L'éternelle fortune

2021-2022

Nom, prénom et niveaux des élèves : Mathieu Chazottes et Mathis Colin, classe de 1ère

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay

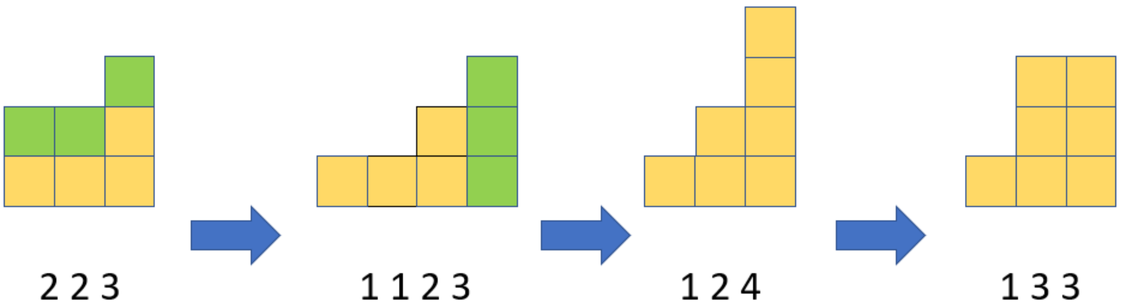
Enseignant(s) : Hélène Cochard, Cécile Damongeot

Chercheur(s) : Lucas Ertzbischoff, École Polytechnique

1 Présentation du sujet

On dispose d'un nombre fini de pièces d'or, initialement réparties en un nombre fini de tas. A chaque étape, on retire une pièce d'or dans chaque tas, et les pièces retirées forment un nouveau tas. On répète ainsi cette opération avec la nouvelle disposition des pièces.

Nous allons nous demander si cette procédure a une fin, s'il y a toujours une configuration finale et en combien d'étapes on l'atteint.



Sur le schéma ci-dessus chaque carré représente une pièce d'or, les pièces vertes sont celles que l'on déplace de la première à la deuxième étape.

2 Exemples

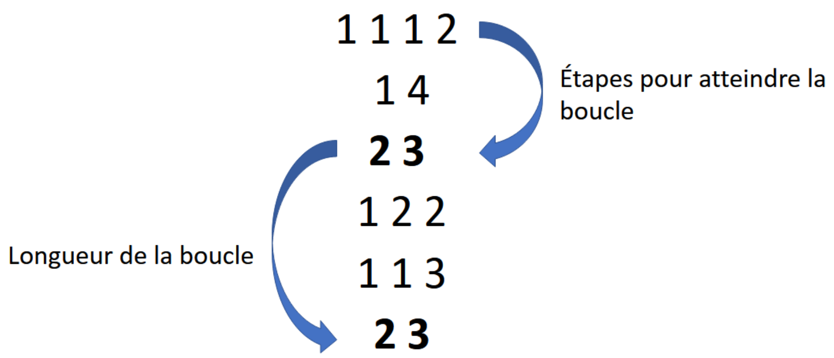
2.1 Essais

Nous allons commencer par étudier quelques exemples, ici nous allons noter les piles de pièces simplement avec des suites de nombres. On s'arrête lorsque l'on trouve deux fois la même configuration, puisque cela signifie que la même chose va se répéter. [1]

2 4 5	5 5
1 3 4 3	2 4 4
2 3 2 4	1 3 3 3
1 1 2 3 4	2 2 2 4
1 2 3 5	1 1 1 3 4
1 2 4 4	2 3 5
1 3 3 4	**1 2 3 4**
2 2 3 4	**1 2 3 4**
1 1 2 3 4	

2.2 Notations

On remarque que le même schéma se reproduit, nous allons donc établir des notations :

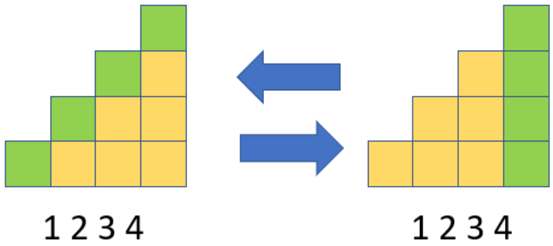


En partant d'une certaine configuration, il faut un certain nombre d'étapes pour atteindre une autre configuration (que l'on va appeler étapes pour atteindre la boucle) qui va se répéter en un certain nombre d'étapes (que l'on va appeler longueur de la boucle). Ci-dessus, on part de la configuration "1 1 1 2", puis en 2 étapes on atteint la configuration "2 3" qui se répète toutes les 3 étapes.

A noter que l'on trie les tas de pièces par ordre croissant par convention mais que cela ne change rien, l'ordre des piles de pièces n'ayant aucune influence sur le problème.

3 Première conjecture

On remarque que certaines configurations de pièces se répètent indéfiniment, et ce, en une seule étape. Il s'agit des configurations du type "1 2 3 4" ou "1 2 3 4 5 6" par exemple.



Ces configurations peuvent être atteintes lorque le nombre total de pièces est un nombre triangulaire (pouvant s'écrire comme la somme des n premiers entiers). On peut trouver le n-ième nombre triangulaire à l'aide de la formule suivante :

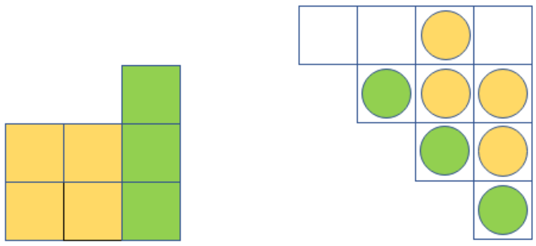
$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mais l'autre condition pour atteindre ces configurations est que les pièces soient dans une certaine disposition. On cherchera donc dans un premier temps à démontrer que, quelle que soit la configuration initiale de pièces, s'il y a un nombre triangulaire de pièces on finira forcément par atteindre ce type de configuration.

4 Démonstration

4.1 Introduction du système de "boulier"

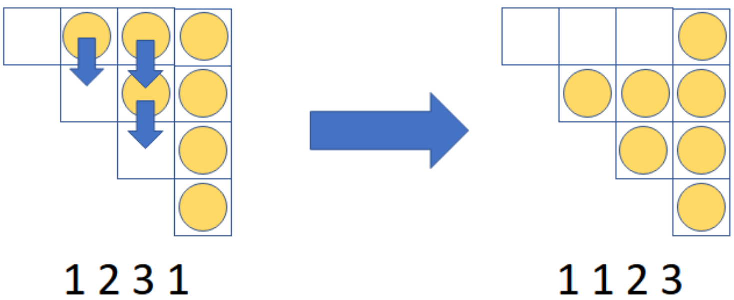
Pour réussir à démontrer la conjecture, on a cherché une nouvelle manière de représenter le problème. On va donc représenter le processus avec un système de "boulier". Pour commencer, on représente les colonnes de pièces en diagonale dans une forme comme celle-ci :



Ici nous avons une configuration "2 2 3" à gauche représentée de manière "classique" et à droite représentée sous forme de boulier. Les colonnes de pièces dans le boulier se lisent en diagonale, la première pièce en bas de chaque pile correspondant à la bille dans la colonne de droite du boulier.

4.2 Fonctionnement

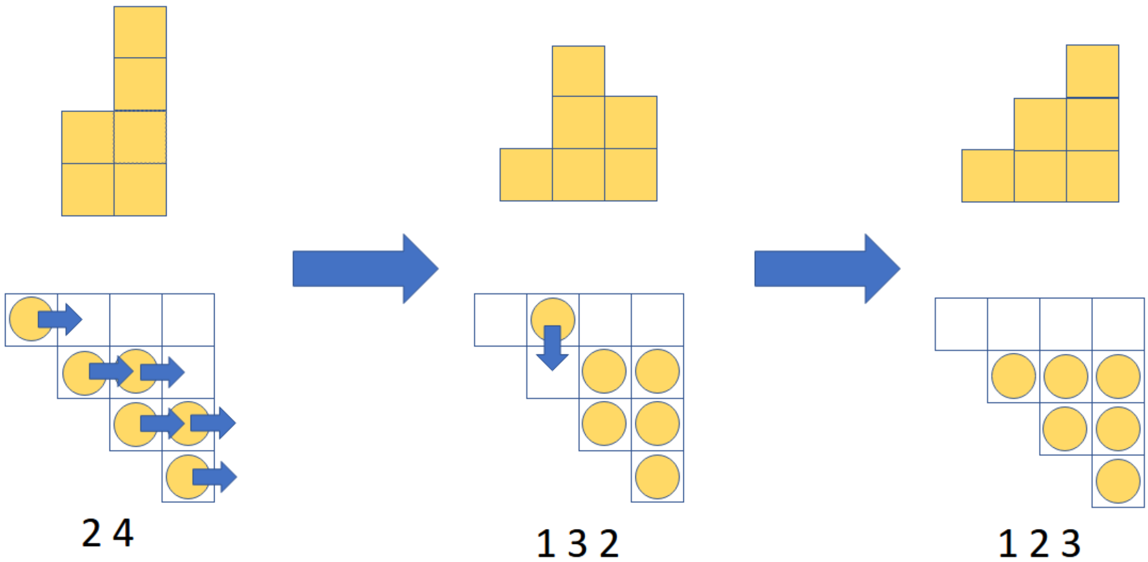
[2] Une règle que nous allons ajouter à ce système de boulier est la suivante : si une bille se trouve au-dessus d'une case vide, elle tombe dans ce trou, et ainsi de suite jusqu'à ce que les billes ne puissent pas tomber plus bas.



Cette chute des billes représente en réalité la réorganisation dans l'ordre croissant des piles de pièces. On peut le voir dans l'exemple ci-dessus, une configuration "1 2 3 1" mise dans le boulier, devient "1 1 2 3" par la chute des billes.

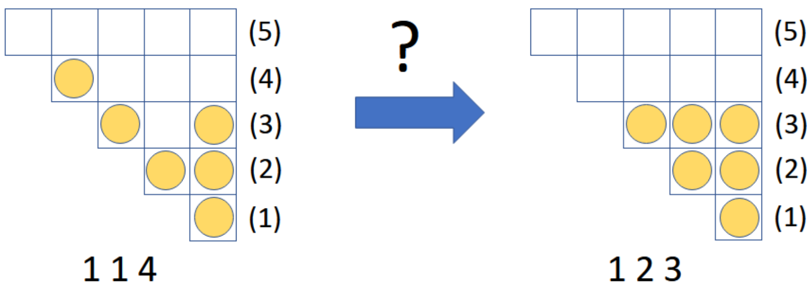
Enfin, pour simuler le fait de prendre une pièce dans chaque tas et d'en créer un nouveau, on décale toutes les billes d'un rang vers la droite, sachant que si elles se trouvent déjà au bout d'une ligne elles reviennent au début de celle-ci [3] . En effet c'est comme si l'on enlevait une pièce du bas de chaque tas (pièces de la colonne de droite) et qu'on formait un nouveau tas avec (diagonale à gauche).

A chaque étape, on va donc déplacer toutes les billes d'un rang vers la droite, puis faire chuter les billes qui le peuvent. Voici un schéma pour illustrer tout cela d'une manière plus claire :



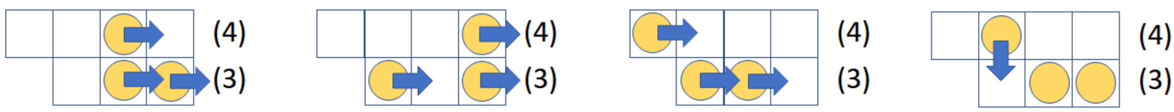
4.3 Chute des billes

Avec ce nouveau système, nous pouvons traduire ce que l'on cherche à démontrer :

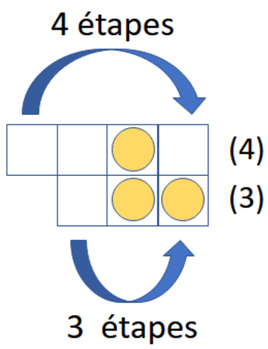


Comme on peut le voir sur ce schéma, les configurations du type "1 2 3 4 ... etc." correspondent à l'accumulation de toutes les billes au fond, c'est à dire que plus aucune bille ne peut tomber plus bas. La question devient donc : les billes vont-elles toutes tomber au plus bas, et ce, quelque soit la disposition de départ ? Pour cela, nous allons dans un premier temps chercher à savoir si la bille qu'on admet être la plus proche de tomber va forcément chuter si un trou se trouve sur la ligne inférieure.

Afin de mieux comprendre ce qui se passe, nous allons étudier une coupe de 2 lignes du boulier, en admettant que la bille de la ligne supérieure est la plus proche de tomber, et que donc aucune autre bille ne risque de chuter et de perturber ces 2 lignes.



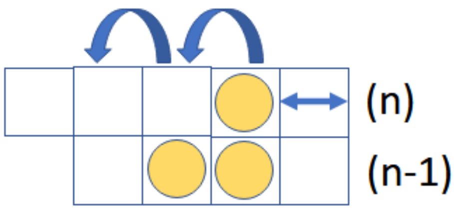
On peut voir dans l'exemple ci-dessus que la bille située dans la ligne supérieure finit par tomber au bout de quelques étapes. On observe que chaque ligne effectue en fait une séquence périodique d'une étape de moins pour la ligne supérieure :



On comprend donc qu'à chaque "tour" dans la ligne inférieure (ici 3 étapes), la ligne supérieure a une étape de retard supplémentaire. [4]

4.4 Trouver la bille la plus proche de tomber

Puisqu'on sait qu'à chaque "tour" de la ligne inférieure la ligne supérieure se décale d'un rang vers la gauche, on peut déduire le nombre d'étapes nécessaires pour que la bille soit au-dessus d'un trou. Le nombre de décalages vers la gauche à effectuer est représenté par les flèches courbées ici :



On trouve donc (avec r le nombre de décalages nécessaires et d la distance au "mur") [5] :

$$n \times (r-1) + d + 2.$$

À noter que l'on appelle distance au "mur" l'écart avec la dernière case de la ligne (flèche horizontale sur le schéma). On trouve cette formule car on compte $(n-1)$ tours de la ligne supérieure et qu'on ajoute $(d+2)$ pour compter jusqu'à l'étape où la bille qui va tomber se situe sur la deuxième case de sa ligne (soit le moment où elle se trouve au-dessus du vide).

Dans l'exemple du schéma ci-dessus, on est à la ligne $n = 5$, il y a 2 décalages nécessaires et la bille qui va tomber se situe à une case du "mur". Il faudra donc $5 \times (2-1) + 1 + 2 = 8$ étapes pour que la bille tombe. [6]

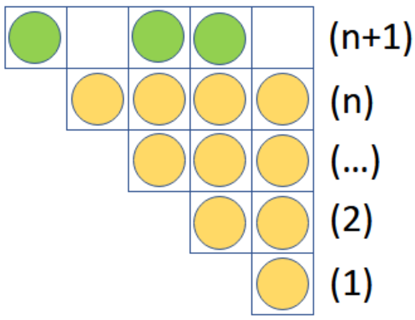
5 Conclusion

5.1 Démonstration de la conjecture

Nous avons donc montré que la bille la plus proche de tomber finira toujours par chuter et on est capable de trouver la bille la plus proche de tomber, on peut ainsi appliquer succcessivement ce raisonnement jusqu'à la chute de toutes les billes. Nous avons donc démontré que, quelle que soit la configuration initiale, si le nombre de pièces est un nombre triangulaire, on finira forcément par atteindre une configuration du type "1 2 3 4 ... etc".

5.2 Bonus : longueur de la boucle

Dans le cas où le nombre de billes n'est pas un nombre triangulaire, une fois la chute de toutes les billes achevée, il va rester un certain nombre de billes sur une ligne incomplète, ci-dessous représentées en vert. Ces billes vont donc effectuer une boucle infinie d'une certaine longueur, or cela correspond bien à la "longueur de la boucle" observée dans les exemples.



On peut donc déduire la longueur de la boucle en fonction du nombre triangulaire le plus proche inférieur au nombre de billes. En effet, si le plus proche inférieur est le n-ième nombre triangulaire, alors la ligne incomplète sera d'une longueur $(n+1)$, comme on peut le voir sur le schéma ci-dessus. On peut donc penser que la boucle sera d'une longueur de $(n+1)$.

Cependant, il existe des exceptions à cela. En effet, la longueur de la boucle est forcément égale à $(n+1)$ seulement si $(n+1)$ est un nombre premier. Dans le cas contraire, le motif des billes vertes (donc la configuration des pièces) peut se reproduire en moins d'étapes, car il peut exister des sous-motifs identiques. La longueur de la boucle est alors comprise entre 2 et $(n+1)$. [7]

6 Notes d'édition

[1] Ces essais organisent le nombre de pièce dans l'ordre croissant. La remarque qui justifie cette façon de procéder apparaît dans le paragraphe 2-2.
[2] La représentation avec le boulier est intéressante et pertinente mais il faut avoir à l'esprit, que la description du fonctionnement se fait sur des exemples et n'a pas (à ce niveau) de valeur générale : est-on sûr que quelque soit la configuration, ce fonctionnement met les nombres dans l'ordre croissant ?
[3] Le déplacement vers la droite de billes s'appuie lui aussi sur la représentation en pile mais les pièces les plus à droite sont celles du haut des piles, et cela quelque soit le nombre de pièces et de piles.
[4] La manipulation permet de bien se rendre compte de ce qui se passe et de formuler la conjecture du retard pris par la ligne supérieure. Mais est-ce valable quelque soit le nombre de lignes et la disposition des billes ?
[5] Une très belle formule mais qui nécessite de pratiquer un peu pour la comprendre. Serez vous capable de la démontrer ?
[6] Dans cet exemple, il y a 8 étapes : ce nombre d'étapes dépend-il de la manière de procéder ?
[7] Les explications sont convaincantes sur les exemples. Mais toutefois il manque la généralisation pour que ce soit considéré comme une démonstration.