Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Problème d'échiquier

année 2020 - 2021

Luigi Aubry-Pouget, Damien Choffat, Gaëtan Guyon et Nolan Williot

Établissements : Lycée Cordouan (Royan) et Lycée Valin (La Rochelle)

Enseignants : Jean-Côme Charpentier et Jean-Matthieu Bernat

Chercheur : Cyrille Ospel (Université de la Rochelle)

Résumé

On dénombre les combinaisons de placement de pions sur des échiquiers carrés de taille variable avec des contraintes diverses.

1 Exposé du problème

Sur un échiquier de taille 5×5 il faut positionner une tour sur la case située en bas à gauche. L'objectif est de la faire arriver sur la case se situant en haut à droite. La tour ne pourra se déplacer que vers le haut et vers la droite. Sur cet échiquier, il faut également positionner 5 pions sachant que deux pions ne peuvent pas se situer sur la même ligne ou la même colonne et que les pions ne peuvent pas occuper la case de départ et la case d'arrivée de la tour.

Deux types de positions sont donc possibles : les positions ouvertes qui permettent à la tour d'arriver à destination et les positions fermées qui empêchent la tour de se déplacer jusqu'à sa case de destination en haut à droite.

L'objectif est de trouver le nombre de positions ouvertes et le nombre de positions fermées.

On généralise ensuite ce problème à un échiquier $n \times n$ où on pose n pions.

2 Résultats obtenus

Pour calculer le nombre de positions ouvertes et fermées, on a tout d'abord simplifié le problème en enlevant la contrainte de la tour : le problème était donc de poser 5 pions sur l'échiquier sans en mettre plusieurs sur une rangée ou une colonne.

Dans la première colonne, il est possible de placer un pion dans chacune des 5 cases. Pour la seconde colonne, étant donné qu'une des positions a déjà été utilisée sur la colonne précédente, il n'y a donc plus que 4 possibilités de placement. La colonne suivante a donc 2 possibilités qui lui sont impossibles (il en reste 3). En continuant de cette manière, la quatrième colonne n'a plus que 2 possibilités de placement et la dernière n'a plus qu'une seule possibilité (figure 1).

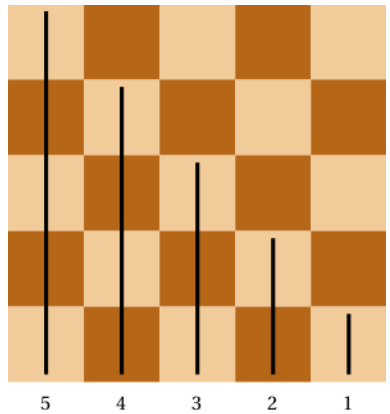

FIGURE 1 – Méthode de dénombrement sans contrainte

Pour obtenir le nombre total de possibilités, il faut multiplier chaque nombre de possibilités obtenues par colonne. Cela donne :

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

Ce type de calcul sera fréquemment rencontré et on va désormais utiliser la notation factorielle :

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

Nous avons réussi à calculer le nombre de positions si la tour et sa case d'arrivée ne sont pas présentes. Il faut à présent le calculer lorsque ces contraintes sont présentes [1].

On utilise la même méthode que précédemment en incluant ces deux cases particulières.

On regarde d'abord la colonne de droite et deux cas s'offrent à nous. Le premier cas où un pion se situe sur la case tout en bas à droite et le second cas où un pion se situe sur une des trois autres cases possibles de la colonne de droite (figure 2 page suivante).

Nous allons, dans un premier temps, traiter le cas dans lequel un pion se situe en bas à droite (schéma de gauche de la figure 2). Si un pion est positionné sur la case tout en bas à droite, il y a 4 positions possibles pour placer un pion sur la colonne la plus à gauche. Sur la colonne suivante, deux possibilités seront déjà utilisées, il y aura donc 3 possibilités sur cette colonne. La colonne suivante n'aura elle que 2 possibilités et la dernière (quatrième colonne) n'en aura plus qu'une. Nous obtenons alors le calcul $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1$ qui peut également s'écrire $4! \times 1$ ou $4!$. Pour ce premier cas, on aura donc 24 possibilités.

Nous allons ensuite calculer le nombre de positions possibles dans le second cas : lorsque un pion est placé sur une des trois cases de la colonne de droite autre que

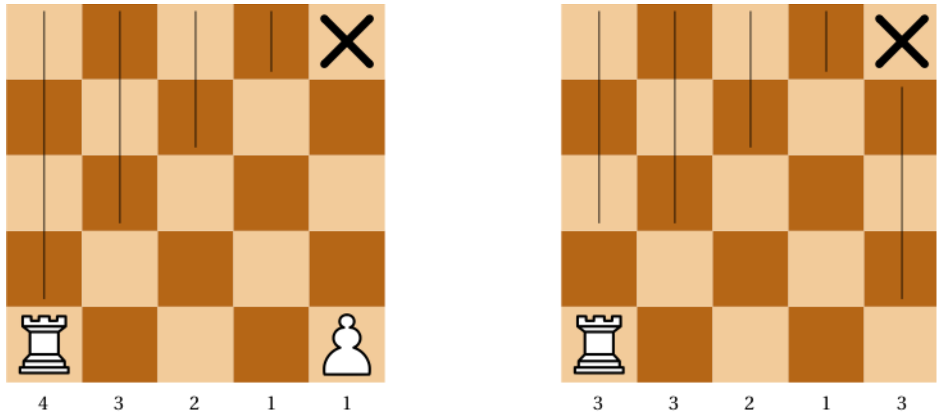

FIGURE 2 – Méthode de dénombrement avec contrainte

celle en bas à droite (schéma de droite de la figure 2). Il y a donc 3 possibilités de placer un pion sur cette colonne. La colonne de gauche a donc une de ses 4 possibilités utilisée. elle n'a donc que 3 possibilités pour placer un pion. La colonne suivante a également 3 possibilités, la suivante 2 possibilités et la dernière (quatrième colonne) une seule possibilité. Nous obtenons le calcul $3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1$ qui donne un résultat de 54.

Pour un échiquier de taille 5×5, il y a donc $24 + 54 = 78$ possibilités différentes de placer des pions en en plaçant un seul par ligne et par colonne.

Nous allons à présent trouver une formule générale pour obtenir le nombre de positions possibles de pions sur un échiquier $n \times n$.

Nous allons découper ce calcul en deux parties semblables aux deux parties pour l'échiquier 5×5.

Pour trouver le résultat du premier cas, dans un échiquier 5×5 nous avons obtenu $4!$, soit $(5-1)!$. En raisonnons de façon analogue, on trouve que pour un échiquier de taille $n \times n$, il y aura $(n-1)!$ possibilités..

Dans le second cas, pour l'échiquier 5×5 on trouvait $3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = (5-2)^2(5-2)!$. En raisonnant de façon analogue sur un échiquier $n \times n$, on trouve $(n-2)^2(n-2)!$.

La formule générale donnant le nombre total de positions est donc :

$$(n-1)! + (n-2)^2(n-2)!$$

Maintenant que le nombre de positions total a été trouvé, nous allons calculer le nombre de positions fermées. Il suffira ensuite de soustraire le nombre de positions fermées au nombre de positions total pour obtenir le nombre de positions ouvertes.

Pour ces calculs, nous nous appuyons sur une conjecture consistant à dire qu'une position fermée comporte obligatoirement une séquence de pions en diagonale complète du haut à gauche vers le bas à droite [2].

Nous allons de nouveau commencer avec le cas de l'échiquier 5×5.

Le premier cas de position fermée est celui dans lequel 2 pions sont situé dans une diagonale en bas à gauche (figure 3 page suivante).

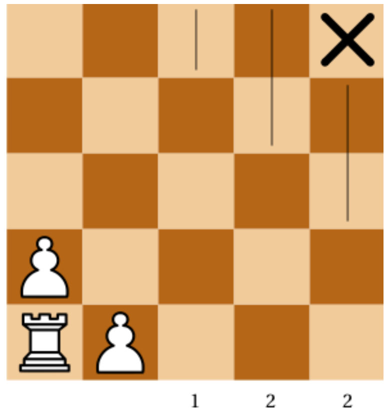

FIGURE 3 – Dénombrement avec une diagonale de 2

Dans ce cas, il reste 3 pions à placer. Commençons par la colonne de droite. Il y a 2 possibilités pour placer les pions, l'avant-dernière colonne a également 2 possibilités de placement et la colonne du milieu n'a plus qu'une seule possibilité.
Nous multiplions chacun des nombre de cas possibles et obtenons :

$$2 \times 2 \times 1 = 4.$$

Dans ce cas, il y a 4 positions fermées.

Le cas suivant est celui dans lequel 3 pions sont en diagonale en bas à gauche (figure 4). Ce cas ne contient qu'une seule possibilité de position fermée car les pions restant n'ont chacun qu'une possibilité de placement possible.

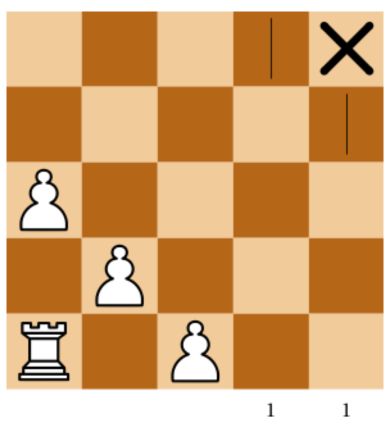

FIGURE 4 – Dénombrement avec une diagonale de 3

Le cas suivant ne contient aucune possibilité (figure 5 page suivante). En effet le cinquième pion ne peut plus être placé.

En continuant de remplir les diagonales, nous arrivons à la "grande" diagonale (figure 6 page suivante). Il n'y a évidemment qu'une seule solution.

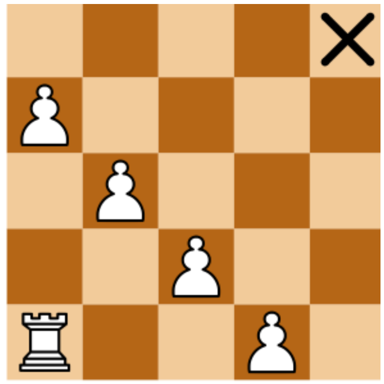

Figure 5 – Dénombrement avec une diagonale de 4

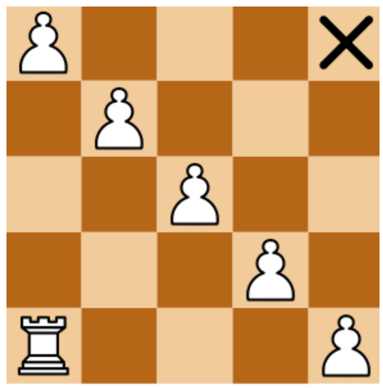

Figure 6 – Dénombrement avec une diagonale de 5

La configuration suivante est celle de la figure 7 page suivante. Il n'y a aucune possibilité de placement. On peut remarquer qu'on est en train d'étudier des positions symétriques de celles déjà rencontrées.

La configuration suivante est celle avec une diagonale de trois pions en haut à droite (figure 8 page suivante). Dans cette position, il n'y a qu'une seule position possible. Cependant, cette position a déjà été comptée dans le premier cas étudié précédemment (deux pions en diagonale en bas à gauche à la figure 3 page précédente). Il ne faut donc pas compter cette position une deuxième fois.

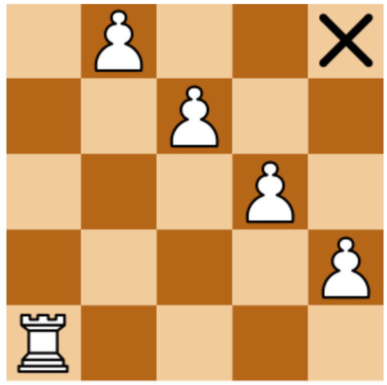

FIGURE 7 – Dénombrement avec une diagonale en haut à droite de 4

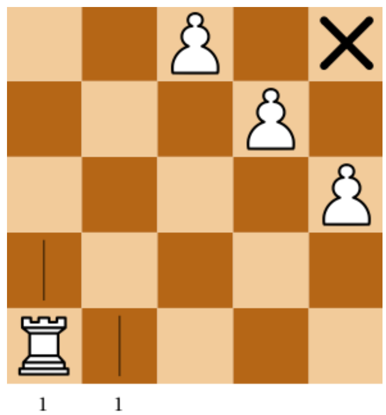

FIGURE 8 – Dénombrement avec une diagonale en haut à droite de 3

Le dernier cas est celui dans lequel deux pions sont situés en diagonale tout en haut à droite (figure 9).

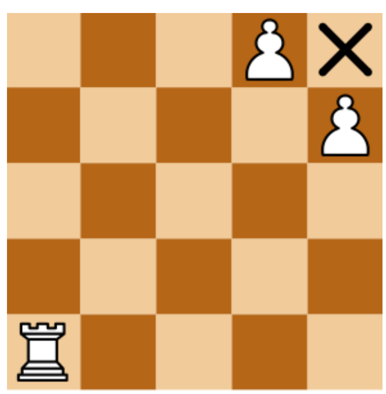

FIGURE 9 – Dénombrement avec une diagonale en haut à droite de 2

Ce cas est le symétrique du premier cas étudié. Il y a donc 4 possibilités.

Parmi ces 4 possibilités, deux ont déjà été comptés : ce sont les positions qui contiennent une autre diagonale en bas à gauche (figure 10).

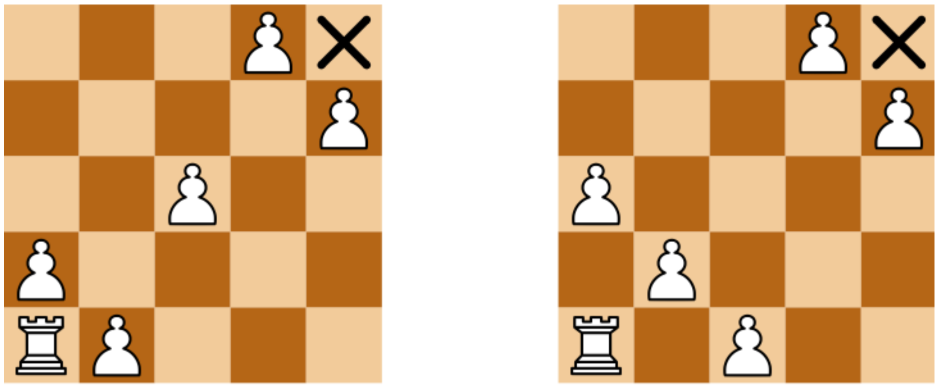

Figure 10 – Positions fermées déjà comptées

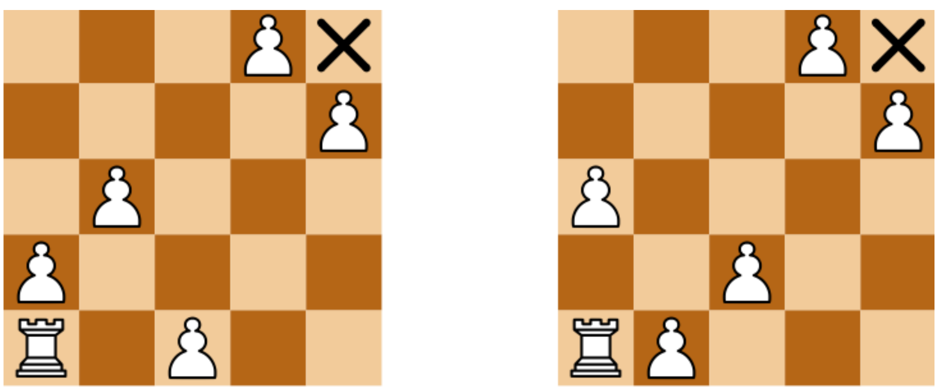

Figure 11 – Positions fermées non déjà comptées

Il ne reste donc que deux véritables nouvelles positions (figure 11).
En additionnant la totalité des positions fermées, nous obtenons :

$$4 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 2 = 8.$$

Sur l'échiquier de taille 5×5 il y a 8 positions fermées.
Il y a donc $78 - 8 = 70$ positions ouvertes possibles.

3 Conclusion

Lors de nos recherches, nous n'avons pas réussi à trouver de formule générale pour calculer le nombre de positions fermées mais nous avons une méthode.

Grâce à la formule pour le nombre total de positions et la méthode pour obtenir le nombre de positions fermées [3], nous avons trouvé le nombre de positions ouvertes et fermées pour les échiquiers allant de 1×1 jusqu'à 9×9 :

Taille de l'échiquier	Positions totales	Positions fermées	Positions ouvertes
1×1	0	0	0
2×2	1	0	1
3×3	3	1	2
4×4	14	2	12
5×5	78	8	70
6×6	504	40	464
7×7	3720	222	3498
8×8	30960	1388	29572
9×9	287280	9874	277406

Notes d'édition

[1] On compte ici d'abord le nombre total de positions ouvertes et fermées : on n'impose pas que la tour puisse rejoindre la case d'arrivée.

[2] Il est clair que la tour ne peut pas passer si une séquence de pions occupe complètement une diagonale descendant de gauche à droite. Le lecteur pourra essayer de démontrer que toutes les positions ne comportant pas une telle diagonale sont ouvertes.

[3] Ce point nécessiterait plus d'explications. On peut penser que les auteurs ont aussi trouvé une formule pour le nombre de positions fermées, ou qu'ils ont obtenu ces résultats grâce à un programme informatique.