Les élections

Ioana Ciceo, Maria Gyorgy-Spiridon

2017 - 2018

Introduction

Élèves : Ioana Ciceo, Maria Gyorgy-Spiridon (12e année)

Établissement : Colegiul Național "Emil Racoviță", Cluj - Napoca

Enseignante : Ariana Văcărețu

Chercheur : Lorand Parajdi, Universitatea Babeș - Bolyai, Cluj - Napoca

Table des matières

1 Présentation du sujet

Lors d'une élection, trois candidats se présentent - A, B et C. Les résultats des scrutins peuvent être représentés dans un triangle équilatéral. La distance du résultat R au côté du triangle opposé au sommet A est proportionnelle au pourcentage de voix pour le candidat A. Même chose pour B et C.

— Est-ce que cette représentation est toujours possible ?
— Comment se dessinent les zones où un candidat est gagnant, selon le mode de scrutin (majorité absolue ou relative) ?
— Comment représenter pour 4 candidats ?

2 Annonces des résultats obtenus

La représentation des résultats est toujours possible. Si exactement un candidat n'a pas de voix, le point R sera situé sur l'un des côtés. Si exactement deux candidats n'ont gagné aucun vote, le point R sera le sommet correspondant au gagnant.

Afin de représenter les résultats pour 4 candidats, il faut utiliser un tétraèdre régulier. Le résultat R est un point à l'intérieur du tétraèdre et la distance de R à la face opposée au sommet A est proportionnelle au pourcentage de votes pour le candidat A. La même chose est vraie pour les autres candidats. Cette représentation est aussi possible dans tous les cas.

3 Texte de l'article

3.1 Représentation pour 3 candidats

Nous prouverons qu'une représentation du résultat sous la forme du point R est toujours possible. Tout d'abord, nous allons prouver le lemme suivant.

Lemme 1. *La somme des distances d'un point situé à l'intérieur d'un triangle équilatéral aux trois côtés est constante.*

Preuve. Soit $\triangle ABC$ un triangle équilatéral et R un point situé à l'intérieur de ce triangle. Soient h_a, h_b et h_c les distances de R aux côtés BC, AC et AB respectivement. Soit l la longueur d'un côté de $\triangle ABC$. Alors, nous avons

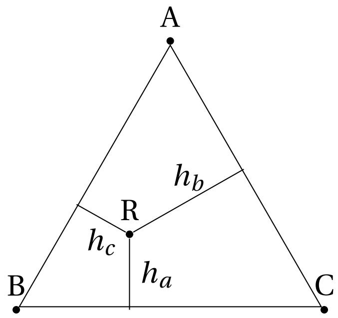
$$A_{BRC} = \frac{BC \cdot h_a}{2}$$
$$A_{ARC} = \frac{AC \cdot h_b}{2}$$
$$A_{ARB} = \frac{AB \cdot h_c}{2}$$

En ajoutant les trois équations, nous obtenons

$$A_{ABC} = \frac{l}{2} \cdot (h_a + h_b + h_c)$$

Comme la surface du triangle et la longueur du côté sont constantes, cela signifie que la somme des distances de R aux côtés est aussi constante.

Remarque. *Notez que nous pouvons calculer la somme* $h_a + h_b + h_c = l\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Nous appellerons cette somme* S [1] .



Proposition 1. *Il existe un point R à l'intérieur ou sur les côtés d'un triangle équilatéral tel que les distances de R aux côtés du triangle soient proportionnelles aux pourcentages de votes pour les 3 candidats.*

Preuve. Soient P_A, P_B, $P_C \in [0,1]$ les pourcentages pour les candidats A, B et C respectivement. On doit avoir $P_A + P_B + P_C = 1$.

On va construire le point R tel que

$$\frac{h_a}{P_A} = \frac{h_b}{P_B} = \frac{h_c}{P_C} = S$$

Il est possible de dessiner une droite parallèle à BC telle que la distance entre les deux droites soit $h_a = P_A \cdot S$ [2] . Par conséquent, si on met le point R sur cette ligne, nous sommes sûrs qu'il montre correctement le pourcentage de voix pour A.

Maintenant, nous devons faire glisser R sur la droite que nous avons tracée, mais en le gardant à l'intérieur du triangle $\triangle ABC$ ou sur ses côtés. Si $R \in AB$, cela signifie que $h_c = 0$ et donc $h_b = S - h_a$. De même pour $R \in AC$, et les deux cas satisfont les conditions. Lorsque R glisse entre ces deux positions, h_b va de sa valeur maximale réalisable, $S - h_a$, à sa valeur minimale, 0. Donc, pour tout P_B donné, on peut placer R tel que $h_b = P_B \cdot S$.

Sachant que S est constante pour toute position de R, alors $h_c = S - h_a - h_b$. Cela nous donne que $h_c = S - P_A \cdot S - P_B \cdot S$, donc $h_c = S(1 - P_A - P_B)$, et ainsi $h_c = S \cdot P_C$.

Par conséquent, nous avons construit un point R de manière que $h_a = P_A \cdot S$, $h_b = P_B \cdot S$ and $h_c = P_C \cdot S$. Cela montre que les distances entre R et les côtes du triangle sont effectivement proportionnelles aux pourcentages que les candidats ont obtenus et cela complète la preuve.

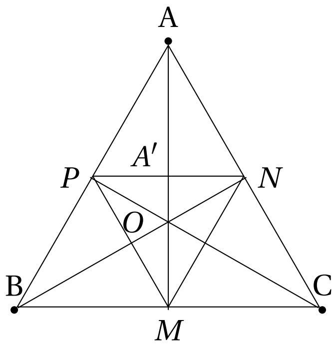
Remarque. *Notez que si un candidat n'a obtenu aucune voix, la distance de R au côté correspondant doit être 0, et alors R sera situé sur ce côté. En conséquence, si un candidat a obtenu tous les votes, R sera situé sur le sommet correspondant au candidat gagnant.*

3.2 Déterminer le gagnant

En utilisant la représentation ainsi construite, le vainqueur peut être déterminé facilement en le situant dans l'un des triangles considérés dans la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit $\triangle ABC$ un triangle équilateral et soit R le point qui représente les résultats des élections, comme décrit dans la tâche. Dessinons $M \in BC$, $N \in AC$ et $P \in AB$ tels que AM, BN et CP soient les trois hauteurs du triangle. Appelons leur intersection O. Le gagnant est déterminé de la manière suivante :*

- *si $R \in Int(\triangle APN)$, A gagne par majorité absolue*
- *si $R \in Int(\triangle BMP)$, B gagne par majorité absolue*
- *si $R \in Int(\triangle CNM)$, C gagne par majorité absolue*
- *si $R \in Int(\triangle PON)$, A gagne par majorité relative*
- *si $R \in Int(\triangle MOP)$, B gagne par majorité relative*
- *si $R \in Int(\triangle NOM)$, C gagne par majorité relative*



Preuve. Nous n'allons prouver que les deux énoncés concernant A; les preuves pour B et C sont similaires.

Rappelons que la somme des distances de R aux côtés du triangle est égale à $S = l\frac{\sqrt{3}}{2} = AM = BN = CP$. Notez également que si le pourcentage P_A de votes pour A est plus grand que 0.5 nous sommes sûrs qu'il est gagnant, avec majorité absolue.

Étant donné que $\triangle ABC$ est équilateral, ses hauteurs sont aussi ses médianes. D'où P se trouve au milieu de AB et N est au milieu de AC. Appelons $AM \cap PN = A'$. Parce que $\triangle APA'$ et $\triangle ABM$ sont semblables, PN coupe AM en deux parties égales [3], donc chaque point situé au-dessus de PN sera à une distance d'au moins $0.5 \cdot S$ de BC. Par conséquent, si $R \in \mathrm{Int}(\triangle APN)$, $h_a > 0.5 \cdot S$, donc $P_A > 0.5$ et A gagne par majorité absolue.

Nous sommes également sûrs que pour n'importe quel point en dessous de PN on a $h_a < 0.5$; alors si A s'avère être le gagnant, il fera une victoire par majorité relative.

Notez que, si un candidat a le pourcentage de ses votes de moins de $\frac{1}{3}$, nous pouvons être sûrs qu'il n'est pas gagnant.

Supposons maintenant que $R \in \mathrm{Int}(\triangle A'ON)$. Il est clair que dans ce cas, B n'est pas le gagnant, parce que R est situé au-dessus de la droite qui est parallèle à AC et passe par O.

Nous savons cela parce que BN est une médiane, $ON = \frac{1}{3} \cdot BN$ donc $h_b < \frac{1}{3} \cdot S$ et ainsi $P_B < \frac{1}{3}$. Comme $\triangle ABC$ est équilatéral, BN est aussi une bissectrice et ainsi chaque point situé sur BN est équidistant de AB et BC . En conséquence $R \in BN$ signifie que A et C se trouvent à l'égalité. Lorsque R se déplace vers le côté AB, la distance entre le point et AB diminue, alors le pourcentage du candidat C baisse [4]. Subséquemment, C n'est pas le gagnant et il nous reste le cas où A est le vainqueur par majorité relative. Il en va de même pour $R \in \mathrm{Int}\left(\triangle POA'\right)$; il va être en dessous de la ligne parallèle à AB qui va par O, donc C ne gagne pas. Et R sera plus proche de AC que les points équidistants de AC et BC, alors B n'est pas le candidat gagnant. Cela nous laisse encore avec A gagnant par majorité relative.

Remarque. *Notez que, si R ne se trouve pas à l'intérieur d'un des triangles mentionnés ci-dessus, mais plutôt sur leurs côtés ou sommets, il existe une égalité entre deux ou trois candidats* [5] *:*

- *si $R = O$, il y a égalité de voix entre les trois candidats*
- *si $R \in AM$, il y a égalité de voix entre les candidats B et C*
- *si $R \in BN$, il y a égalité de voix entre les candidats A et C*
- *si $R \in CP$, il y a égalité de voix entre les candidats A et B*

3.3 Représentation pour 4 candidats

De manière analogue à la représentation des résultats pour 3 candidats, nous représenterons les élections pour 4 candidats en utilisant un tétraèdre régulier. Pour faire cela, nous allons prouver le lemme suivant.

Lemme 2. *La somme des distances entre n'importe quel point R et les faces d'un tétraèdre régulier est constante.*

Preuve. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier et soit l la longueur de sa côté. Comme ses faces sont des triangles équilatéraux, nous avons que l'aire de chaque face est égale à $l^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Soit R un point situé à l'intérieur ou à la surface de ABCD et soient h_a, h_b, h_c et h_d les distances de R aux faces BCD, ACD, ABD et ABC respectivement. Nous considérons les volumes suivants [6] :

$$V_{RBCD} = \frac{A_{BCD} \cdot h_a}{3}$$
$$V_{RACD} = \frac{A_{ACD} \cdot h_b}{3}$$
$$V_{RABD} = \frac{A_{ABD} \cdot h_c}{3}$$
$$V_{RABC} = \frac{A_{ABC} \cdot h_d}{3}$$

En ajoutant les trois équations, nous obtenons

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} (h_a + h_b + h_c + h_d)$$

Comme le volume et l'aire du tétraèdre sont constantes, nous obtenons que la somme des distances de R aux faces de $ABCD$ est également constante.

Remarque. *Notez que la somme $h_a + h_b + h_c + h_d$ que nous appellerons S' est égale à $l\frac{\sqrt{6}}{3}$.*

Proposition 3. *Il est toujours possible de placer un point R a l'intérieur ou sur la surface d'un tétraèdre régulier ABCD tel que la distance entre R et la face opposé du sommet A est proportionnelle au pourcentage de voix obtenus par le candidat A et que la même chose est valable pour les autres candidats.*

Preuve. Soient $P_A, P_B, P_C, P_D \in [0,1]$ les pourcentages pour les candidats A, B, C et D respectivement. Il doit être vrai que $P_A + P_B + P_C + P_D = 1$.

Nous allons construire le point R tel que

$$\frac{h_a}{P_A} = \frac{h_b}{P_B} = \frac{h_c}{P_C} = \frac{h_d}{P_D} = S'$$

Il est possible de dessiner un plan parallèle à BCD tel que la distance entre les deux plans est $h_a = P_A \cdot S'$. Il est également possible de dessiner un plan parallèle à ACD tel que la distance entre les deux est $h_b = P_B \cdot S'$. L'intersection entre les deux plans que nous avons dessinés va être une droite sur laquelle nous voulons placer le point R [7].

Si nous plaçons R sur la face ABD, $h_c = 0$, sa valeur minimale. Si nous plaçons R sur la face ABC, h_c va atteindre sa valeur maximale, qui est $S' - h_a - h_b = S'(1 - P_A - P_B) = S'(P_C + P_D)$. Parce que en allant d'une position à l'autre, R prend toutes les autres valeurs entre ces deux et parce que $0 \le P_C \cdot S' \le S'(P_C + P_D)$ c'est possible de placer R tel que la distance à la face ABD est $h_c = P_C \cdot S'$. L'intersection des trois plans est maintenant un point. À présent, les distances aux faces opposées aux sommets A, B et C sont proportionnelles à P_A, P_B et P_C respectivement.

Nous savons que $h_d = S' - h_a - h_b - h_c = S'(1 - P_A - P_B - P_C) = S' \cdot P_D$, alors la distance de R à la face opposée de D est aussi proportionnelle au pourcentage de voix obtenus par le candidat D.

4 Notes d'édition

[1] Comme $A_{ABC} = l \cdot S/2$, S est la hauteur du triangle équilatéral, ce qu'on voit aussi dans le cas limite où le point P est situé à l'un des sommets ; la somme des distances reste égale à S lorsque le point est sur le bord du triangle (ceci est utilisé dans la suite).

[2] ... telle que la distance entre les deux droites soit $h_a = P_A \cdot S$ *et située du même côté que* A *par rapport à* BC. Comme $h_a \leq S$ et que S, la hauteur, est la distance de A à BC, cette droite coupe le triangle.

[3] En appliquant le théorème de Thalès, PN est parallèle à BC et coupe AM en son milieu.
On obtient ainsi que A gagne avec une majorité absolue non seulement si R est intérieur au triangle $\triangle APN$ mais aussi sur son bord, excepté sur le segment PN où il a exactement 50% des voix.

[4] On pouvait faire cette remarque tout de suite et plus précisément, si R se trouve au-dessus de BN, il est plus proche de AB que de BC et C a un pourcentage de voix inférieur à celui de A. De même pour CP avec B au lieu de C, et A a une majorité au moins relative si R est situé à la fois au-dessus de BN et de CP.

[5] En dehors des cas mentionnés ici, ceci n'est plus vrai : par exemple, si R se trouve sur le bord du triangle $\triangle APN$, il n'y a égalité entre deux candidats qu'aux points P, A' et N et, sauf en P et N, A gagne avec une majorité relative si R est sur PN ou absolue s'il est sur AP ou AN.

[6] On utilise ici la formule pour le calcul du volume d'un tétraèdre (et plus généralement d'une pyramide) : un tiers de l'aire de la base multipliée par la hauteur.
La hauteur du tétraèdre régulier est égale à $l\frac{\sqrt{6}}{3}$ (elle se cacule en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle $\triangle AMB$ où M est le centre de $\triangle ABC$), et le volume du tétraèdre régulier est $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot l^2\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l\frac{\sqrt{6}}{3} = l^3\frac{\sqrt{2}}{12}$.

[7] Il faut encore vérifier que cette droite coupe le tétraèdre. De même que pour le cas du triangle équilatéral, la somme S' est égale à la hauteur du tétraèdre régulier, et le plan parallèle à BCD à distance h_a (du côté de A) coupe le tétraèdre. L'intersection est un triangle $\triangle IJK$, réduit au point A si $h_a = S'$; si I est le sommet sur AB, ses distances à ABC et ABD étant nulles, sa distance à ACD est égale à $S' - h_a \geq h_b$. Les deux autres sommets J et K étant dans le plan ACD, il en résulte que le plan parallèle à ACD à distance h_b (du côté de B) coupe bien ce triangle (autrement dit l'intersection des deux plans coupe le tétraèdre).