Les empilements de sphères.

par ???
du
Collège Victor Hugo de Noisy le Grand

enseignants : Mme Brunstein et M. Pierre Lévy.

chercheur : M. Jean-Michel Kantor, mathématicien, Jussieu.

Nous avons recherché la manière de disposer le maximum de boules dans une boite quelconque.

Tout d'abord, savez-vous combien de boules au maximum il est possible de mettre autour d'une même boule ?

En faisant l'expérience avec des balles de ping-pong, il est facile de constater que l'on peut en placer douze.

Mais, est-ce le maximum ?

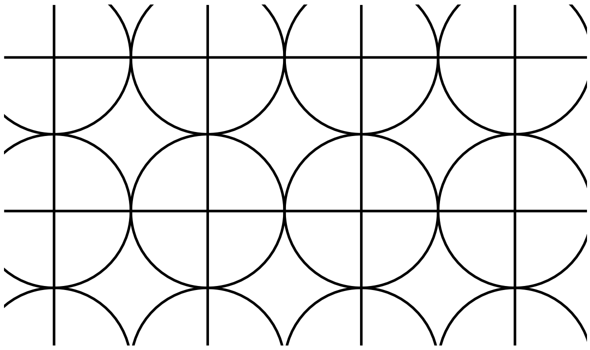
Ce problème est en fait très difficile à résoudre et c'est pour cela que nous sommes passés du travail dans l'espace (en trois dimensions) à celui dans le plan (deux dimensions).

Nous disposons des disques identiques sur une feuille de manière à recouvrir le plus de surface possible. On a commencé par les disposer au hasard. Il est évident que l'on peut facilement améliorer cette disposition en les rapprochant le plus possible les unes des autres.

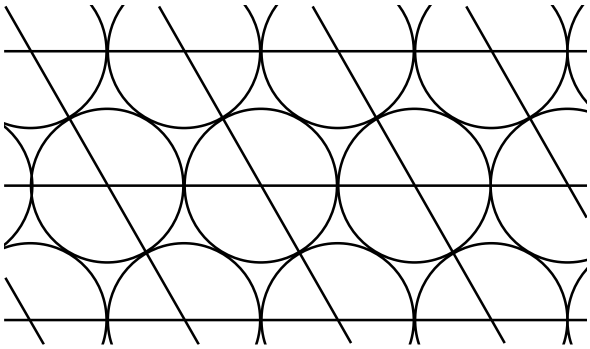
Après de multiples essais, nous avons retenu deux dispositions suivant des réseaux réguliers :
— un réseau dont les mailles sont des carrés.
— un réseau dont les mailles sont des losanges.

Loi de Adrien 2
A propos de la loi de Louise : elle ne fonctionne pas si on choisit un nombre qui se termine par 9 (parce que le chiffre des unités devient 0).

La loi de Louise est quand même juste, parce que 9 + 1 = 10, ce qui fait que après 9, on trouve 0.



Réseau à mailles carrées.



Réseau à mailles losanges.

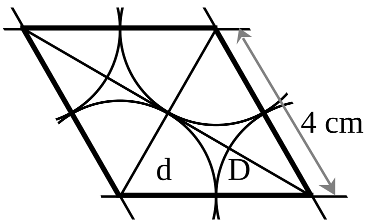
Nous avons remarqué qu'il était inutile de travailler sur la feuille entière alors que nous pouvions travailler sur un losange-unité ou sur un carré-unité. En effet, le nombre total de disques que nous utilisons pour recouvrir notre réseau est un multiple du nombre de disques contenu dans un carré ou un losange unité. Nous avons d'abord pensé à calculer la différence entre la surface occupée par les disques et la surface d'une maille unité, mais au cours du premier séminaire, lors de la discussion avec le chercheur M. Kantor nous nous sommes apercus que notre définition de la densité n' était pas correcte.

La densité est le rapport entre la surface occupée par les disques et la surface d'une maille-unité.

Etude du maillage losange.

Aire du disque unité

On considère un disque unité de rayon égal à 2 cm : $d_1 = \pi \times r^2 = 4\pi$ cm^2



unité

Les triang ... gles équilatéraux.

$\angle ABC = \angle ACD = 60°$

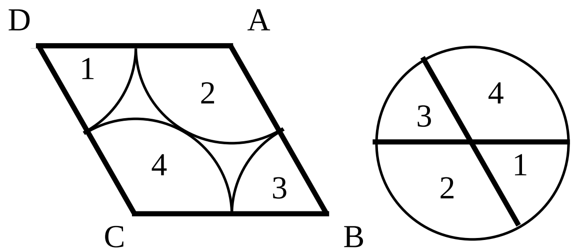
$\angle DAB = \angle BAC + \angle CAD$

$= 60° + 60° = 120°$

Dans un parallèlogramme, les angles opposés sont égaux : $\angle BCD = \angle BAD$

On a alors :

'.



x de

disc ... n ob-

tien

1ère étape : Calcul de la densité dans un losange unité.

$$\delta_1 = d_1 : l_1 = (4\pi):(8\sqrt{3}) = \pi:(2\sqrt{3})$$

2ème étape : On double les dimensions du losange. On obtient un losange qui contient lui-même quatre losanges unités donc quatre disques entiers.

Aire des disques :

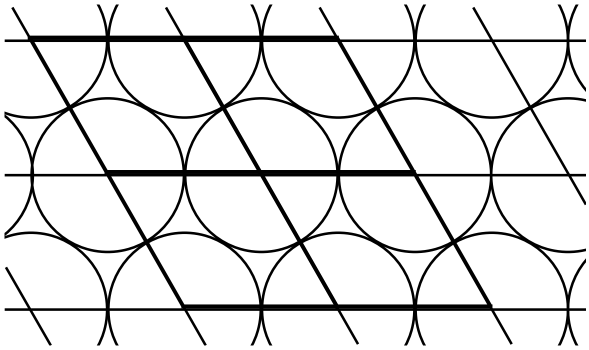
$$d_2 = 4\,d_1 = 4 \times 4\pi = 16\,\pi \text{ cm}^2$$

Aire du losange :

$$l_2 = 4\,l_1 = 4 \times 8\sqrt{3} = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Densité:

$$\delta_2 = d_2 : l_2 = (16\pi):(32\sqrt{3}) = \pi:(2\sqrt{3})$$



3ème étape :

On double les dimensions du losange de l'étape n°2. On obtient un losange qui contient lui-même 16 losanges unités donc 16 disques entiers.

Aire des disques :

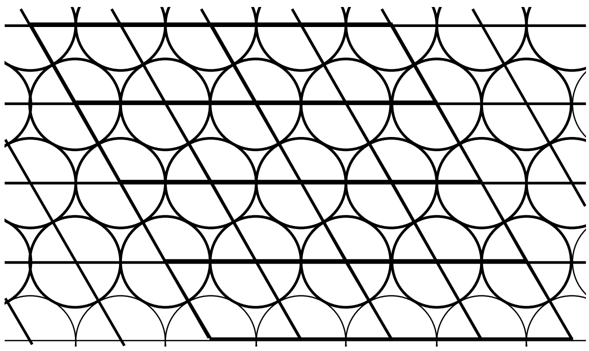
$$d_3 = 16\,d_1 = 16 \times 4\pi = 64\,\pi \text{ cm}^2$$

Aire du losange :

$$l_3 = 16\,l_1 = 16 \times 8\sqrt{3} = 128\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Densité:

$$\delta_3 = d_3 : l_3 = (64\pi):(128\sqrt{3}) = \pi:(2\sqrt{3})$$



On remarque :

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$$

Etude du maillage carré.

Aire du disque unité

On considère un disque unité de rayon égal à 2 cm : $d_1 = \pi \times r^2 = 4\pi$ cm²

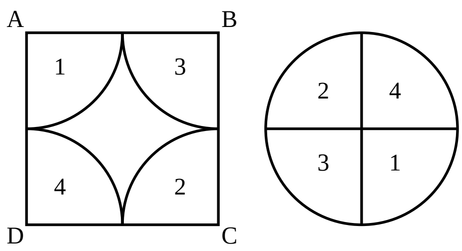
Aire du carré unité

On considère un carré de 4 cm de côté.

$c_1 = 4 \times 4 = 16$ cm²

Nombre de disques unités dans un carré unité

Dans le carré ABCD, on a :
$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB$
$= 4 \times 90° = 360°$

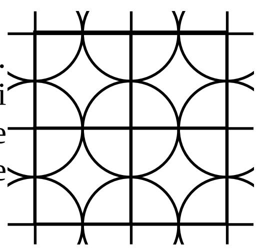


Si on assemble les quatre morceaux de disques inscrits dans ce carré unité, on obtiendra donc un disque

1ère étape : Calcul de la densité dans le carré unité.

$D_1 = d_1 : c_1 = 4\pi:16 = \pi:4$

2ème étape : On double les dimensions du carré unité. On obtient un carré qui contient lui-même quatre carrés unités donc quatre disques unités.



Aire des disques :

$d'_2 = 4d_1 = 4 \times 4\pi = 16\pi$ cm²

Aire des carrés :

$c_2 = 4\,c_1 = 4 \times 16 = 64$ cm²

Densité :

$D_2 = d'_2 : c_2 = (16\pi):64 = \pi:4$

Loi de Antoine 3

Si on multiplie un nombre pair par 6, le dernier chiffre du multiple est le dernier chiffre du nombre multiplié.

ex : 122 x 6 = 732

3ème étape : On triple les dimensions du carré unité. On obtient un carré qui contient lui-même 9 carrés unités donc 9 disques unités.

Aire des disques :

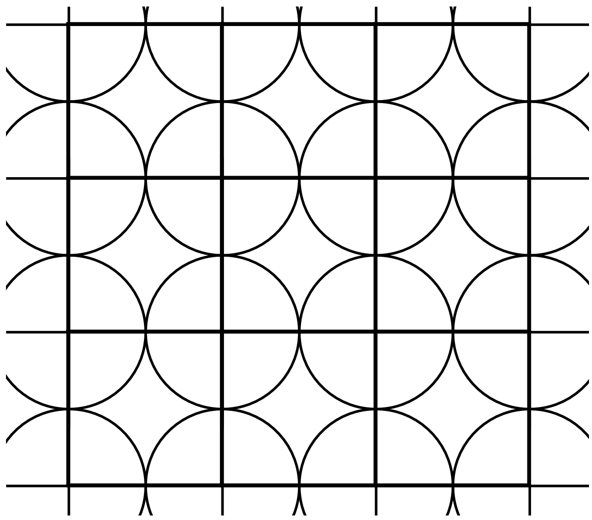
$d'_3 = 9d_1 = 9 \times 4\pi = 36\pi$ cm²

Aire des carrés :

$c_3 = 9\,c_1 = 9 \times 16 = 144$ cm²

Densité :

$D_3 = d'_3 : c_3 = (36\pi):144 = \pi:4$



On remarque :

$$D_1 = D_2 = D_3$$

Pour obtenir la densité d'un certain nombre de disques par rapport à une surface infinie il faut décomposer cette surface en n surfaces unités. On calcule la densité dans une de ces surfaces unités. La surface unité étant multipliée par n, la surface des disques unités est elle aussi multipliée par n. La densité est alors identique quelle que soit le nombre de surfaces unités inscrites dans la surface étudiée.

On a :

$$\Delta = \frac{\text{aire des disques unités} \times n}{\text{aire de la surface unitée} \times n}$$

$$= \frac{\text{aire des disques unités}}{\text{aire de la surface unitée}}$$

Densité dans un losange unité :

$$\delta = \pi:(2\sqrt{3}) \approx 90{,}6900\ \%$$

Densité dans un carré unité :

$$D = \pi:4 \approx 78{,}5398\ \%$$

On constate que $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Nous conjecturons que la densité dans un maillage losange est plus grande que celle dans un maillage carré.

Nous avons constaté que lors d'une déformation du maillage losange la densité baisse dans un losange unité puisque l'espace entre les disques unités augmente donc le losange unité contient moins d'un disque unité.

Nous conjecturons que le maillage losange sera toujours le maillage où la densité sera la plus grande.

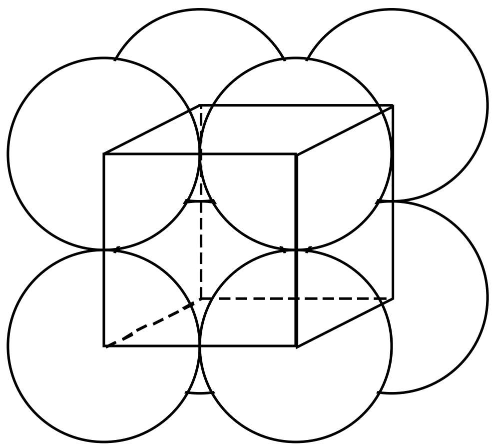
Après avoir étudié le problème dans le plan, c'est-à-dire en deux dimensions, nous pouvons transposer la démarche dans l'espace, en trois dimensions.

Les recherches faites dans le plan nous ont montré que c'est en disposant des disques selon un réseau à mailles losanges que l'on obtenait la plus grande densité. Nous allons nous inspirer de cette étude pour essayer de cerner le problème de l'empilement des sphères dans l'espace.

Il ne s'agit plus ici de carrés, de disques ou de losanges mais de cubes, de sphères et de prismes à base losange.

ETUDE D'UN RESEAU CUBIQUE

Dans l'espace, le problème analogue au cas des disques disposés selon un réseau à mailles carrées est celui des sphères centrées à chaque sommet d'un cube et tangentes deux à deux. Pour les calculs, nous avons pris des sphères de rayon 2 et des cubes d'arête 4. Nous avons calculé le volume d'un cube unité : 4 x 4 x 4 = 64.



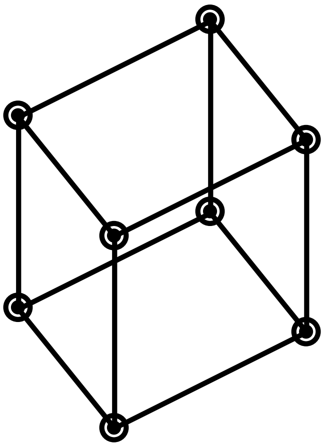
Nous avons admis, mais il est sans doute facile de le prouver, qu'un cube unité contient exactement une sphère.

Le volume de la sphère est :

$$\frac{4\,\pi\,r^3}{3} = \frac{4\,\pi \times 2^3}{3} = \frac{4\,\pi \times 8}{3} = \frac{32\,\pi}{3}$$

Pour évaluer la densité, nous avons divisé $32\pi/3$ par 64 soit 0,524 environ ($\pi/6$).

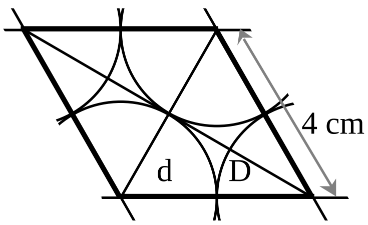
ETUDE D'UN RESEAU DONT LES MAILLES SONT DES PRISMES A BASE LOSANGE



Définition :

c'est une figure à base losange dont la "troisième arête" est perpendiculaire. Le centre de chacune des sphères est indiqué par un point.

risme,
tionné
cette
ice au
de Py-
nous
calcu-
gueur
le dia-



$\sqrt{12} = D/2$

$2\sqrt{3} = D/2$ c'est-à-dire $4\sqrt{3} = D$

L'aire d'un losange est (d x D)/2, soit :

$(4 \times 4\sqrt{3})/2 = 8\sqrt{3}$

Le volume du prisme :

$8\sqrt{3} \times 4 = 32\sqrt{3}$.

Là encore, nous avons admis que tout se passe comme s'il y avait exactement une sphère a l'intérieur du prisme, ce qu'il faudrait prouver. Le calcul de la densité s'effectue comme suit :

$$\frac{\text{volume de la sphère}}{\text{volume du prisme}} = \frac{32\,\pi / 3}{32\sqrt{3}} = \frac{32\,\pi}{32\sqrt{3} \times 3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

la densité est donc 0,605 environ.

<u>Loi de Antoine 4</u>

Avec trois chiffres, on peut écrire six nombres :
si ces trois chiffres sont A, B, C :

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

DANS LE TETRAEDRE

En manipulant des sphères, nous nous sommes aperçus que nous pouvions les empiler de manière plus compacte : en réseau cubique à faces centrées. La base est toujours un losange, mais pour la deuxième couche, les sphères s'encastrent dans les espaces vides. Cela correspond à la disposition des sphères tangentes, centrées aux sommets d'un tétraède régulier. Nous avons fait les calculs du volume du tétraède, mais n'ayant pas les formules pour savoir quelle fraction de sphère se trouvait dans celui-ci, puisque ce sont des formules étudiées à l'université, nous avons cherché la densité dans l'encyclopédie. La densité est alors de 0,740.

CONCLUSION

La meilleure densité est celle du tétraèdre, ensuite celle du prisme à base losange et enfin celle du cube. Pour l'instant, les chercheurs — dont nous — n'ont pas encore trouvé de configuration meilleure que celle du tétraèdre.

clichés Chantal Rousselin © Palais de la découverte.