Feux et contre-feux

Elèves :
Louis BILLAUD, terminale S, David BRUNET, terminale S, Marine BRUNET, seconde, Audrey GEAIS, seconde, Lycée Saint Joseph, 4 rue du Docteur Brillaud, 79 300 BRESSUIRE.

Enseignant : Gilles MARECHAL

Chercheur : Julien MICHEL, Université de Poitiers

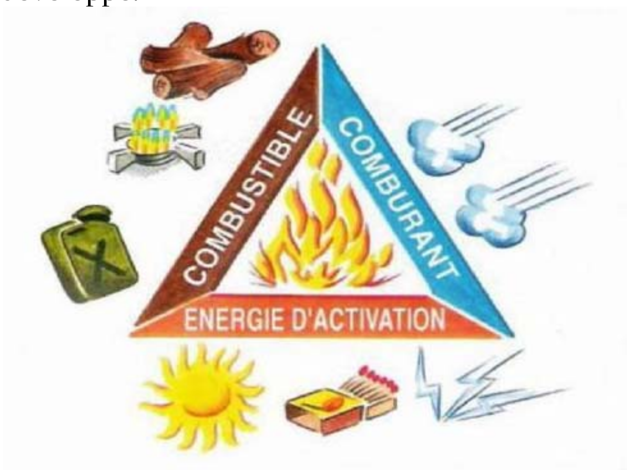
Jumelage avec le Lycée de l'Image et du Son d'Angoulême.

Année 2011-2012

Géométrie des ensembles de points de rencontre de feux

SITUATION CONCRETE

Le triangle du feu est un schéma qui montre les différents éléments pour qu'un feu se développe.



Ce triangle du feu compte 3 éléments différents, le combustible qui correspond à tout ce qui est susceptible de brûler comme la paille et le bois, le comburant qui correspond à l'air, composé d'azote, d'oxygène et de gaz rares, et enfin l'énergie d'activation, c'est à dire tout ce qui permet d'allumer un feu comme une étincelle, un briquet ou une allumette.

Si nous voulons arrêter un feu, il faut enlever un élément du triangle du feu comme le comburant en étouffant, ou bien en neutralisant le combustible avec un contre feu comme en arrosant la zone à protéger ou en la brûlant de façon maîtrisée. (1)

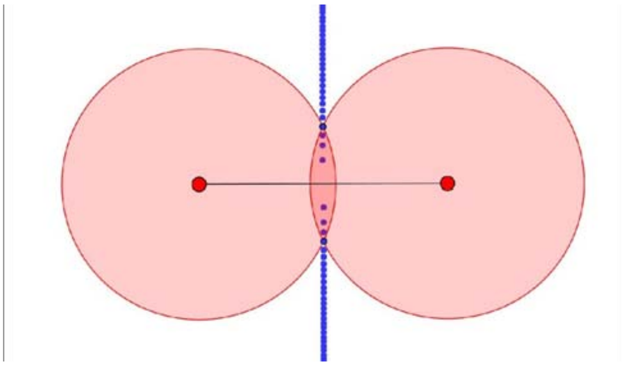
Audrey

FEUX EN DEPARTS SIMULTANES

Conditions

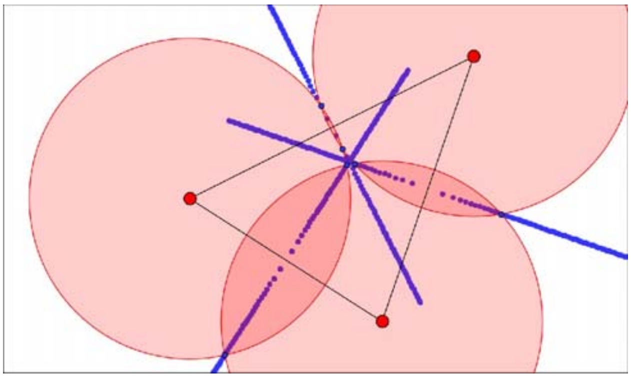
On suppose que les feux démarrent en même temps, se propagent à vitesse, constante dans toutes les directions.

On peut donc modéliser les feux, c'est à dire les fronts de flamme, par des cercles dont le rayon est proportionnel au temps. Deux cercles de même rayon vont ainsi avoir pour intersection les points situés à égale distance des centres de leurs cercles, or les points situés à égale distance de deux points forment une médiatrice, donc la ligne de rencontre entre les deux tels feux est une médiatrice.

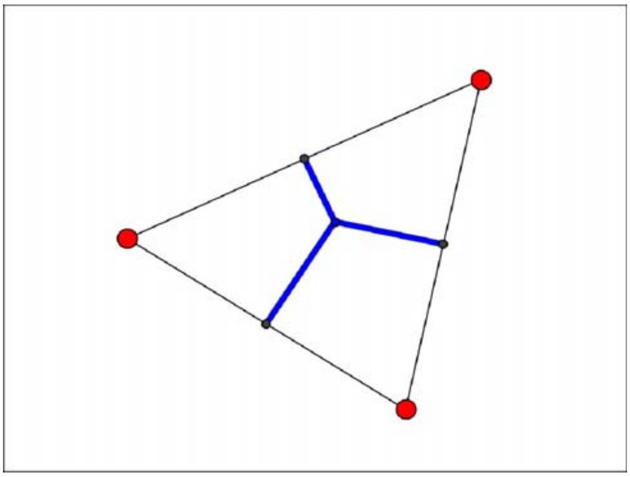


Analyse de cas particuliers

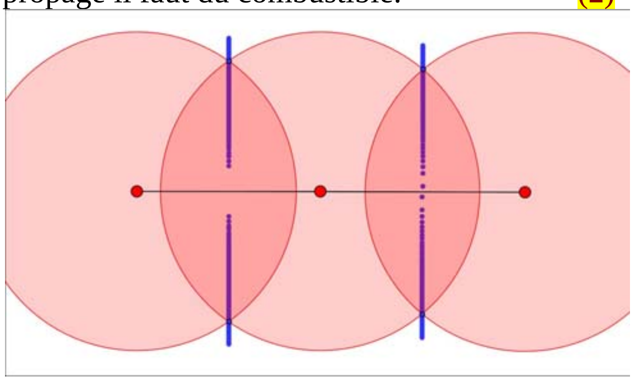
Pour trois points de départ de feux, il va se former ainsi trois médiatrices puisque chaque feu va rencontrer les deux autres feux. Les médiatrices se rencontrent en un même point, centre du cercle circonscrit au triangle formé par les trois points.



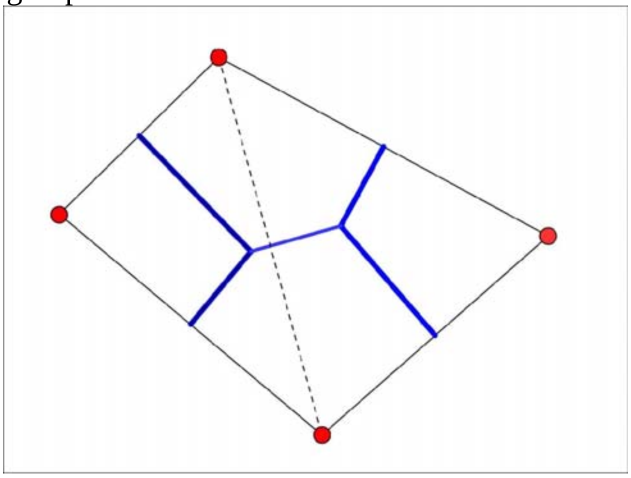
Pour l'étude géométrique on ne conserve que les segments à l'intérieur du triangle, ce qui donne



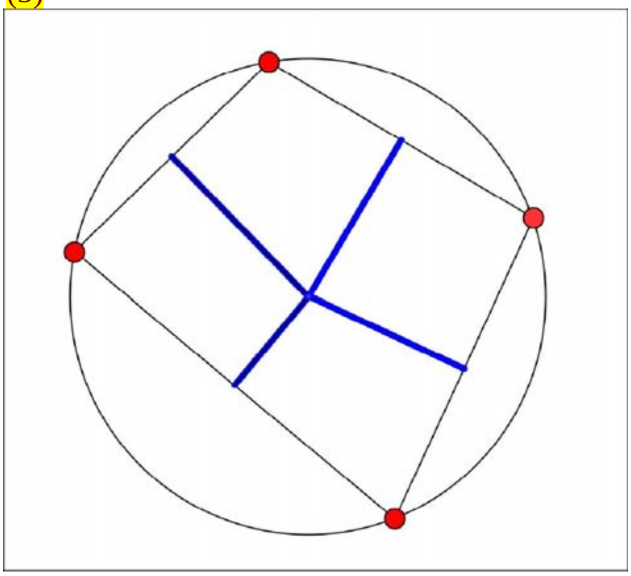
Cependant lorsque les trois points sont alignés, il va se former seulement deux lignes de rencontre. En effet, les deux feux situés aux extrémités ne pourront pas se rencontrer puisque le terrain sera déjà brûlé, car pour qu'un feu se propage il faut du combustible. (2)



Lorsque quatre feux sont allumés, il se forme cinq lignes de rencontre : les quatre médiatrices des côtés du polygone qui se rencontrent deux à deux et une cinquième ligne de rencontre. Cette cinquième ligne correspond au segment reliant deux points de concours de 2 groupes de 3 médiatrices.



Mais il peut se former aussi seulement 4 lignes de rencontre, lorsque les 4 points de départ de feux sont cocycliques. En effet dans ce cas les deux cercles circonscrits aux trois premiers feux et aux trois derniers feux sont les mêmes, le segment supplémentaire précédent est réduit à un point. (3)



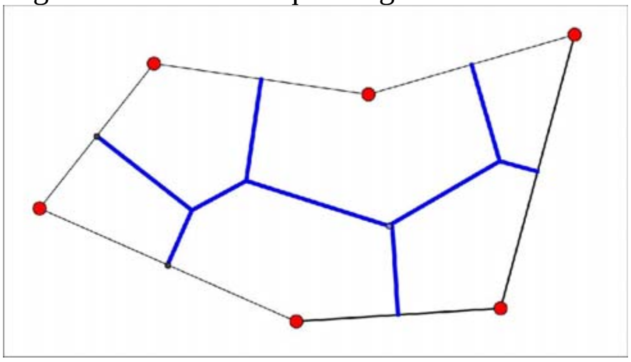
De même il peut n'y avoir que 3 lignes de rencontre lorsque les 4 feux sont alignés.

Quand 5 feux sont allumés, il se forme 7 lignes de rencontre au maximum. Il peut aussi se créer 6 lignes lorsque quatre points sont cocycliques et 5 lignes lorsque tous les points sont cocycliques.

De même lorsque tous les points sont alignés il ne se forme que 4 lignes de rencontre.

Pour 6 feux allumés, il se crée 9 lignes de rencontre au maximum. Il peut se former aussi seulement 8, 7 ou 6 lignes de rencontre lorsque 4, 5 ou tous les points sont cocycliques.

De même lorsque tous les points sont alignés il ne se forme que 5 lignes de rencontre.



Synthèse des résultats

Nous avons rassemblé les résultats dans un tableau.

Nombre de feux	Nombre de lignes de rencontre minimum	maximum
n	*m*	*M*
2	1	1
3	2	3
4	3	5
5	4	7
6	5	9
n	*n* - 1	2*n – 3

Pour déterminer, en fonction du nombre *n* de feux, le nombre minimum de lignes de rencontre *m*, il faut que tous les points de départs soient alignés. On remarque que *m* est égal au nombre *n* de feux moins 1. Cela est dû au fait qu'un feu ne peut rencontrer que 2 feux au maximum (un de chaque côté).

Pour le nombre maximum de lignes de rencontre *M*, on voit que c'est 2 fois *m* moins 1. En reprenant la formule de *m*, on peut proposer que $M=2(n-1)-1=2*n-3$.

On remarque aussi pour *M*, qu'à chaque fois qu'on rajoute un feu, on augmente de deux le nombre de lignes de rencontre maximum. Si on rajoute un autre point, on crée un triangle supplémentaire et former ainsi 3 nouvelles lignes de rencontre au maximum. Cependant, une des lignes, qui sont des médiatrices, a déjà été formée dans la figure précédente puisque deux des points existaient déjà. Donc en rajoutant un feu, on augmente de au maximum de 2 le nombre de lignes de rencontre.

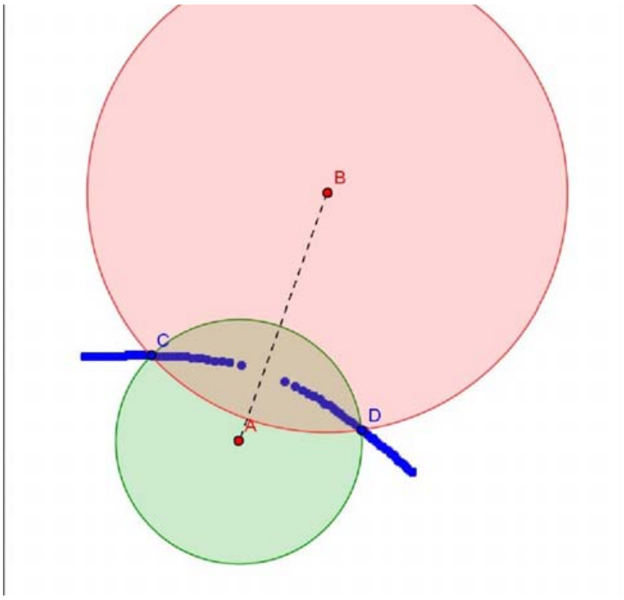
On décide de noter M_n le nombre de lignes de rencontre au maximum avec *n* feux, lorsque n ≥ 2 Sachant que pour 2 feux il existe 1 seule ligne de rencontre on a $M_2=1$, de plus, d'après ce qui précède, $M_{n+1}=M_n+2$: il s'agit donc d'une suite arithmétique de premier terme $M_2=1$ de raison 2. On démontre ainsi que le nombre maximum de lignes de rencontre de *n* feux est $M_n=2*n-3$.

Louis

FEUX EN DEPARTS SUCCESSIFS

Deux feux avec départs différents

Dans le cas de deux feux ne partant pas en même temps on observe que la ligne de rencontre n'est plus une droite mais une courbe. On a ensuite cherché la nature de cette courbe : on peut dire que c'est une hyperbole. La courbe est tournée vers le départ de feu partant en second.



Démonstration géométrique :

On suppose que le feu se développe à la vitesse *v*. Soit un point *M* appartenant à cette courbe et *A* et *B* les centres des 2 feux, *B* partant avec un décalage *t* d'unité de temps de retard, on peut écrire : $MA-MB=v\cdot t=d$. Ceci prouve que la ligne de rencontre est une hyperbole.

(4) (5)

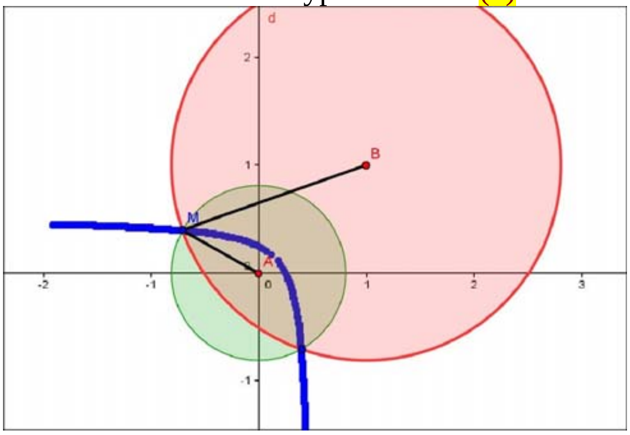
Démonstration analytique

On part du système suivant qui correspond à l'intersection entre deux cercles partant avec un décalage 1 (unité de temps). On a décidé que le centre du feu partant avec un retard 1 est *A* (0;0) et *B* (1;1) est le centre du premier feu. (6)

En notant *d* la distance parcourue par le front de flamme depuis le départ du second feu, on a :

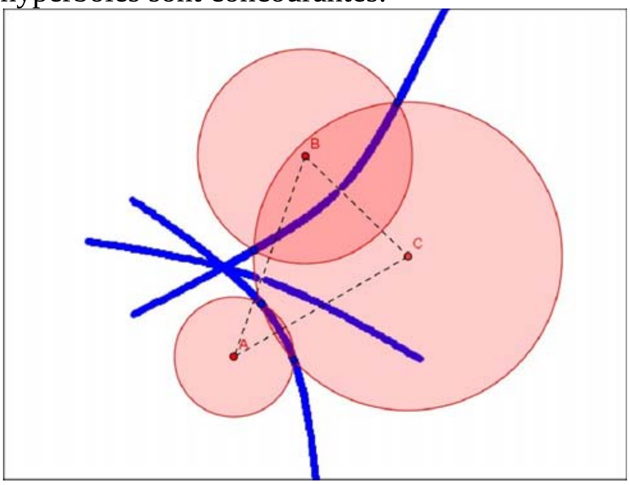
$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=d^2 \\ x^2+y^2=(d-1)^2\end{cases} \qquad (7)$$

Les points d'intersection sont sur la courbe d'équation $y=\frac{(4x-1)}{(8x-4)}$, ce qui confirme que la courbe est bien une hyperbole. (8)



Trois feux avec des départs successifs

Dans le cas de trois feux en départs successifs, on observe trois hyperboles. Ces trois hyperboles sont concourantes.



Démonstration :

Supposons que le feu B parte après A avec un décalage d et que le feu C parte après B avec un décalage d'.

Si un point M est sur la première hyperbole issue des feux A et B alors $MA-MB=d$ et si M est sur la seconde hyperbole issue des feux B et C alors $MB-MC=d'$; on a alors $MA-MC=(MB+d)-(MB-d')=d+d'$ ce qui prouve que M est sur la troisième hyperbole issue de A et C.

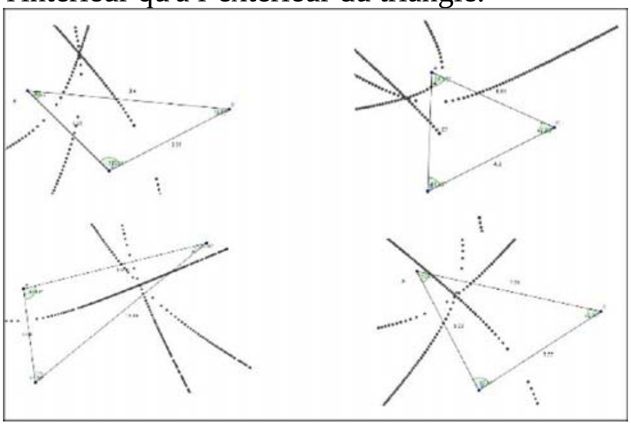
On démontre ainsi que les trois hyperboles sont concourantes.

Position du point d'intersection

Pour faciliter la modélisation, comme pour les médiatrices, nous effacerons les « parties » d'hyperboles passant dans la zone brûlée. De plus, nous allons ensuite travailler avec le triangle formé par les 3 centres des feux et le point de concours des hyperboles.

Nous avons voulu savoir si ce point était situé sur une droite déjà connue (médiatrice, bissectrice,...), mais ces recherches n'ont pas abouti.

Puis nous avons essayé de trouver si des facteurs étaient déterminants pour la position de ce point : il nous semblait que la nature des angles du triangle intervenait. A l'aide du logiciel Géogébra nous avons représenté les deux situations : un triangle avec un angle obtus et un triangle avec 3 angles aigus. De même que précédemment, les tentatives n'aboutissent pas car on peut voir que, dans chacun des cas, le point de concours se situe aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du triangle.



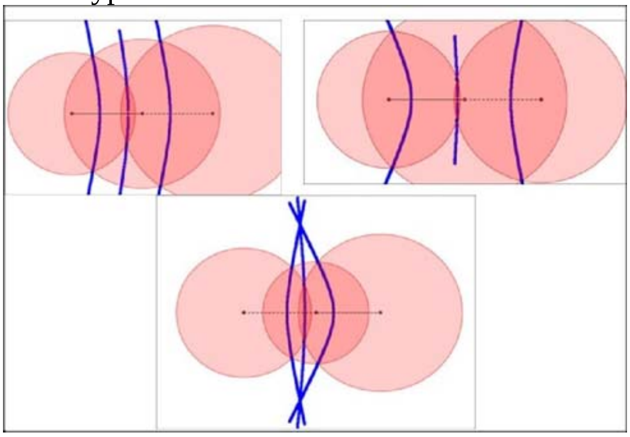
On peut donc conjecturer que la nature des angles du triangle n'a pas d'impact sur la position du point d'intersection des trois hyperboles.

Recherche de cas particuliers

Durant l'année, nous avons pu remarquer d'autres particularités à propos des trois hyperboles. Lorsque les 3 centres des feux étaient alignés nous avons conservé les 3 hyperboles, bien que l'une soit fictive, puisque la zone est déjà brûlée. Les résultats sont différents selon l'ordre de départ des feux.

Cas 1 : les feux sont alignés dans leur ordre

croissant de départ : cercle de rayon d, $d+1$, $d+2$
Les hyperboles ne sont visiblement pas concourantes.
Cas 2 : les feux sont alignés et le feu partant en premier se situe entre les deux autres.
Comme précédemment, on remarque que les hyperboles ne sont pas concourantes.
Cas 3: Les points sont alignés et le feu partant en dernier se situe entre les deux autres. On peut observer la présence de deux points de concours des 3 hyperboles.



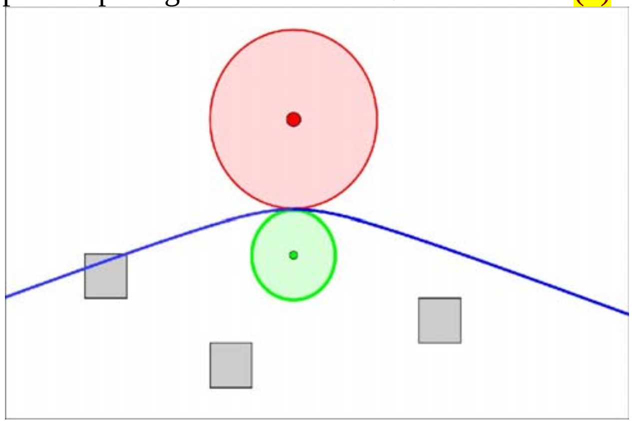
Marine

ZONE A PROTEGER

Nous sommes partis sur un cas plus concret avec une zone à protéger.

Le but est de trouver où mettre le contre feu pour protéger des zones données.

Pour montrer que la zone est protégée, il faut que la ligne de rencontre du feu et du contre feu soit éloignée de la zone à protéger. Au contraire, si la ligne de rencontre du feu et du contre feu passe dans la zone à protéger alors une partie de cette zone brûlera, ce qui prouve que la zone n'a pas été protégée suffisamment. (9)



Où situer les pompiers ?

Nous nous sommes intéressés où placer les pompiers pour qu'une zone à protéger le soit correctement. Cela revient à chercher où placer le foyer du contre feu pour que la zone soit protégée.

Ce travail a été seulement commencé avec le logiciel.

Audrey

Notes d'édition

(1) Le but du problème n'est pas très clairement posé : il s'agit de trouver les lieux d'intersection de plusieurs feux.
(2) Le lecteur pourrait judicieusement se demander ce qu'il arrive lorsque les médiatrices s'intersectent en dehors du triangle.
(3) Là encore, que se passe-t-il si le centre du cercle est extérieur au quadrilatère formé par les quatre points ?
(4) Pour le lecteur non familier des hyperboles, il y a plusieurs façons de les définir. Celle donnée ici correspond à la définition bifocale de l'hyperbole, les deux foyers étant les points A et B, c'est-à-dire les centres des cercles.
(5) On pourrait se demander où est passée la deuxième branche de l'hyperbole
(6) Ce cas peut paraître très particulier, mais on peut montrer que tout cas peut se ramener à celui-ci avec une transformation des variables.
(7) x et y désignent les coordonnées du point M
(8) Encore une autre manière de définir une hyperbole ! L'équation traditionnelle est de la forme y=1/x, on peut retrouver une forme similaire ici en remplaçant 8x -4 par X (et donc x par (X+4)/8).
(9) Le problème qui se pose ici n'est pas très clair. Le pompier semble être à la place d'un feu, pourquoi ? Comment simule-t-il le feu ?