Escalier de Kapla

Année 2018 – 2019

Marie PETIT, Romane BERTHELOT, Sihem BOUCHEHAT, Olivia KREMER,
élèves de seconde.

Encadrés par : Jildaz COUSIN, professeur de mathématiques

Établissement : Lycée Édouard Branly, Châtellerault

Chercheur : Lionel DUCOS, Université de Poitiers

<u>Présentation du sujet</u> :

On veut construire un escalier en posant des Kapla les un sur les autres, sans utiliser de colle, les planchettes tenant les unes sur les autres uniquement par la force de leur poids. Quelle longueur aura le plus grand escalier que vous pourrez construire ? De combien de marches sera-t-il formé ?

<u>Annonce des conjectures et résultats obtenus</u> :

Nous avons conjecturé que, à condition de bien disposer les Kapla, l'escalier peut atteindre n'importe quelle longueur.

<u>DEBUT DE L'ARTICLE</u>

1. Essais avec des marches régulières

1. Écarts de 1 cm

i. A la main

Nous avons en premier lieu expérimenté avec de vrais Kapla. Le problème de cette méthode est qu'elle n'est pas précise et prend du temps.

Nos Kapla ont une longueur de 10 cm et une hauteur de 1 cm.

Illustration 1: Escalier avec des marches régulières de 1 cm

ii. Modélisation avec Geogebra

Nous avons modélisé l'escalier sur le logiciel Geogebra.

Nous avons commencé par construire un premier Kapla qui sera le socle de l'escalier : on le note Kapla 0.

Nous avons construit 11 Kapla sur le socle avec un écart régulier de 1 centimètre : ils forment l'escalier.

Pour savoir si l'escalier tient en équilibre sur le socle, il faut déterminer son centre de gravité : si le centre de gravité de l'escalier dépasse le bout du socle, l'escalier va tomber.

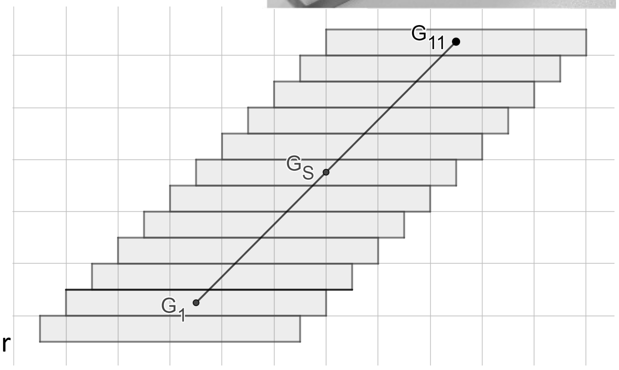

Illustration 2: Escalier avec des marches régulières de 1 cm

Nous avons pris les centres de gravité de chacun des 11 Kapla.

Propriété : si les écarts sont réguliers alors les centres de gravité sont alignés.

G_1 est le centre de gravité de notre premier Kapla.
G_{11} est le centre de gravité de notre onzième Kapla.
G_n est le centre de gravité du n-ième Kapla.
G_S est le centre de gravité de notre escalier : c'est le milieu de $[G_1 G_{11}]$
Ici, le centre de gravité de l'escalier G_S dépasse le socle donc l'escalier tombe.
Si le centre de gravité de l'escalier a une abscisse inférieure ou égale à 10, alors l'escalier tient en équilibre : on peut donc mettre au maximum 9 Kapla sur le socle.
L'escalier progresse au maximum de 9 cm.

iii. Modélisation avec un tableur

On peut réaliser un tableau donnant l'abscisse du centre de gravité de l'escalier en fonction du nombre n de Kapla :

Kapla	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Abscisse G_n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Abscisse G_S structure	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5
				$\frac{6+9}{2}$						Chute !

Propriété : si les marches sont régulières alors pour un escalier de n Kapla, on a :

$$G_S = \frac{G_1 + G_n}{2}$$

La modélisation sur tableur donne le tableau de l'illustration 3.

Le pont progresse au maximum de $9 \times 1 = 9$ cm.
On retrouve le résultat obtenu sur Geogebra.

	Gauche	Milieu	Droit	Centre de gravité	Chute ?
0	0	5	10		
1	1	6	11	6	pas chute
2	2	7	12	6,5	pas chute
3	3	8	13	7	pas chute
4	4	9	14	7,5	pas chute
5	5	10	15	8	pas chute
6	6	11	16	8,5	pas chute
7	7	12	17	9	pas chute
8	8	13	18	9,5	pas chute
9	9	14	19	10	pas chute
10	10	15	20	10,5	chute
11	11	16	21	11	chute
12	12	17	22	11,5	chute
13	13	18	23	12	chute
14	14	19	24	12,5	chute
15	15	20	25	13	chute

Illustration 3: Marches régulières de 1 cm sur tableur

2. Écarts de 2 cm

Grâce au tableur, nous avons pu faire varier l'écart entre les marches.

	Gauche	Milieu	Droit	Centre de gravité	Chute ?
0	0	5	10		
1	2	7	12	7	pas chute
2	4	9	14	8	pas chute
3	6	11	16	9	pas chute
4	8	13	18	10	pas chute
5	10	15	20	11	chute
6	12	17	22	12	chute
7	14	19	24	13	chute

Illustration 4: Marche avec un écart régulier de 2 cm

L'escalier progresse au maximum de 4 Kapla, ce qui fait : $4\times 2=8$ cm.

On peut retrouver ce résultat par un calcul :

Abscisse de G_1 : $x_{G_1}=5+2=7$

Abscisse de G_n : $x_{G_n}=5+2n$

$$x_{G_S}=\frac{x_{G_1}+x_{G_n}}{2}=\frac{7+5+2n}{2}=\frac{12+2n}{2}=6+n$$

L'escalier tombe si, et seulement si : $x_{G_S}>10$

équivaut à $6+n>10$

équivaut à $n>10-6$

équivaut à $n>4$

L'escalier tombe au 5ème Kapla.

Pour des marches régulières de 2 cm, l'escalier progresse au maximum de 8 cm.

3. *Généralisation*

On peut généraliser l'étude précédente en remplaçant l'écart de 2 cm par par un écart noté e :

$$x_{G_1}=5+e$$

$$x_{G_n}=5+ne$$

$$x_{G_S}=\frac{x_{G_1}+x_{G_n}}{2}=\frac{5+e+5+ne}{2}=\frac{10+(n+1)e}{2}=5+\frac{(n+1)e}{2}$$

L'escalier tombe si et seulement si : $x_{G_S}>10$

équivaut à $\frac{(n+1)e}{2}>5$

équivaut à $ne+e>10$

équivaut à $ne>10-e$

équivaut à $n>\frac{10}{e}-1$

On obtient le tableau :

Écart en cm	1	2	3	4	5	6
Nombre maximum de Kapla	9	4	2	1	1	0
Progression maximale en cm	9	8	6	4	5	0

Ce n'est donc pas intéressant d'augmenter l'écart entre les marches. Nous avons donc chercher à le diminuer.

Écart en cm	0,5	0,1	0,01
Nombre maximum de Kapla	19	99	999
Progression maximale en cm	9,5	9,9	9,99

On a observé que plus l'écart est petit plus la progression maximale se rapproche de 10 cm.

4. Conclusion

Avec des marches régulières, la progression maximale peut se rapprocher de 10 cm lorsque les écarts sont petits, mais on ne peut pas atteindre 10 cm.

2. Marches irrégulières

1. Centre de gravité de l'escalier

Comment déterminer le centre de gravité de plusieurs Kaplas qui ne sont pas alignés ?
Pour résoudre ce problème, nous avons réalisé des expériences en réalisant des équilibres à partir de Kapla.

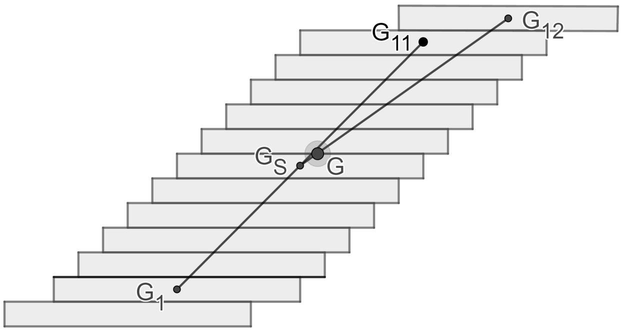

Illustration 5: Comment déterminer le centre de gravité ?

On pose sur le socle une structure de n Kapla dont on connait le centre de gravité G_S . (sur l'image, nous avons pris n Kapla avec des marches régulières mais ce n'est pas nécessaire tant que le centre de gravité est connu).

Un $(n+1)$ -ième kapla est posé sur l'escalier. Son centre de gravité est G_{n+1} .

Conjecture :
Le centre de gravité de l'escalier est sur le segment $[G_S G_{n+1}]$ et on a : $G G_{n+1}=nGG_S$

Les résultats obtenus à partir de constructions réalisées à la main nous ont semblé cohérents avec cette conjecture.

2. Tests

Nous avons testé différentes configurations

- avec des écarts alternés entre nos marches: 1 cm, 2 cm.
- avec des écarts croissants: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm…
- avec écarts décroissants: 5 cm, 4 cm, 3 cm…

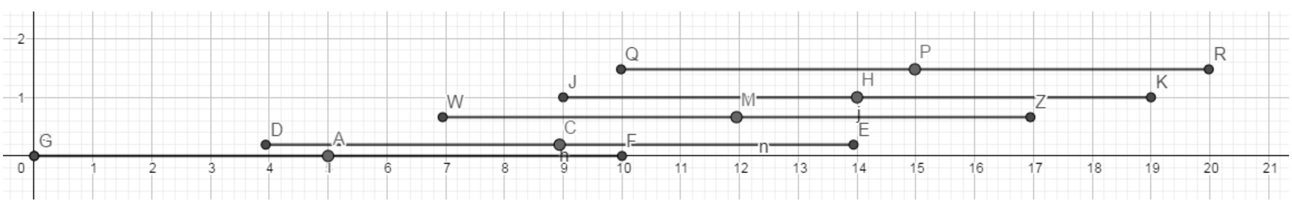
Illustration 6: Écarts décroissants sur Geogebra

Nous avons comparé les différents cas en les modélisant à l'aide du tableur.

	Gauche	Milieu	Droite	Centre de gravité	Chute ?
0	0	5	10		
1	1	6	11	6,00	pas chute
2	3	8	13	7,00	pas chute
3	6	11	16	8,33	pas chute
4	10	15	20	10,00	pas chute
5	15	20	25	12,00	chute
6	21	26	31	14,33	chute
7	28	33	38	17,00	chute
8	36	41	46	20,00	chute

Illustration 7: Écarts croissants

	Gauche	Milieu	Droite	Centre de gravité	Chute ?
0	0	5	10		
1	2	7	12	7,00	pas chute
2	3	8	13	7,50	pas chute
3	5	10	15	8,33	pas chute
4	6	11	16	9,00	pas chute
5	8	13	18	9,80	pas chute
6	9	14	19	10,50	chute

Illustration 8: Écarts alternés

	Gauche	Milieu	Droite	Centre de gravité	Chute ?
0	0	5	10		
1	5	10	15	10,00	pas chute
2	9	14	19	12,00	chute
3	12	17	22	13,67	chute
4	14	19	24	15,00	chute
5	15	20	25	16,00	chute

Illustration 9: Écarts décroissants

Le meilleur résultat a été obtenu avec des écarts croissants : la progression est de 10 cm.

Il semble donc qu'il est plus intéressant d'avoir des écarts croissants.

3. En ajoutant par dessous

Au lieu d'ajouter les Kapla les uns par dessus les autres, nous avons fait l'inverse : ajouter les Kapla par dessous. De plus, nous avons fait en sorte que l'extrémité de chaque Kapla que l'on ajoute dessous soit aligné avec le centre de gravité des Kapla déjà placés.

On prend un premier Kapla : K_1

	Gauche	Milieu	Droite
1	-10,00	-5,00	0,00

Illustration 10: Kapla 1 : abscisses des points

On ajoute un Kapla dessous K_2 . Pour le placer de façon optimale, nous avons mis le centre de gravité de $K_{1,}$ au dessus de l'extrémité droite de K_2 . Ainsi théoriquement l'escalier ne tombe pas, mais la progression est optimale avec 2 Kapla.

	Gauche	Milieu	Droite	CG des n Kapla Du dessus
1	-10,00	-5,00	0,00	-5,00
2	-15,00	-10,00	-5,00	-7,50

Illustration 11: Kapla 1 et 2 : abscisses des points

On ajoute un Kapla dessous K_3 . Le centre de gravité des Kapla 1 et 2 étant à l'abscisse $-7{,}5$, on place l'extrémité droite de K_3 à l'abscisse $-7{,}5$.

	Gauche	Milieu	Droite	CG des n Kapla Du dessus
1	-10,00	-5,00	0,00	-5,00
2	-15,00	-10,00	-5,00	-7,50
3	-17,50	-12,50	-7,50	-9,17

Illustration 12: 3 Kapla

Nous avons calculé l'abscisse du centre de gravité à l'aide de la formule suivante :

SOMME =(E3*A3+C4)/A4

	A	B	C	D	E
1		Gauche	Milieu	Droite	CG des n Kapla Du dessus
2	1	-10,00	-5,00	0,00	-5,00
3	2	-15,00	-10,00	-5,00	-7,50
4	3	-17,50	-12,50	-7,50	=(E3*A3+C4)/A4

Illustration 13: Calcul de l'abscisse du centre de gravité

Nous avons utilisé la conjecture : nous devons utiliser l'abscisse du centre de gravité des deux Kapla au dessus du Kapla 3, et la multiplier par 2 (car il y a deux Kapla au dessus), ajouter l'abscisse du centre de gravité du Kapla 3 et diviser par le nombre de Kapla au total.

En poursuivant ce procédé, nous avons obtenu le tableau suivant :

	Gauche	Milieu	Droite	CG des n Kapla Du dessus	Avancée
1	-10,00	-5,00	0,00	-5,00	5,00
2	-15,00	-10,00	-5,00	-7,50	7,50
3	-17,50	-12,50	-7,50	-9,17	9,17
4	-19,17	-14,17	-9,17	-10,42	10,42
5	-20,42	-15,42	-10,42	-11,42	11,42
6	-21,42	-16,42	-11,42	-12,25	12,25
7	-22,25	-17,25	-12,25	-12,96	12,96
8	-22,96	-17,96	-12,96	-13,59	13,59
9	-23,59	-18,59	-13,59	-14,14	14,14
10	-24,14	-19,14	-14,14	-14,64	14,64
11	-24,64	-19,64	-14,64	-15,10	15,10

Illustration 14: En ajoutant par dessous

On s'est rendu compte qu'à chaque étape on gagnait une avancée de 5 sur le nombre de Kapla soit 5/2 , 5/3, 5/4, etc.

L'avancée de l'escalier pour n Kapla s'obtient par le calcul :

$$5+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}+\frac{5}{5}+\frac{5}{6}+\frac{5}{7}+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{5}{n} \quad (1)$$

D'après le tableur, on obtient :

- Pour atteindre 10 cm, il faut 5 Kapla
- Pour atteindre 20 cm, il faut 32 Kapla

- Pour atteindre 30 cm, il faut 228 Kapla
- Pour atteindre 50 cm, il faut 12367 Kapla. La hauteur de l’escalier serait de plus de 123 m !

	Gauche	Milieu	Droite	CG des n Kapla Du dessus	Avancée
12363	-59,998193	-54,998193	-49,998193	-49,998598	49,998598
12364	-59,998598	-54,998598	-49,998598	-49,999002	49,999002
12365	-59,999002	-54,999002	-49,999002	-49,999406	49,999406
12366	-59,999406	-54,999406	-49,999406	-49,999811	49,999811
12367	-59,999811	-54,999811	-49,999811	-50,000215	50,000215
12368	-60,000215	-55,000215	-50,000215	-50,000619	50,000619
12369	-60,000619	-55,000619	-50,000619	-50,001024	50,001024

Illustration 15: Progression de 50 cm

Conclusion

Il semblerait qu’on puisse faire un escalier en Kapla aussi long que l’on veut.

Mais pour le réaliser avec de vrais Kapla, il faudrait une très grande quantité de Kapla et une précision qu’on ne peut pas atteindre. Cependant, théoriquement, cet immense escalier est réalisable.

Note d’édition

(1) Lorsque n tend vers l'infini cette quantité tend vers l'infini, ce qui justifie la conjecture des auteurs selon laquelle en théorie l'escalier pourra avoir une longueur aussi grande que l'on veut. Cette quantité est 5 fois la somme partielle de la série dite harmonique ; dire qu'elle tend vers l'infini quand n tend vers l'infini c'est dire que la série harmonique diverge. Pour montrer que 1+1/2+...+1/n tend vers l'infini on peut raisonner par l'absurde : comme la suite est croissante, si ce n'était pas le cas elle tendrait vers une limite S ; mais alors la même quantité pour l'indice 2n, soit 1+1/2+...+1/(2n) tendrait aussi vers S et donc la différence 1/(n+1)+...+1/(2n) tendrait vers 0 ce qui est clairement absurde puisque cette dernière somme est composée de n termes tous plus grands que 1/(2n), et donc est plus grande que ½ .