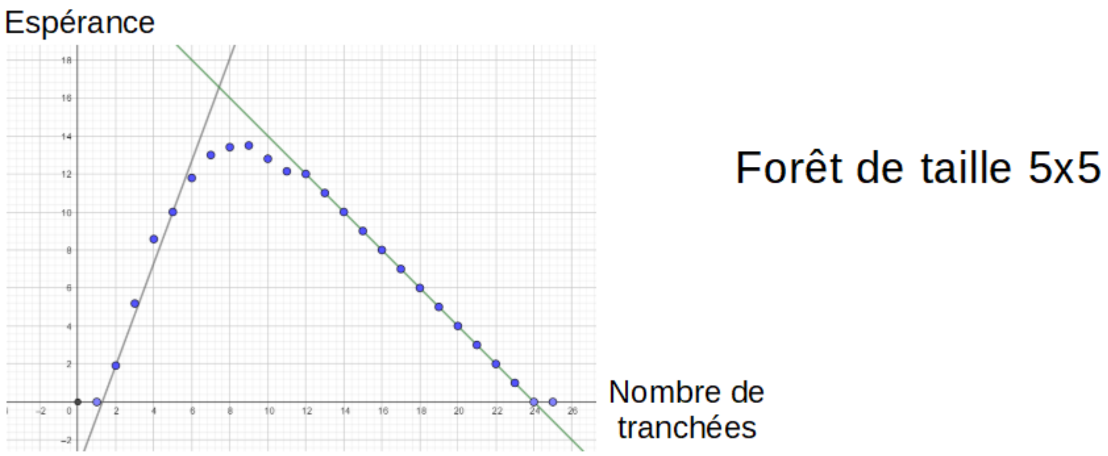
Pour chaque nombre de tranchées utilisées, nous avons testé le plus de placements possibles en essayant d’augmenter l’espérance à chaque nouvel essai. Nous considérions avoir obtenu la valeur optimale lorsque, après avoir essayé de trouver un nouveau placement plus astucieux, nous n’observions aucune augmentation de l’espérance.

Nous avons vérifié les résultats obtenus grâce à l’aléatoire : nous avons ajouté à notre programme une fonction qui lui permet de disposer aléatoirement des tranchées en ayant fixé au préalable le nombre de tranchées à placer. Ensuite, nous avons comparé cent-mille configurations générées aléatoirement pour chaque nombre de tranchées. L’espérance maximale obtenue par la méthode aléatoire était toujours la même que celle trouvée manuellement ou alors très légèrement inférieure ce qui corrobore notre précédent travail. Le résultat de la méthode aléatoire était inférieur lorsque la configuration optimale n’a pas été générée parmi les cent-mille essais. Nous observons ici le principal défaut de la méthode aléatoire : certaines dispositions ne sont pas testées alors que d’autres le sont à plusieurs reprises.

Ensuite, nous avons représenté les résultats à l'aide des courbes suivantes, qui représentent l'espérance maximale en fonction du nombre de tranchées utilisées.



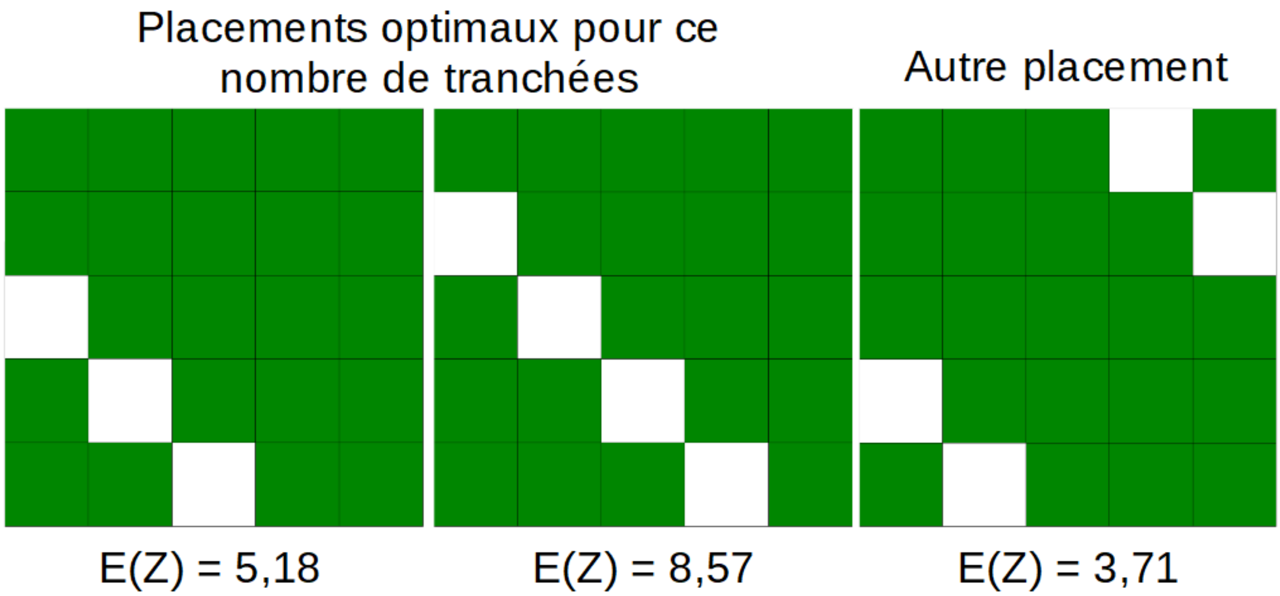




Nous allons maintenant essayer de définir à partir de ces courbes l'abscisse du maximum de la courbe dans le cas général, pour une grille carrée de côté *n* quelconque. Nous pouvons observer que ces courbes ont toutes une forme similaire, mais un détail nous intéresse plus particulièrement. Les parties ascendantes et descendantes des courbes peuvent être représentées par deux droites dont le point d'intersection a une abscisse proche de celle du maximum de la courbe, mais est légèrement inférieur. Il suffit donc de déterminer les équations réduites de ces droites, puis de trouver l'abscisse du point d'intersection, arrondi à l'entier supérieur, pour obtenir une approximation du nombre de tranchées optimal.

Pour la première droite, nous allons nous intéresser aux points dont les abscisses sont comprises entre *2* et *n*. En effet, la droite suit la courbe uniquement pour ces abscisses et s'en sépare lorsque l'abscisse devient supérieure à *n*. Comme nous utilisons un nombre de tranchées qui est inférieur ou égal au côté du carré, nous n'avons pas assez de tranchées pour placer deux lignes ou diagonales, même s'il est possible que cela donne une meilleure espérance qu'en n'en posant qu'une seule.

Pour ces points, la plus grande espérance est obtenue en plaçant sur la forêt toutes les tranchées **<u>en une seule diagonale</u>** telles que les deux extrémités de la diagonale de tranchées soient en contact avec un bord de la grille comme montré ci-dessous. L'espérance est calculée à partir de Z, la variable aléatoire comptant le nombre de cases de forêt restantes après un incendie.



Que ces placements en une unique diagonale pour ce nombre de tranchées soient optimaux s'explique par le fait que les cases sont mieux réparties de part et d'autre de la ligne de tranchées. En effet dans la troisième forêt ci-dessus, la probabilité que la zone avec beaucoup d'arbres soit touchée est plus importante que pour les deux forêts précédentes. La probabilité qu'il reste peu d'arbres après un feu est donc très importante. De même, la probabilité que la zone avec beaucoup d'arbres ne soit pas touchée est plus faible dans la troisième forêt que dans les deux autres. C'est pourtant après un feu qui n'affecte pas cette zone que le nombre d'arbres détruits est le plus faible.

En résumé, pour le placement en une unique diagonale, en comparaison avec d'autres placements, la probabilité que peu d'arbres soient sauvés après un feu est plus faible, là où la probabilité d'en conserver plus, quant à elle, est plus grande. Cela augmente l'espérance correspondant au placement en diagonale.

Le placement en ligne, qui est un placement similaire, peut être dans certains cas équivalent à celui en diagonale, mais dans d'autres, c'est un placement moins intéressant. Par exemple, dans un carré dont le côté est un nombre pair, une ligne ou une colonne ne permet pas de diviser les cases d'arbres en deux parties parfaitement égales. Nous privilégierons donc le placement en diagonale dont les résultats sont optimaux dans la totalité des cas.

Soit x le nombre de tranchées disposées sur la grille. Déterminons la loi de probabilité de Z pour $x = 2$ puis pour $x = n$. [2]

Loi de probabilité de Z pour $x = 2$:

z_i	n^2-2-1 = n^2-3	1
p(Z = z_i)	$\frac{1}{n^2-2}$	$\frac{n^2-2-1}{n^2-2}=\frac{n^2-3}{n^2-2}$

E(Z) $=(n^2-3)\times(\frac{1}{n^2-2})+1\times(\frac{n^2-3}{n^2-2})=2\times(\frac{n^2-3}{n^2-2})=\frac{2n^2-6}{n^2-2}$

Loi de probabilité de Z pour $x = n$.

z_i	$\frac{n^2-n}{2}$	$\frac{n^2-n}{2}$
p(Z = z_i)	$\frac{\frac{n^2-n}{2}}{n^2-n}=\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{n^2-n}{2}}{n^2-n}=\frac{1}{2}$

E(Z) $=\frac{n^2-n}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{n^2-n}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n^2-n}{2}\times\frac{2}{2}=\frac{n^2-n}{2}$

Par conséquent, pour $x = 2$: $E(Z) =\frac{2n^2-6}{n^2-2}$ et pour $x = n$: $E(Z) =\frac{n^2-n}{2}$, donc la droite passe par les deux points A($x_A = 2$; $y_A =\frac{2n^2-6}{n^2-2}$) et B($x_B = n$; $y_B =\frac{n^2-n}{2}$). Ainsi, l'équation réduite de cette droite est $y = ax + b$, avec a et b solutions du système

$\begin{cases} ax_A + b = y_A \\ ax_B + b = y_B \end{cases} \Leftrightarrow a =\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ et $b = y_A - \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\times x_A$; d'où

$$a =\frac{\frac{n^2-n}{2}-\frac{2n^2-6}{n^2-2}}{n-2}=\frac{\frac{(n^2-n)(n^2-2)}{2(n^2-2)}-\frac{2(2n^2-6)}{2(n^2-2)}}{n-2}=\frac{n^4-n^3-2n^2+2n-4n^2+12}{(2n^2-4)(n-2)}$$

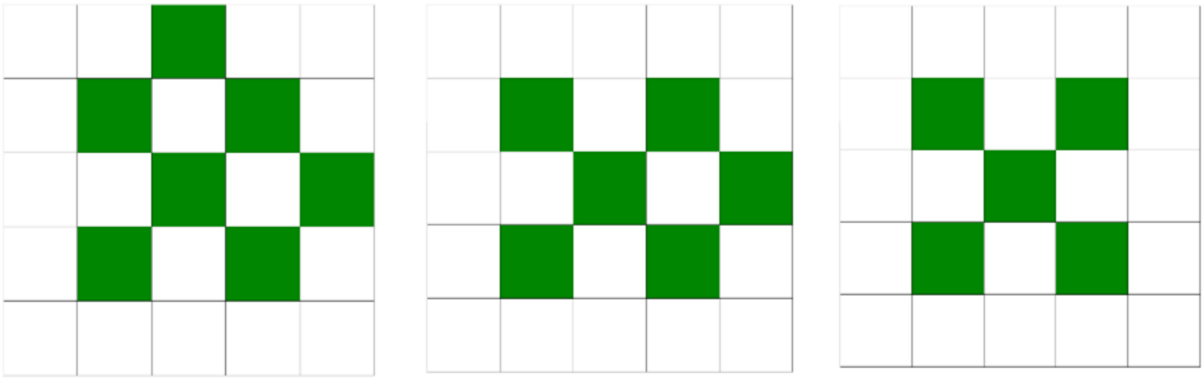
$$a =\frac{n^4-n^3-6n^2+2n+12}{(2n^2-4)(n-2)}=\frac{(n-2)(n^3+n^2-4n-6)}{(n-2)(2n^2-4)}=\frac{n^3+n^2-4n-6}{2n^2-4}$$

$$b =\frac{2n^2-6}{n^2-2}-\frac{n^3+n^2-4n-6}{2n^2-4}\times 2=\frac{2n^2-6}{n^2-2}-\frac{n^3+n^2-4n-6}{n^2-2}$$

$$b =\frac{-n^3+n^2+4n}{n^2-2}$$

Par conséquent $d_1 : y = \frac{n^3+n^2-4n-6}{2n^2-4}x + \frac{-n^3+n^2+4n}{n^2-2}$. Il est plus aisé de trouver les coordonnées de deux points appartenant à la deuxième droite puisque lorsque le nombre de tranchées est plus grand que la moitié du nombre de cases totales, l'espérance maximale diminue d'une case à chaque nouvelle tranchée posée. En effet, l'espérance maximale, lorsque le nombre de tranchées dépasse la moitié du nombre de cases de la grille, est obtenue en séparant chaque case d'arbre des autres pour éviter que plusieurs ne brûlent en même temps.

Cela implique qu'ajouter une nouvelle tranchée revient à enlever une de ces cases



18 tranchées
E(X) = 6

19 tranchées
E(X) = 5

20 tranchées
E(X)=4

d'arbres isolées. Cela réduit dans le même temps d'un le nombre d'arbres sauvés dans chaque incendie possible. Ainsi, d_2 passe par les points C($x_C = n^2-1$; $y_C = 0$) et D($x_D = n^2-2$; $y_D = 1$). Avec la même méthode, l'équation de la droite est $d_2 : y = -x+n^2-1$.

La dernière étape pour trouver une approximation du nombre optimal de tranchées à placer est de trouver l'abscisse du point d'intersection des deux droites, c'est-à-dire trouver x tel que $\frac{n^3+n^2-4n-6}{2n^2-4}x + \frac{-n^3+n^2+4n}{n^2-2} = -x + n^2 - 1 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{n^3+n^2-4n-6}{2n^2-4} + 1\right)x = n^2 - 1 - \frac{-n^3+n^2+4n}{n^2-2} \Leftrightarrow \frac{n^3+3n^2-4n-10}{2n^2-4}x$$

$$= \frac{n^4+n^3-4n^2-4n+2}{n^2-2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2(n^2-2)}{n^3+3n^2-4n-10} \times \frac{n^4+n^3-4n^2-4n+2}{n^2-2} = \frac{2n^4+2n^3-8n^2-8n+4}{n^3+3n^2-4n-10}$$

Par conséquent, une approximation du nombre optimal de tranchées à utiliser dans une grille de taille *n* est, arrondi à l'entier supérieur : $\frac{2n^4+2n^3-8n^2-8n+4}{n^3+3n^2-4n-10}$.

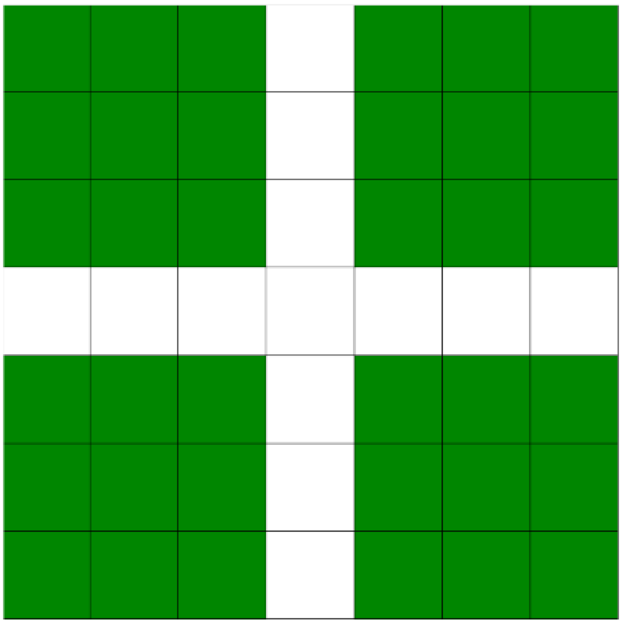
Voici l'application numérique de cette formule pour les premières valeurs de *n* :

n	3	4	5	6	7
Approximation de la valeur optimale de tranchées à utiliser	$\lceil\frac{31}{8}\rceil = 4$	$\lceil\frac{242}{43}\rceil = 6$	$\lceil\frac{632}{85}\rceil = 8$	$\lceil\frac{1346}{145}\rceil = 10$	$\lceil\frac{1261}{113}\rceil = 12$

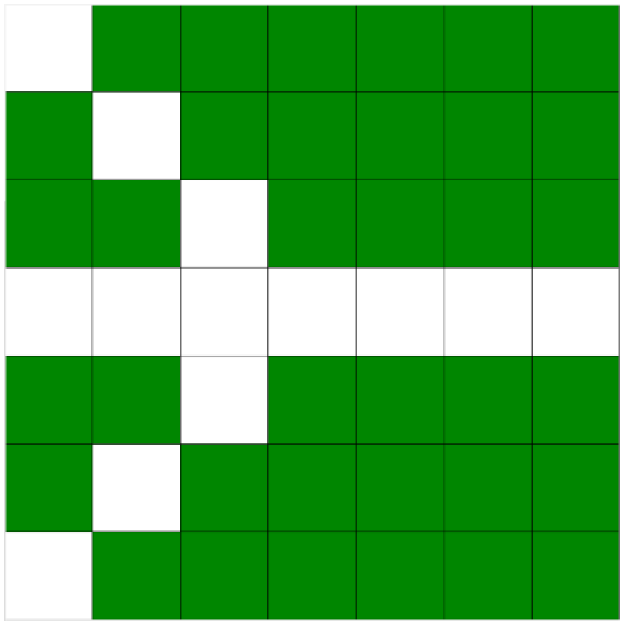
Disposition optimale des tranchées pour maximiser l'espérance :

Les valeurs de l'espérance que nous avons utilisé pour un nombre de tranchées donné étaient les valeurs maximales que nous avions observées. Cependant, elles peuvent être différentes avec un autre arrangement de tranchées. C'est donc que l'espérance ne dépend pas uniquement du nombre de tranchées utilisées mais aussi de leur placement sur la grille.

Au cours de nos essais, nous avons remarqué que pour un certain nombre de groupes de cases d'arbres adjacentes, l'espérance augmentait lorsque le nombre de cases d'arbres dans chaque groupe était le plus égal possible. Nous l'avons démontré, les démonstrations sont en dessous, dans deux cas simples. Nous conjecturons donc, avec l'appui de nos tests, que cette règle est valable quel que soit le nombre de groupes de cases de forêt présents sur la grille et quelle que soit leur forme.



E(Z) = 27



E(Z) = 23

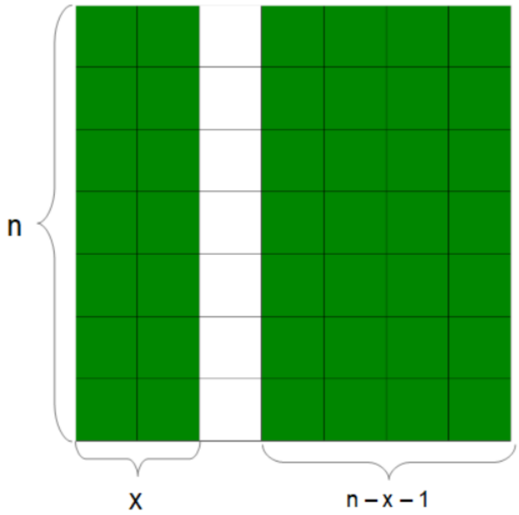
Cette règle est illustrée par les deux forêts ci-dessus. Dans les deux cas, nous avons utilisé le même nombre de tranchées et avons constitué quatre groupes de cases boisées. La seule différence est la taille de ces groupes : pour la première forêt les quatre sont de taille parfaitement identique alors que dans le deuxième cas, il y a deux petits groupes et deux grands. D'après notre conjecture énoncée précédemment, c'est la forêt où les tailles sont les plus homogènes donc la première qui a l'espérance la plus importante. Les calculs d'espérance réalisés par notre programme confirment ce résultat ce qui semble valider notre conjecture.

Démonstrations :

Placement d'une colonne de tranchées :

Une démonstration de la règle énoncée dans le dernier paragraphe étant ardue pour un placement de tranchées quelconque, nous allons la démontrer dans un cas simplifié, en plaçant une unique colonne de tranchées, même s'il existe des arrangements dont l'espérance est plus importante. Montrons que le placement optimal d'une colonne de tranchée sur une grille carrée de côté $n > 2$ est la colonne la plus centrée, c'est à dire celle qui partage les cases de forêt en deux groupes les plus identiques possibles.

Soit x le nombre de colonnes à gauche de celle sur laquelle les tranchées sont disposées. Pour obtenir deux groupes de cases boisées distincts, il faut que $0 < x < n-1$. Le nombre de cases contenant des arbres est n^2-n, le nombre total de cases moins celui de la colonne.



Soit Z la variable aléatoire qui compte le nombre de cases intactes après l'incendie. Z suit la loi de probabilité suivante :

z_i	nx	$n(n-x-1)$
$p(Z = z_i)$	$\frac{n(n-x-1)}{n^2-n}$	$\frac{nx}{n^2-n}$

$E(Z) = \frac{nx \times n(n-x-1)}{n^2-n} + \frac{n(n-x-1) \times nx}{n^2-n} = \frac{2n^2x(n-x-1)}{n^2-n} = \frac{2nx(n-x-1)}{n-1}$

$E(Z) = \frac{-2nx^2+2n^2x-2nx}{n-1} = \frac{-2n}{n-1}x^2 + \frac{2n^2-2n}{n-1}x = \frac{-2n}{n-1}x^2 + \frac{2n(n-1)}{n-1}x =$

$E(Z) = \frac{-2n}{n-1}x^2 + 2nx$

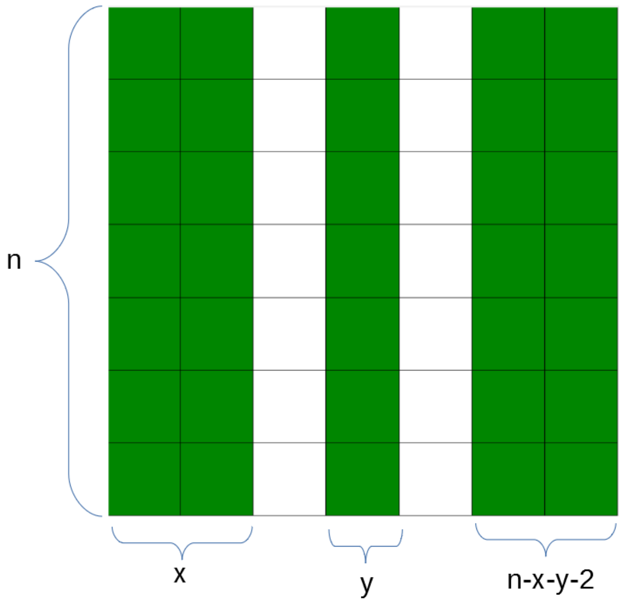
L'espérance est définie par un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx$ avec $a = \frac{-2n}{n-1}$ et $b = 2n$. Comme $a < 0$, alors l'espérance admet un maximum en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2n}{\frac{-4n}{n-1}} = \frac{1}{\frac{2}{n-1}} = \frac{n-1}{2}$.

Il en découle $n - x - 1 = n - \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{2n-n+1-2}{2} = \frac{n-1}{2}$. Lorsque n est impair, placer la colonne de tranchées sur la $\frac{n+1}{2}$-ème colonne permet d'avoir deux groupes de $\frac{n-1}{2}$ colonnes de cases d'arbres de chaque côté. Lorsque n est pair, il faut placer la colonne de tranchées sur la $\frac{n}{2}$-ème colonne ou sur la $\frac{n}{2}+1$-ème colonne. Il y a dans ces deux cas $\frac{n}{2} - 1$ colonnes de cases boisées d'un côté et $\frac{n}{2}$ de l'autre. Par conséquent l'espérance est bien maximale lorsque la colonne de tranchées est placée le plus au centre possible de la grille, comme nous souhaitions le démontrer.

Placement de deux colonnes de tranchées :

Montrons que le placement optimal de deux colonnes de tranchées est d'en placer une au niveau de chaque tiers d'une grille carrée de côté $n > 4$.

Soient x le nombre de colonnes à gauche de la première colonne de tranchées et y le nombre de colonnes entre les deux colonnes de tranchées. Pour avoir trois groupes distincts, il faut que $0 < x < n-3$ et $0 < y < n-3$. Le nombre de cases contenant des arbres est $n^2-2n = n(n-2)$, le nombre de cases de la grille moins celles des deux colonnes.



Soit Z la variable aléatoire comptant le nombre de cases intactes après l'incendie. Z suit la loi de probabilité suivante :

z_i	$n(x+y)$	$n(x+n-x-y-2)=n(n-y-2)$	$n(y+n-x-y-2)=n(n-x-2)$
$p(Z = z_i)$	$\frac{n(n-x-y-2)}{n(n-2)}=\frac{n-x-y-2}{n-2}$	$\frac{ny}{n(n-2)}=\frac{y}{n-2}$	$\frac{nx}{n(n-2)}=\frac{x}{n-2}$

$E(Z) = \frac{n(x+y)\times(n-x-y-2)}{n-2} + \frac{n(n-y-2)\times y}{n-2} + \frac{n(n-x-2)\times x}{n-2}$

$E(Z) = \frac{n[(x+y)(n-x-y-2)+y(n-y-2)+x(n-x-2)]}{n-2}$

$E(Z) = \frac{n[nx-x^2-xy-2x+ny-y^2-2y-xy+ny-y^2-2y+nx-x^2-2x]}{n-2}$

$E(Z) = \frac{n[2nx+2ny-2x^2-2y^2-4x-4y-2xy]}{n-2} = \frac{2n[nx+ny-x^2-y^2-2x-2y-xy]}{n-2}$

$E(Z) = \frac{2n}{n-2} \times (nx + ny - x^2 - y^2 - 2x - 2y - xy)$

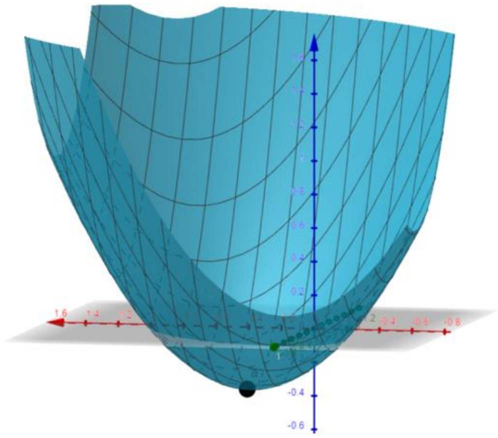
$\frac{2n}{n-2}$ est une constante et n'intervient donc pas pour l'étude des variations de l'espérance. Soit $f(x,y) = nx+ny-x^2-y^2-2x-2y-xy$. Pour trouver un éventuel maximum à cette fonction, il faut utiliser un théorème sur les dérivées partielles :

Théorème : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^2$.

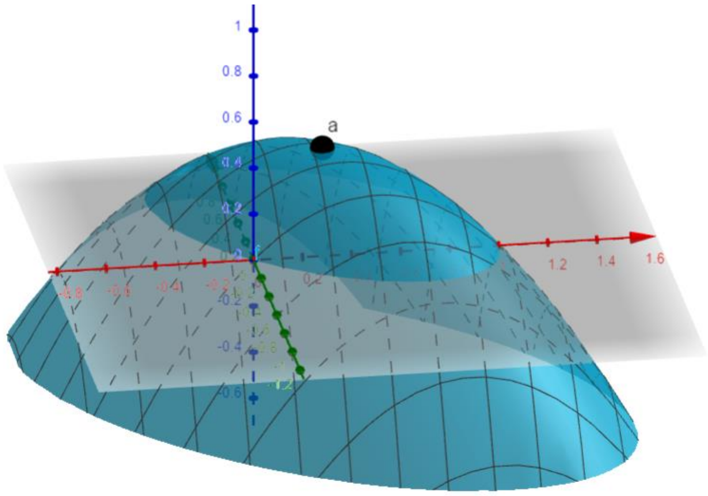
- Si *f* est différentiable, et si *f* admet un extremum local en *a* alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$. On dit alors que *a* est un point stationnaire ou un point critique de *f*.

- Si *f* est de classe C², et si *a* est un point stationnaire de *f*, on pose $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

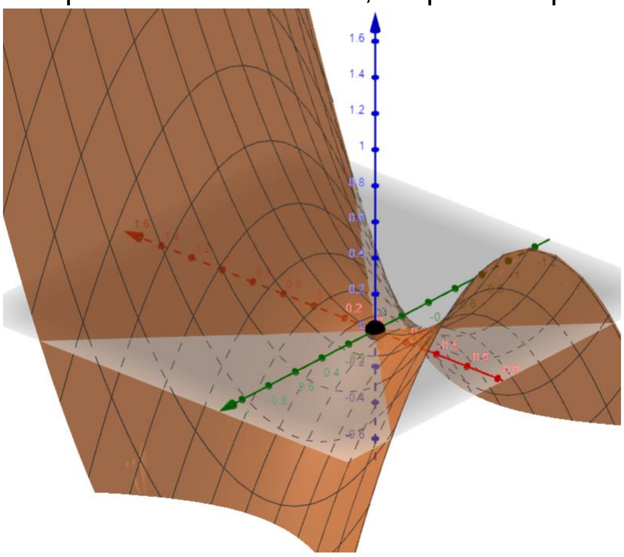
On distingue les cas suivants :
- Si $rt\text{-}s^2 > 0$ et $r > 0$, *f* admet un minimum relatif en *a*.



- Si $rt\text{-}s^2 > 0$ et $r < 0$, *f* admet un maximum relatif en *a*.



- Si $rt\text{-}s^2 < 0$, *f* n'admet pas d'extremum en *a*, on parle de point selle.



- Si *rt-s² = 0*, on ne peut pas conclure.

Déterminons les dérivées partielles en fonction de x puis y.

$\frac{\partial f}{\partial x} = n - 2x - 2 - y; \frac{\partial f}{\partial y} = n - 2y - 2 - x$

Les coordonnées d'un possible point critique sont données en trouvant les racines de ces dérivées partielles.

$$\begin{cases} n - 2x - 2 - y = 0 \\ n - 2y - 2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = n - 2 - 2x \\ n - 2 - x - 2n + 4 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = n - 2 - 2x \\ 3x = n - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = n - 2 - \frac{2n-4}{3} \\ x = \frac{n-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{3n - 6 - 2n + 4}{3} \\ x = \frac{n-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{n-2}{3} \\ x = \frac{n-2}{3} \end{cases}$$

Par conséquent, le point M($\frac{n-2}{3}$;$\frac{n-2}{3}$) est un point critique. Sa nature est donnée par les dérivées partielles de second ordre.

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$

rt-s² = (-2)²-(-1)² = 3 > 0

Donc M est un extremum local. Comme *r* est négative, M est un maximum local. Il est aussi le maximum global car il est le seul point critique de la fonction. Ainsi, l'espérance est maximale pour $x = \frac{n-2}{3}$ et $y = \frac{n-2}{3}$. Il faut placer les deux colonnes de tranchées les plus proches possibles de chaque tiers du quadrillage pour que l'espérance soit maximale.

Conclusion :

Par nos recherches, nous avons trouvé à notre problème deux procédés qui permettent de s'approcher de la solution lorsque la forêt est modélisée par une grille.

- Si la forêt est un carré de côté n, le nombre de tranchées à utiliser est d'environ $\frac{2n^4+2n^3-8n^2-8n+4}{n^3+3n^2-4n-10}$, arrondi à l'entier supérieur.

- Quelque soit la forme de la grille utilisée, pour un nombre de tranchées donné, il faut répartir équitablement les cases d'arbres pour obtenir des groupes de cases boisées avec des effectifs identiques ou à défaut les plus similaires possible.

NOTES DE L'ÉDITION

[1] Il serait souhaitable d'avoir plus de précisions sur le code utilisé pour les premiers tests : si bien écrit, il peut résoudre numériquement le problème (même très rapidement).

[2] Il serait intéressant de mieux expliquer l'origine des calculs proposés pour résoudre le problème.

-