Extinction d'espèce

Année 2020-2021

Auteurs : Zoé MAGGIO, Mona VALAGEAS (Terminale générale).
Établissement : Lycée Paul Guérin, Niort (79).
Encadrés par : Fabien AOUSTIN, Thomas FORGET.
Chercheur : Abdallah EL HAMIDI, Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement, LaSIE, UMR CNRS 7356, La Rochelle Université.

Dans cet article, on étudie la probabilité qu'une espèce animale s'éteigne en moins de n générations. Pour cela on considère un ancêtre unique et on se donne les probabilités qu'un animal de cette espèce ait zéro, un, deux ou trois enfants.

1) Présentation du problème :

On essaie ici de calculer la probabilité qu'une espèce animale disparaisse.
Pour simplifier, on considère que chaque individu donne naissance à un certain nombre d'enfants sans avoir besoin de partenaire.
Pour le premier exemple traité, on fixe les données suivantes.
Au cours de sa vie, chaque individu a :

- aucun enfant avec une probabilité de 1/8,
- un enfant avec une probabilité de 3/8,
- deux enfants avec une probabilité de 3/8,
- trois enfants avec une probabilité de 1/8.

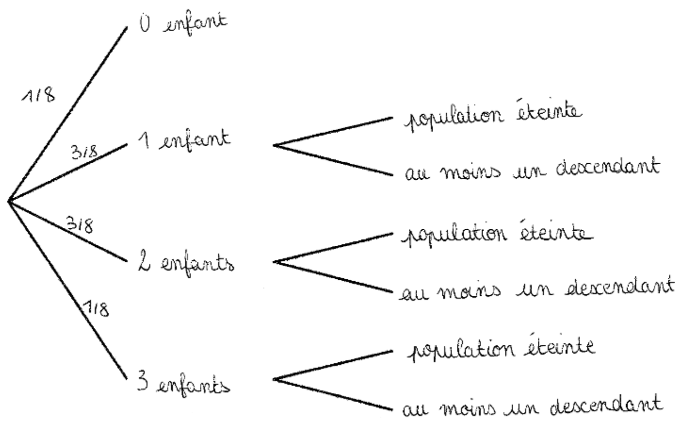
On suppose que les naissances sont indépendantes les unes des autres.
Dans ces conditions, on se demande quelle est la probabilité que, partant d'un seul individu, l'espèce soit éteinte en moins de n générations.

2) Une relation de récurrence :

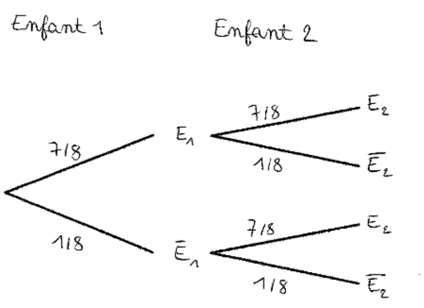
2-a) Quelques calculs sur les premiers cas :

La probabilité que l'espèce s'éteigne au bout d'une seule génération est égale à 1/8.

Calculons maintenant la probabilité que la population s'éteigne en moins de 2 générations.
L'individu initial peut avoir 0, 1, 2 ou 3 enfants.
La population sera éteinte si aucun de ces enfants n'a d'enfants.
On peut représenter la situation par un arbre de probabilités :



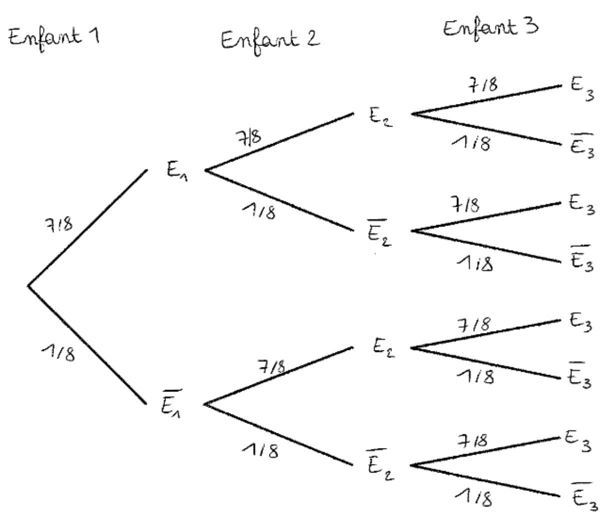
La probabilité qu'un individu donné n'ait aucun enfant est de 1/8.
La probabilité qu'un individu donné ait au moins un enfant est donc égale à : 7/8.
Calculons la probabilité que deux individus n'aient aucun enfant.
On utilise l'arbre ci-dessous où E_i indique que l'enfant n° i a au moins un descendant.



Le seul chemin à prendre en compte est le dernier, $\overline{E_1} \cap \overline{E_2}$.

La probabilité que deux individus n'aient aucun enfant est donc égale à : $\left(\frac{1}{8}\right)^2$.

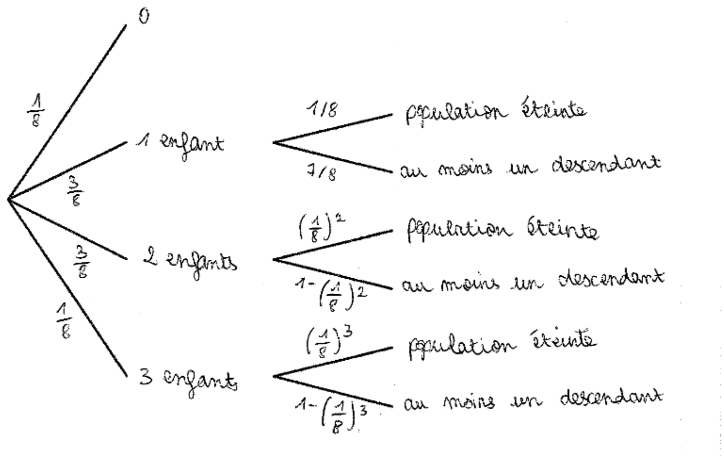
Calculons la probabilité que trois individus n'aient aucun enfant.
On utilise l'arbre ci-dessous :



Le seul chemin à prendre en compte est le dernier, $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$.

La probabilité que deux individus n'aient aucun enfant est donc égale à : $\left(\frac{1}{8}\right)^3$.

Finalement, on peut compléter le premier arbre ainsi :

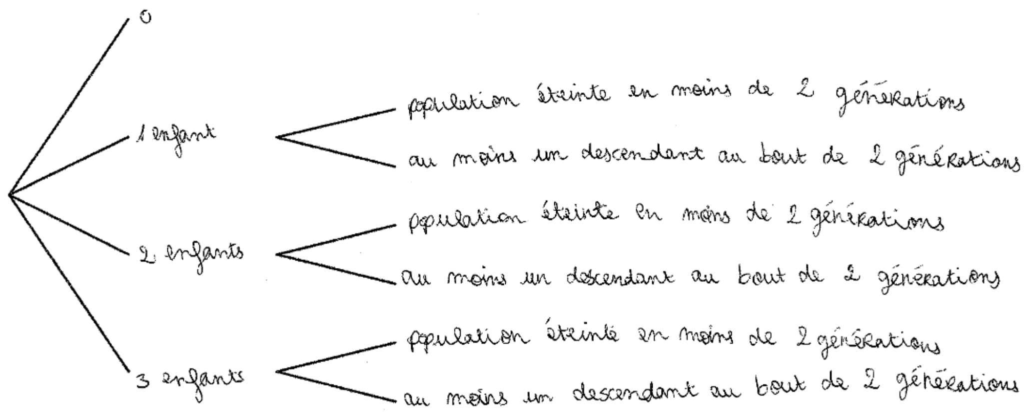


La probabilité que l'espèce s'éteigne en moins de 2 générations est donc égale à :

$$\underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{0 enfant}} + \underbrace{\frac{3}{8} \times \frac{1}{8}}_{\text{1 enfant}} + \underbrace{\frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{8}\right)^2}_{\text{2 enfants}} + \underbrace{\frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{8}\right)^3}_{\text{3 enfants}} = \frac{729}{4096} \approx 0{,}178$$

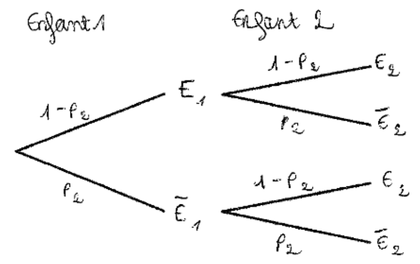
On note p^2 cette probabilité

Calculons maintenant la probabilité que la population s'éteigne en moins de 3 générations.
L'individu initial peut avoir 0, 1, 2 ou 3 enfants.
La population sera éteinte en moins de trois générations si aucun de ces enfants n'engendre une descendance de plus de 2 générations.
On peut représenter la situation par un arbre de probabilités :



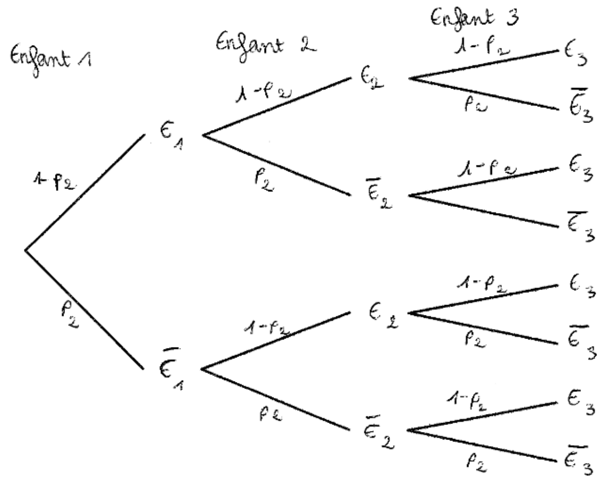
La probabilité qu'un individu donné engendre une descendance qui s'éteint en moins de 2 générations est égale à p_2.

Calculons la probabilité que deux individus engendrent une descendance qui s'éteint en moins de 2 générations. On utilise l'arbre ci-dessous où E_i indique qu'il n'y a pas d'extinction en moins de 2 générations pour l'enfant n° i.

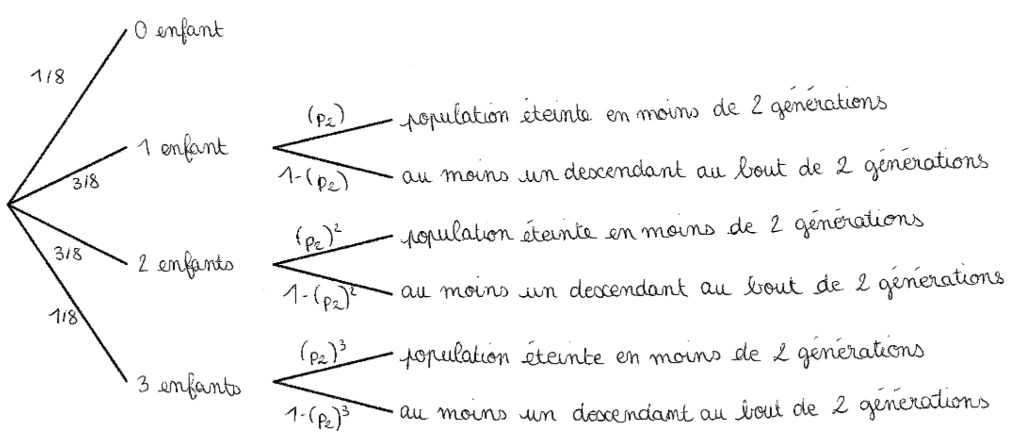


Le seul chemin à prendre en compte est le dernier, $\overline{E_1} \cap \overline{E_2}$.
La probabilité que deux individus engendrent une descendance qui s'éteint en moins de 2 générations est donc égale à : $p_2{}^2$.

Le même raisonnement s'applique pour trois individus. On utilise l'arbre ci-dessous.



Le seul chemin à prendre en compte est le dernier, $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$.
La probabilité que trois individus engendrent une descendance qui s'éteint en moins de 2 générations est égale à : $p_2{}^3$.
Finalement, on peut compléter le premier arbre ainsi :

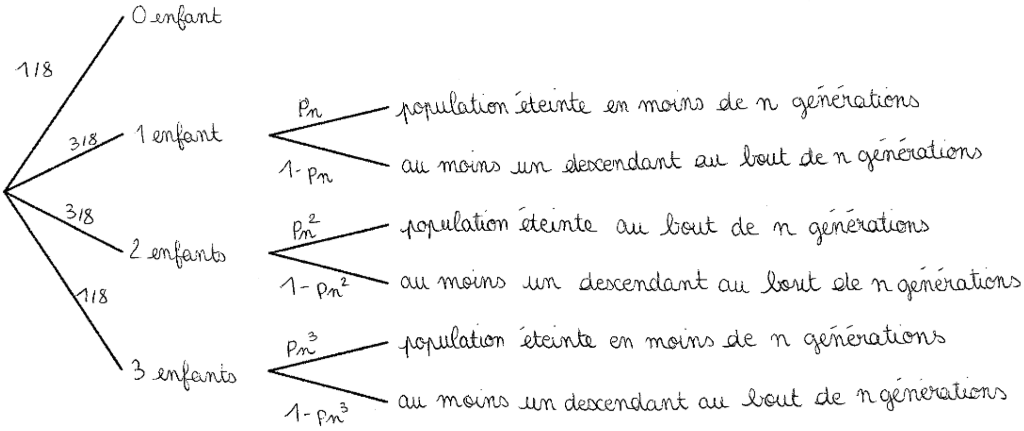


La probabilité p_3 que l'espèce s'éteigne en moins de 3 générations est donc égale à :

$$p_3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times p_2 + \frac{3}{8} \times p_2{}^2 + \frac{1}{8} \times p_2{}^3 \approx 0,2043.$$

2-b) Une relation générale :

Le calcul précédent se généralise.
Si on note p_n la probabilité que l'espèce s'éteigne en moins de n générations, on a :



Ainsi, on a : $p_{n+1} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} p_n + \frac{3}{8} p_n{}^2 + \frac{1}{8} p_n{}^3.$

On a $p_{n+1} = f(p_n)$, où f est la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3.$

3) Étude de la suite (p_n) :

3-a) Convergence de la suite :

Pour montrer que la suite (p_n) est convergente, on va montrer qu'elle est croissante et majorée.

Étudions les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3.$

On a : $f'(x) = \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} x + 3 \times \frac{1}{8} x^2 = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} x + \frac{3}{8} x^2.$

On voit que tous les termes de $f'(x)$ sont positifs sur [0 ; 1] donc f est strictement croissante sur [0 ; 1].

On cherche à montrer que $p_n \leq p_{n+1} \leq 1$. On note P_n cette propriété.

<u>Initialisation :</u>

On cherche à montrer que $p_1 \leq p_2 \leq 1$.

On a $\frac{1}{8} \leq \frac{729}{4096} \leq 1$ donc P_1 est vraie.

<u>Hérédité :</u>

On suppose P_n vraie. Montrons que $p_{n+1} \leq p_{n+1+1} \leq 1$.

On a $p_n \leq p_{n+1} \leq 1$.

On applique la fonction f et on a $f(p_n) \leq f(p_{n+1}) \leq f(1)$ car f conserve les inégalités sur [0 ; 1].

On a donc $p_{n+1} \leq p_{n+1+1} \leq 1$.
L'hérédité est validée.

Finalement, la suite $\left(p_n\right)$ est bien convergente.

3-b) Calcul de la limite :

Soit ℓ la limite de la suite $\left(p_n\right)$.

Comme $p_{n+1} = f(p_n)$, que $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et que f est continue sur [0 ; 1], le nombre ℓ est une solution de l'équation : $f(\ell) = \ell$.

On résout cette équation :

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\Leftrightarrow \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\ell + \frac{3}{8}\ell^2 + \frac{1}{8}\ell^3 = \ell \\ &\Leftrightarrow 1 + 3\ell + 3\ell^2 + \ell^3 = 8\ell \\ &\Leftrightarrow 1 + 3\ell + 3\ell^2 + \ell^3 - 8\ell = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 5\ell + 3\ell^2 + \ell^3 = 0 \end{aligned}$$

On factorise par $\left(\ell - 1\right)$ car 1 est une solution.

En effet, on a : $1 - 5 \times 1 + 3 \times 1^2 + 1^3 = 1 - 5 + 3 + 1 = 0$.

1 est bien une solution donc on peut factoriser $1 - 5\ell + 3\ell^2 + \ell^3$ par $\left(\ell - 1\right)$.

On a un polynôme de degré 3 et $\ell - 1$ est de degré 1 donc on a :

$$\underbrace{\underbrace{(1-\ell)}_{\text{polynôme de degré1}}\underbrace{(a\ell^2 + b\ell + c)}_{\text{polynôme de degré 2}}}_{\text{polynôme de degré 3}}$$

On a :

$$\begin{aligned} 1 - 5\ell + 3\ell^2 + \ell^3 &= \left(\ell - 1\right)\left(a\ell^2 + b\ell + c\right)a \\ &= a\ell^3 + b\ell^2 + c\ell - a\ell^2 - b\ell - c. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ b - a & = & 3 \\ c - b & = & -5 \\ -c & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & 1 \\ b - 1 & = & 3 \\ -1 - b & = & -5 \\ c & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 4 \\ c & = & -1 \end{cases}.$$

On a donc $1 - 5\ell + 3\ell^2 + \ell^3 = \left(\ell - 1\right)\left(\ell^2 + 4\ell - 1\right)$ et :

- soit : $\ell - 1 = 0 \Leftrightarrow \ell = 1$;
- soit $\ell^2 + 4\ell - 1 = 0$.

C'est un polynôme du second degré où $a = 1$, $b = 4$ et $c = -1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20 > 0$

donc $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 - \sqrt{20}}{2} = -2 - \sqrt{5} \approx -4,24$ mais ceci n'est pas possible car on cherche une probabilité donc la solution est entre 0 et 1 ;

et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 + \sqrt{20}}{2} = -2 + \sqrt{5} \approx 0,24$.

La limite de la suite $\left(p_n\right)$ est égale à $-2+\sqrt{5} \approx 0,24$.

Voir note de l'édition

4) Généralisations :

Nous avons commencé à généraliser le problème en changeant les probabilités données au départ. Nous avons pensé à examiner les cas où il y a deux enfants au maximum ou un enfant au maximum. La démarche globale reste la même et il est sûrement possible d'établir des formules donnant la limite de la suite en fonction des probabilités de départ mais nous n'avons pas eu le temps de tout terminer.

Note de l'édition : Il manque ici la justification du fait qu'on peut éliminer la valeur 1 comme limite possible de la suite.