Et la lumière fut !

Résumé :

Nous considérons ici des grilles rectangulaires d'ampoules, munies d'interrupteurs pour chaque ligne et chaque colonne d'ampoules ayant pour rôle de changer l'état de chaque ampoule, indépendamment, dans la rangée concernée. Nous montrons que pour de telles grilles initialement éteintes, il n'est pas possible d'allumer une seule ampoule par une combinaison d'interrupteurs, et que le minimum d'ampoules qu'il est possible d'allumer est alors égal à la plus petite valeur entre la longueur et la largeur de la grille.

Élèves du Lycée de la Mer (Gujan-Mestras) : Jordan CHAGOT, Steven GALLY et Alexandre LE BIAN (1ère STID2D SIN), François COURBIN et Léo DOURTHE (Tale SSI)

Étudiants de l'association Maths en Jeux, Université de Bordeaux : César BIHLER (Licence de Géologie, 3ème année, Université de Bordeaux) et Benjamin COQUILLAS (Elève-Ingénieur Electronicien 1ère année, ENSEIRB-MATMECA)

Encadrants : Marie-Line CHABANOL (Professeure Université de Bordeaux), Christine DELMAIRE (Enseignante Lycée de la Mer)

Chercheur : Éric SOPENA (Université de Bordeaux)

Énoncé du sujet

Considérons une grille a x b, à a colonnes et b lignes. Chaque case contient une ampoule qui peut être soit allumée, soit éteinte. La grille est équipée de $a + b$ interrupteurs, un par ligne et un par colonne. Lorsqu'on agit sur un interrupteur ligne, toutes les ampoules de la ligne correspondante changent d'état : les ampoules allumées s'éteignent et les ampoules éteintes s'allument ! Les interrupteurs de colonne ont exactement le même effet sur la colonne à laquelle ils sont associés.

Au départ, toutes les ampoules sont éteintes.

- Est-il possible, en agissant sur les interrupteurs, d'allumer une seule ampoule ?
- Si non, quel est le nombre minimal d'ampoules que l'on peut allumer (hormis 0) ?

Remarque sur un câblage électrique

Une table de vérité (1) pour l'état d'une ampoule en fonction de l'état des interrupteurs met en évidence une porte logique OU exclusif (XOR) (2). On peut donc réaliser un câblage de notre grille en associant une telle porte à chacune des ampoules de la grille avec pour entrée les deux interrupteurs qui la commandent. La réalisation pratique de ce câblage ne nous a pas semblée pertinente dans nos recherches, et ne sera pas utilisée dans la suite de cet exposé.

Allumer une ampoule

Une première constatation

Dans un premier temps, on peut noter qu'un interrupteur activé deux fois est équivalent à un interrupteur n'ayant pas été activé. On s'impose donc d'activer au maximum une fois chaque interrupteur. De plus, on observe aisément que l'ordre d'activation des interrupteurs n'influe pas sur le nombre d'ampoules allumées.

Démonstration du théorème : « Impossible d'allumer une seule ampoule par une combinaison d'interrupteurs »

On considère une grille de dimension a x b, où a représente le nombre de colonnes, b le nombre de lignes, $a > 1$ et $b > 1$, ne comportant qu'une seule ampoule allumée (3). En cherchant à l'éteindre, on doit activer un des deux interrupteurs ayant action sur celle-ci. On choisit par exemple l'interrupteur ligne, ayant pour effet d'éteindre l'ampoule en question, et d'allumer les $a - 1$ ampoules restantes sur la ligne. Celles-ci devant être éteintes, on actionne alors les $a - 1$ interrupteurs colonne correspondants éteignant les ampoules précédentes, et allumant les ampoules n'étant pas sur la ligne et la colonne de l'ampoule initiale. Pour éteindre ces ampoules, on doit activer les $b - 1$ interrupteurs ligne restants. Ne restent allumées que les ampoules de la colonne de l'ampoule initiale, sauf cette dernière. L'unique manière de les éteindre consiste à activer le dernier interrupteur colonne, ayant pour effet de rallumer l'ampoule initiale. Ainsi, si on ne peut pas éteindre une grille ayant initialement une ampoule allumée, alors, de façon symétrique, il est impossible de passer d'une grille entièrement éteinte à une grille comportant une seule ampoule allumée. (4)

Recherche d’un minimum

Nous avons vu précédemment qu’il est impossible d’obtenir une seule ampoule allumée à partir d’une grille éteinte dont toutes les dimensions sont supérieures ou égales à 2. Nous allons donc chercher quel est le nombre minimum d’ampoules allumables sur une grille éteinte aux dimensions *a* x *b*.

Définition d’une fonction

On définit la fonction *f* (Figure 1) par : [(5)](#)

$$f(x,y) = ax + by - 2xy \qquad \textbf{(1)}$$

Nombre d’ampoules allumées par les interrupteurs ligne

Nombre d’ampoules allumées par les interrupteurs colonne

Nombre d’ampoules éteintes par intersection

En effet, le produit xy correspond au nombre d’ampoules aux intersections entre ligne et colonne. Or ces ampoules, sollicitées deux fois, doivent donc compter comme des ampoules éteintes. Ce nombre doit être soustrait deux fois car il est à la fois compté dans le terme « ax » et dans le terme « by ».

f(x,y) : Nombre d’ampoules allumées
x : Nombre d’interrupteurs ligne activés
y : Nombre d’interrupteurs colonne activés

a : Nombre de colonnes
b : Nombre de lignes

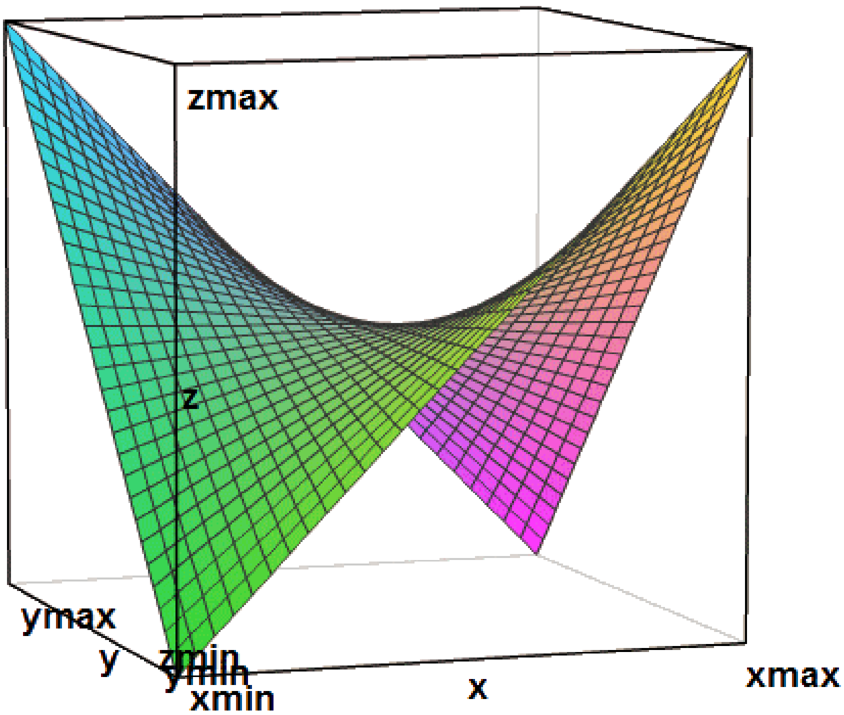


Figure 1 : Représentation graphique de *f*. L'axe z représente la valeur de *f(x,y)*. Les paramètres ont été fixés à *a* = *b* = 30 pour *x* et *y* variant de 0 à 30.

Changement de variable

Graphiquement, on observe une figure dite en selle de cheval. Pour en faciliter l'étude, on pose :

$X = x + y \in \mathbb{N}$
$Y = x - y \in \mathbb{N}$

On cherche alors à exprimer *f* en fonction de *X* et *Y* :

$$\begin{cases} X = x + y \\ Y = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{X+Y}{2} \\ y = \frac{X-Y}{2} \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

En combinant **(1)** et **(2)**, on obtient :

$$f(X,Y) = a\frac{X+Y}{2} + b\frac{X-Y}{2} - 2\frac{(X+Y)}{2}\frac{(X-Y)}{2} = a\frac{X+Y}{2} + b\frac{X-Y}{2} - \frac{X^2-Y^2}{2} \qquad \textbf{(3)}$$

Étude partielle de la fonction

On s'intéresse à la variation de la fonction selon *X* en fixant la variable *Y*. Pour cela, on calcule la dérivée partielle (6) de *f* par rapport à *X* (en considérant *Y* comme une constante) :

$$\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - X \qquad \textbf{(4)}$$

$$\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X} > 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} > X \qquad \textbf{(5)}$$

Grâce à ces nouvelles variables *X* et *Y*, on arrive à obtenir une dérivée partielle ne dépendant que de l'une des deux variables (*X*) en équation **(4)**. On dresse alors un tableau de variations :

X	0	$\frac{a+b}{2}$	$a + b$
$\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X}$	+		-
Variations de f	0 ↗		↘ 0

Cette variation met à la fois en valeur la symétrie du problème autour du point $X = \frac{a+b}{2}$ et la stricte croissance sur l'intervalle d'étude réduit : $X \in [0\,;\frac{a+b}{2}]$.

Nous cherchons à identifier sur cet intervalle le premier minimum X_{min} de *f* après celui atteint en *X = 0*.

$X_{min} \in \mathbb{N} \Rightarrow X_{min} = x_{min} + y_{min} = 1$ **(6)**

Or les seules valeurs des entiers naturels x_{min} et y_{min} dont la somme vaut 1 sont « 0 et 1 » ou « 1 et 0 ».

Remplaçons-les dans **(1)** :

$$f(x_{min}, y_{min}) = a.x_{min} + b.y_{min} - 2.x_{min}.y_{min} = \begin{cases} a + 0 - 0 = a \\ 0 + b - 0 = b \end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

Autrement dit, les minima de *f(X,Y)* sont observés pour les minima et maxima de *X*. On s'intéresse aux valeurs de *f(X,Y)* strictement supérieures à 0 (on cherche à allumer des ampoules). On rappelle que *x* et *y* sont des nombres entiers naturels sur les ensembles [0 ; *b*] et [0 ; *a*] respectivement. Or *X* = *x* + *y*, le minimum de *X* supérieur à 0 est alors 1, avec (*a* , *b*) = (0 , 1) ou (*a* , *b*) = (1 , 0). On ne considère que le minimum de *X*, par symétrie on obtiendrait pour maximum *X* = *a* + *b* − 1 qui correspond à la même configuration de grille que *X* = 1. Les minima d'ampoules allumées sont donc *f(x,y)* = *a* ou *f(x,y)* = *b* pour les valeurs de *x* et *y* (1 , 0) ou (0 , 1). **(7)**

Résultat mis en évidence :

Le nombre minimum d'ampoules qu'il est possible d'allumer sur une grille éteinte correspond à la plus petite dimension de la grille, qu'il est possible d'allumer avec un interrupteur.

Complément et variantes

Dans cette partie, nous aborderons un complément de recherche au problème initial ainsi que quelques variantes de ce dernier.

Complément : Quantification des grilles non connectées

Nombre de configurations d'ampoules possibles

Chaque ampoule peut prendre deux états, éteinte ou allumée. Pour une grille de dimension *m* x *n*, on en déduit que :

Nombre de configurations d'ampoules possibles = $2^{m \times n}$ (8)

Conjecture sur le nombre de configurations accessibles à partir d'une grille donnée

Si on part d'une grille donnée (éteinte par exemple), chaque interrupteur peut prendre deux états, allumé ou éteint. On observe cependant que chaque configuration est accessible pour deux combinaisons d'interrupteurs « complémentaires ». Si on souhaite allumer la ligne du haut, on peut soit activer le premier interrupteur ligne, soit tous les autres interrupteurs. On en déduit une conjecture de l'expression du nombre recherché (sans prise en compte des symétries) :

Nombre de configurations accessibles à partir d'une grille donnée = 2^{n+m-1} (9)

Conjecture sur le nombre de grilles non connectées entre elles

En supposant vraies les expressions précédentes, on peut s'intéresser au rapport du nombre de configurations possibles par le nombre de configurations atteignables à partir d'une grille donnée, on met alors en évidence le nombre de grilles non connectées entre elles :

Nombre de grilles non connectées entre elles = $\frac{2^{m\times n}}{2^{m+n-1}} = 2^{(m\times n)-(m+n-1)}$ (10)

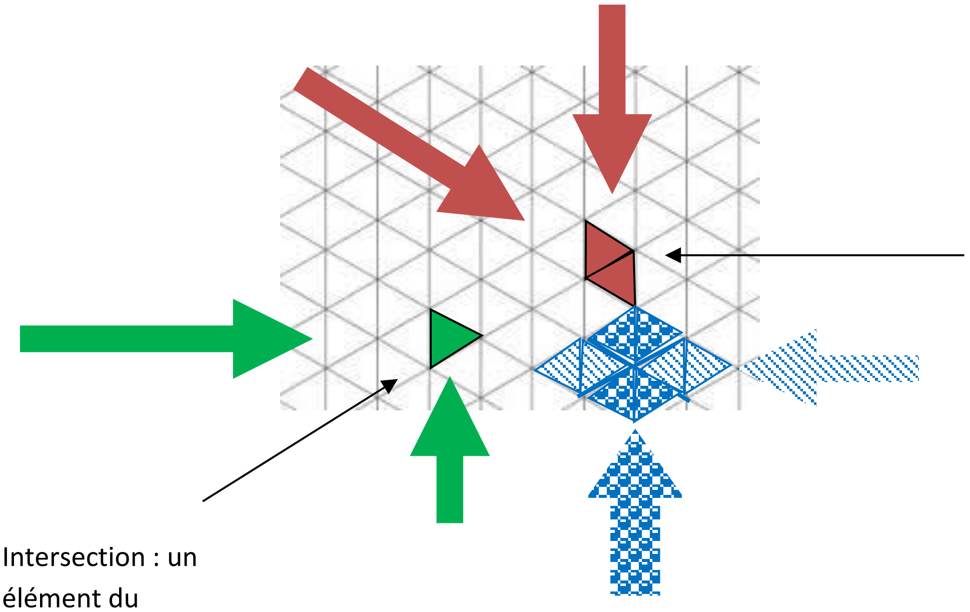
Cas particulier d'une grille carrée, nombre de grilles non connectées : $\frac{2^{n^2}}{2^{2n-1}} = 2^{n^2-2n+1}$ (11)

Variante : Différents pavages du plan / Changement de géométrie

Un pavage régulier par des ampoules « carrées » a été considéré jusqu'à présent. Voici quelques observations sur des pavages avec des triangles et des hexagones.

Notons que l'étude est alors conditionnée par le choix d'un système d'axes donnant les dimensions du plan, et régissant notamment la nature de l'intersection.

Pavage avec des triangles équilatéraux



Intersection : deux éléments du pavage.

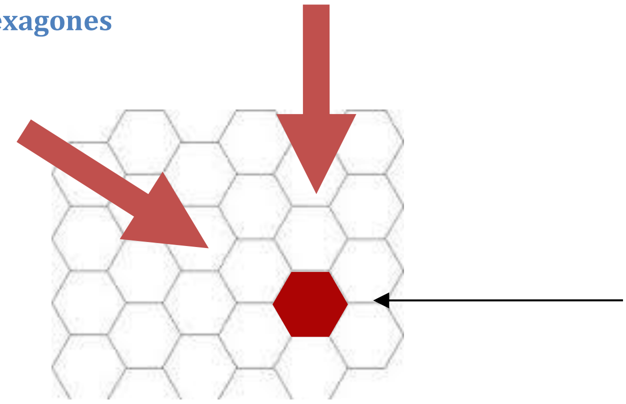
Intersection : un élément du pavage.

De manière intuitive, nous pouvons faire les observations suivantes, que nous ne chercherons pas à démontrer :

- La configuration verte revient à considérer la configuration du jeu initial par le biais de quelques déformations du plan.
- La configuration rouge lui est similaire pour une intersection de valeur 2.
- La configuration bleue permet une représentation du plan en deux plateaux d'ampoules distincts (à bulles et à rayures). Ces deux plateaux ne se recoupent pas, mais chacun d'eux fonctionne comme une grille carrée à intersections doubles.

En conclusion, il s'agirait d'ajuster nos calculs pour une intersection donnée, et d'en déduire les résultats avec la même méthode.

Pavage avec des hexagones



Intersection : un élément du pavage.

À nouveau, nous remarquerons simplement que nous pouvons ramener cette configuration à une configuration connue par une transformation du plan.

Variante : Différents états d'une ampoule – Ampoules multicolores

Cette variante consiste à modifier le nombre d'états d'une ampoule et à observer les modifications engendrées dans notre système. Nous avons étudié le cas où une ampoule peut prendre 3 états, par exemple bleu (B) puis rouge (R) puis vert (V). Chaque action d'un interrupteur fait passer une ampoule à l'état suivant.

Nous remarquons qu'une seule ampoule peut trivialement se retrouver dans un état distinct de toutes les autres en sollicitant un interrupteur de chaque dimension. Le nombre minimum d'ampoules pour les états bleu, rouge et vert vaut alors trivialement 1. (8)

Variante : Différentes actions d'un interrupteur – Des interrupteurs défectueux

Nous considérons ici une contrainte portée sur l'effet d'un interrupteur au regard des grilles « classiques » étudiées dans la partie principale de cet exposé.

Énoncé des contraintes

- L'action d'un interrupteur ligne (resp. colonne) active une ampoule de manière aléatoire dans chaque colonne (resp. ligne). Ce caractère « aléatoire » est fixe pour une grille donnée.
- Une activation de tous les interrupteurs ligne ou colonne provoque le changement d'état complet de la grille, de manière identique au problème initial explicité plus haut.

Conséquence majeure : l'activation d'un interrupteur ligne et d'un interrupteur colonne ne provoque plus l'allumage systématique d'un nombre d'ampoules calculable. L'étude portera donc sur des cas particuliers et une analyse statistique.

Remarque : Le problème initial devient donc un cas particulier de cet énoncé.

Conjecture sur le nombre minimal d'ampoules (non nul) que nous pouvons allumer sur une grille éteinte de dimension *n* par *m* :

- **Si *n* et *m* sont différents et supérieurs à 2, on peut construire une configuration d'interrupteurs telle que le nombre minimum d'ampoules qu'on peut allumer vaut 1.**
- **Si *n* et *m* sont égaux et supérieurs à 2, on peut construire une combinaison d'interrupteurs telle que ce nombre minimum vaut 2, et qu'on ne peut pas obtenir 1.**

Preuve pour des grilles 3 x 4 et 4 x 4

Nous pouvons facilement identifier des cas triviaux de résolution sur des grilles 3 x 4 et 4 x 4.

- **Grille 3 x 4 :** une grille telle qu'un interrupteur colonne (taille 3) allume trois ampoules toutes trois sollicitées par un même interrupteur ligne (taille 4).
- **Grille 4 x 4 :** *Existence de la valeur minimum de 2 :* une grille telle qu'un interrupteur ligne et un interrupteur colonne ont trois ampoules en commun. *Idée de la démonstration du minimum :* Par l'absurde, si 1 était minimum pour une combinaison d'interrupteurs donnée, alors le nombre d'ampoules sollicitées au total (ce nombre s'incrémentant de 1 à chaque changement d'état d'une ampoule) serait égale à ***2 x (nombre d'ampoules allumées puis éteintes) + 1***, ce qui serait un nombre impair. Contradiction : Aucune combinaison de lignes et de colonnes ne permet d'effectuer un nombre impair de changements d'état.

Remerciements

Merci beaucoup à Marie-Line Chabanol et Christine Delmaire qui nous ont accompagnés cette année dans nos recherches et ont permis à notre groupe de participer au congrès cette année à nouveau. Merci également à Éric Sopena, le chercheur qui nous a proposé le sujet, et qui est venu pendant nos temps de réflexion pour discuter et nous aider à approfondir nos recherches. Merci encore à l'association Maths en Jeux d'avoir participé à l'organisation du transport et du logement pendant le congrès.

Enfin, un grand merci aux organisateurs bénévoles du congrès qui ont permis un bel événement de culture, de divulgation et de transfert de connaissances scientifiques mais aussi de création d'activités de recherche par le jeu, la collaboration et le travail d'équipe pour des jeunes écoliers, collégiens, lycéens et étudiants dans un esprit de découverte convivial.

Notes d'éditions :

(1) Une table des vérités est utilisées en logique pour comprendre les différentes comportements de conditions logiques. Par exemple, si nous avons deux conditions A et B et une condition vraie que si les deux autres sont vraies, la table de vérité est la suivante :

ET		A	
		Non	Oui
B	Non	Non	Non
	Oui	Non	Oui

Ou encore, si une condition est vraie si l'une ou l'autre est vraie alors la table de vérité est la suivante :

OU		A	
		Non	Oui
B	Non	Non	Oui
	Oui	Oui	Oui

Généralement les termes sont exprimés en 0 pour « non » et 1 pour « oui ».

(2) Le principe du « ou exclusif » est de dire qu'il faut que l'une des deux conditions soit vérifiée mais pas les deux. Sa table de vérité est donc :

OU exclusif		A	
		Non	Oui
B	Non	Non	Oui
	Oui	Oui	Non

(3) Le fait d'éteindre et d'allumer une ampoule jouant un rôle symétrique, les élèves partent de la solution et essayent de remonter à l'origine, à savoir toutes les ampoules éteintes. S'ils trouvent une configuration, il n'y aura plus qu'à remonter dans l'autre sens.

(4) En fait, les élèves ont juste montré que la procédure utilisée ne permettait pas d'obtenir la solution. Pour affirmer qu'aucune configuration ne le permet, il faudrait toutes les vérifier ou montrer que toutes les configurations reviendraient à faire cette méthode.

(5) Pour résoudre le problème, les élèves vont « plonger » celui-ci dans le cas imaginaire où nous pouvons avoir des « fractions » d'interrupteur (c'est-à-dire comme si les interrupteurs pouvaient être à demi-appuyer par exemple). Les outils mathématiques utilisés sont alors plus souples et il suffira de prendre un cas contraint à des réponses entières.

(6) Pour faire une dérivée partielle par rapport à X, il faut supposer que Y est une constante (comme si c'était un chiffre par exemple).

(7) Plus précisément, ils ont trouvé des minimas locaux, c'est-à-dire des valeurs qui sont les plus faibles lorsque nous regardons « autour d'elles ». De par sa définition, le minimum global est obligatoirement parmi les minimas locaux.

(8) Le comité d'édition regrette l'utilisation du terme « trivial ». En effet, si cela avait été réellement « trivial », il aurait préféré une démonstration afin que le lecteur qui ne trouverait pas la solution ne soit pas frustré de ne pas comprendre des éléments jugés « triviaux ».