THEOREME DE FERMAT-WILES (1)

LYCEE JEAN HINGLO 2010

Réalisé par :

Naïmati – Soidanti- La ïqah- Ousrat- Julien- Ulrich- Gregory- Christophe- Audrey- Maya- Emmanuelle- Samuel- Laurence- Sébastien- Bruno et Remy

On se propose de résoudre l'équation:

$$x^n + y^n = z^n$$

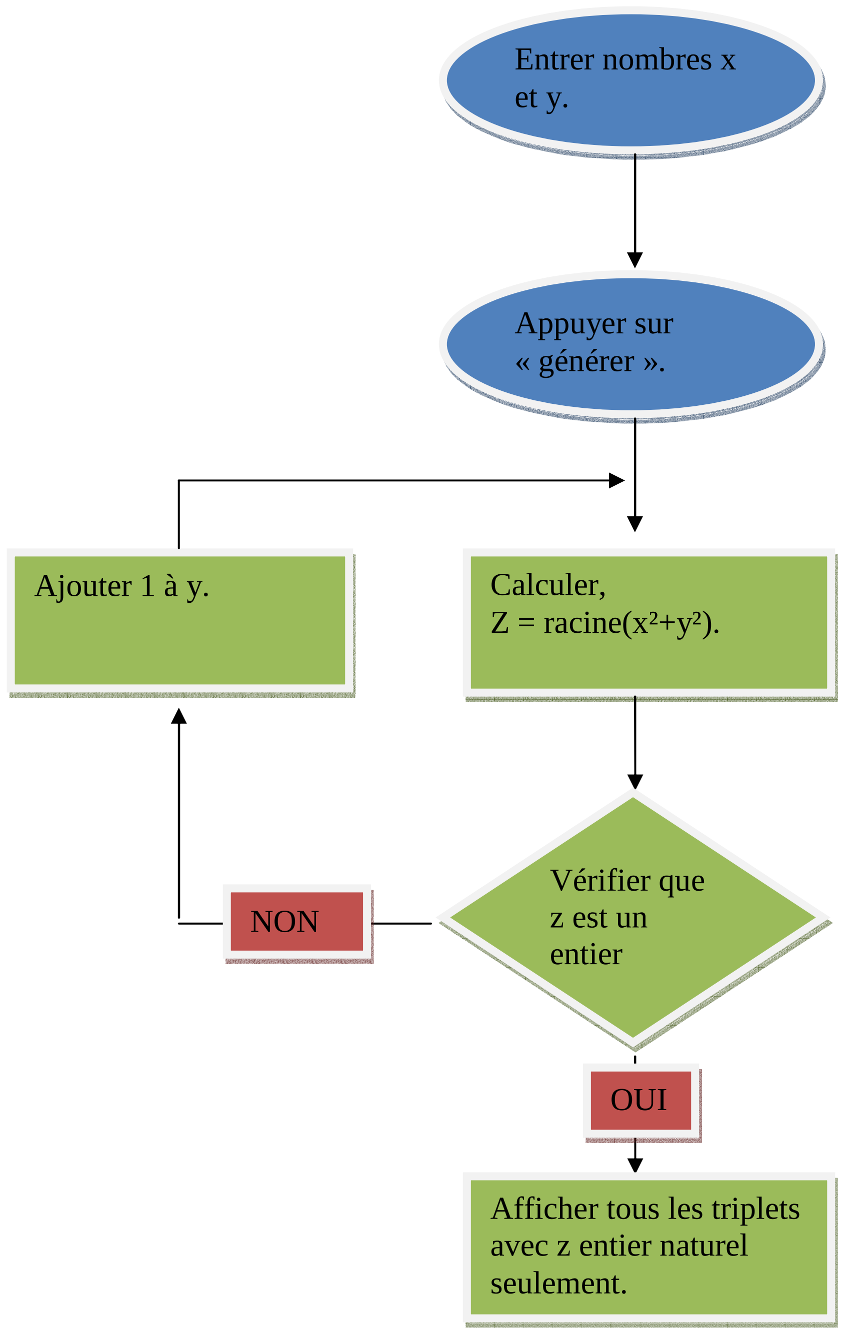
Avec x, y et z entiers naturels non nuls et $n = 2$.

Des exemples

$3^2+4^2=5^2$
$6^2+8^2=10^2$
$5^2+12^2=13^2$

Les triplets $(3;4;5)$; $(6;8;10)$ et $(5;12;13)$ sont solutions de cette équation.

Algorithmes pour trouver des triplets solutions (2)



Réduction du problème : on prend x, y et z premiers entre eux.

Nous allons en premier lieu centrer notre recherche sur les valeurs de x, y, et z **premières** entre-elles.

En effet si x, y et z ne sont pas premiers entre eux alors on a:

$$x = k \times l \quad ; \quad y = k \times m \quad ; \quad z = k \times n$$

avec k , l , n et m entiers naturels non nuls.

Donc l'équation devient : $(kl)^2 + (km)^2 = (kn)^2 \Leftrightarrow k^2l^2 + k^2m^2 = k^2n^2$

On divise par k^2 (non nul) alors $l^2 + m^2 = n^2$. Donc $(l;m;n)$ est encore un triplet solution de l'équation.
Par conséquent on peut simplifier l'équation en divisant x, y et z par leur diviseur commun k.
On peut donc restreindre notre recherche aux triplets $(x;y;z)$ premiers entre eux.

Plan

Tout d'abord nous allons montrer que x est différent de y.
Puis que x et y ne peuvent pas être de même parité.
Enfin nous trouverons toutes les solutions en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

1) Montrons que $x \neq y$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $x = y$ alors $z^2 = x^2 + y^2 = 2x^2$ (*)
Donc z est pair ainsi $z = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$.
Alors (*) devient $(2k)^2 = 2x^2 \Leftrightarrow 2k^2 = x^2$. Donc x est pair.
Ainsi x, y et z ne sont pas premiers entre-eux, ce qui est une contradiction avec nos hypothèses.

Donc $x \neq y$.

2) Montrons que x, y sont de parités différentes.

Raisonnons par l'absurde et supposons que x et y sont de même parité.

Premier cas : x est pair et y pair. Montrons que z est pair.
x est pair donc $x = 2n$ et y pair donc $y = 2m$ avec m et n entiers naturels non nuls.
Alors

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$\Leftrightarrow (2n)^2 + (2m)^2 = z^2$$
$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4m^2 = z^2$$
$$\Leftrightarrow z^2 = 4\left(n^2 + m^2\right)$$

$n^2 + m^2 \in \mathbb{N}$, ainsi z^2 est divisible par 4 donc z est divisible par 2.
Nous constatons que x ; y et z ont un facteur commun 2 or x, y et z sont premiers entre eux. Ce qui est une contradiction.

Deuxième cas : x est impair ; y impair. Montrons que z est impair.
x est impair donc $x = 2n+1$, y est impair donc $y = 2m+1$ avec m et n entiers naturels non nuls.
Donc l'équation est de la forme :

$$(2n+1)^2 + (2m+1)^2 = (2p+1)^2 \quad (3)$$
$$\Leftrightarrow (4n^2 + 4n + 1) + (4m^2 + 4m + 1) = (4p^2 + 4p + 1)$$
$$\Leftrightarrow 4(n^2 + n + m^2 + m) + 2 = z^2$$

On pose $N = n^2 + 2nm + m^2$
Alors $4N + 2 = z^2$
Cette équation nous fait penser à une division euclidienne de z^2 par 4 avec N le quotient et 2 le reste.

- Si z est pair

Alors $z = 2q$ avec $q \in \mathbb{N}$.

Donc $z^2 = 4q^2 = 4\left(q^2\right) + 0$ et ainsi le reste de la division euclidienne de z par 4 est 0 et non 2. Ce qui est une contradiction.

- Si z est impair

Alors $z = 2q+1$ avec $q \in \mathbb{N}$. Donc $z^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4\left(q^2 + q\right) + 1$ et ainsi le reste de la division euclidienne de z par 4 est 1 et non 2. Ce qui est une contradiction.

Donc z^2 ne peut être sous la forme $4N+2$ et ainsi x et y ne peuvent être pairs simultanément.

Quitte à échanger le rôle de x et de y, on se place dans le cas où x est pair et y impair. Alors z est impair.

3) Résolution

REFORMULATION DE L'EQUATION

$$x^2 + y^2 = z^2$$

L'équation peut donc s'écrire:

$$x^2 = (z-y)(z+y)$$

TROUVONS TOUTES LES SOLUTIONS!!

Caractérisation des nombres carrés

Propriété :

Un nombre est un carré si et seulement si les exposants des nombres premiers intervenant dans sa décomposition sont tous pairs.

Exemples :

$2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$

L'exposant de 2 dans la décomposition est 1. Donc 2010 n'est pas un carré.

$3600 = 24 \times 3^2 \times 5^2 = (2^2 \times 3 \times 5)^2$.

Les exposants sont 4, 2 et 2. Donc 3600 est un carré.

Caractérisation des nombres dont le produit est un carré :

Propriété :

a et b sont des entiers pairs tels que le produit de a par b soit un carré si et seulement si il existe m, n, et p tels que:

$$a = 2m^2 p$$
$$b = 2n^2 p$$

Tous les diviseurs premiers de p sont d'exposant 1.

Exemple : $60^2 = 3600 = (2^2 \times 3 \times 5)^2$.

FORME DES SOLUTIONS

z et y impairs donc $z-y$ et $z+y$ sont pairs. De plus $x^2 = (z-y)(z+y)$ donc d'après la caractérisation précédente, il existe m,n et p tels que $z+y=2n^2p$ et $z-y=2m^2p$

On a donc

$$(S)\ :\ \begin{cases} z+y=2n^2p & (L_1) \\ z-y=2m^2p & (L_2) \end{cases}$$

On résout ce système pour déterminer z et y.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=2n^2p+2m^2p & (L_1-L_2) \\ z+y=2n^2p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=p\left(m^2+n^2\right) \\ y=p\left(n^2-m^2\right) \end{cases}$$

De plus $x^2 = (z-y)(z+y)$ donc $x^2=4m^2n^2p^2$ et $x>0$ alors $x=2nmp$.

Donc $x = 2nmp$; $y = p\left(n^2 - m^2\right)$; $z = p\left(n^2 + m^2\right)$

Mais x, y et z sont premiers entre – eux donc

$p = 1$.

4) Synthèse (4)

Si m et n sont des entiers naturels et si

$x = 2mn \quad y = n^2 - m^2 \quad z = n^2 + m^2$

Donc $x^2 + y^2 = n^4 + m^4 + 2(mn)^2 = z^2$

Le problème est donc résolu.

Grâce à A. Wiles on sait depuis 2001 que pour $k>2$. L'équation $x^k + y^k = z^k$ n'admet aucune solution non triviale.

Notes d'édition :

(1) Le titre est un peu ambitieux. Comme il est expliqué juste en dessous, il s'agit de trouver tous les triplets pythagoriciens, c'est à dire les triplets d'entiers (x,y,z) tels que x²+ y²=z², problème dont la solution était essentiellement connue par Euclide (3ème siècle avant J.C.)

(2) L'algorithme décrit ici prend en entrée deux entiers x et y et rend, s'il existe, un entier y' supérieur ou égal à y tel que x²+y'² soit un carré, et tourne indéfiniment si un tel y' n'existe pas.

(3) Ici, il ne faut pas remplacer z par 2p+1, mais le laisser tel quel. C'est d'ailleurs ce qui est fait deux lignes plus loin.

(4) Après avoir montré dans le paragraphe précédent que les solutions x,y,z sont nécessairement de la forme annoncée, on vérifie ici que cette condition est bien suffisante.