Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

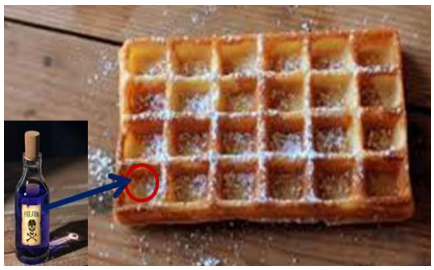
Duels de gaufres

Année 2017 – 2018

Louis MARCHE, Lilian RENAULD, élèves de 5ème
Hugo CAUZID, Heddie CHAMANT, Alix ZUCCHI, élèves de 4ème.

Encadrés par HIRIART Louisette, FINDIK Ziya

Établissements : Collège George CHEPFER de VILLERS lès NANCY



Chercheuse : Marie Duflot-Kremer, Université de Lorraine, LORIA & Inria Nancy Grand Est

1. Présentation du sujet

Dans la pittoresque ville de Bouillon sur Gaufre en Belgique, on vit un peu dans le passé, entre le château fort et les duels de gaufre. Pour de sombres histoires d'honneur, d'insulte ou de diffamation, on se retrouve souvent provoqué en duel.

Les règles sont surprenantes. On prépare une gaufre, on insère un produit toxique dans le carré en bas à gauche, puis les deux participants à tour de rôle doivent croquer une partie de la gaufre. Croquer la gaufre consiste à choisir un carré de gaufre, le manger ainsi que tous les carrés qui sont au-dessus et à droite de celui-ci. Celui qui se retrouve contraint de manger le carré « empoisonné » est bon pour une sévère indigestion, l'autre voit son honneur lavé de tout soupçon.

Avant d'aller dans cette ville, vous aimeriez bien, au cas où, connaître le moyen d'échapper à l'indigestion, en trouvant une stratégie gagnante afin de réussir tous vos duels.

Imaginez, si la gaufre fait 10 carrés sur 10 et que c'est à vous de commencer, pouvez-vous trouver une stratégie qui vous permette de gagner, quoi que fasse votre adversaire ?

Et si la gaufre a une autre dimension, pourrez-vous toujours éviter l'indigestion ?

Et si les règles du duel changent et qu'un participant ne puisse choisir qu'un carré situé sur la même ligne, la même colonne ou la diagonale qui passe par le carré qui vient d'être mangé, est-ce plus facile d'éviter l'indigestion ?

2. Sommaire

A – Dans un premier temps, nous étudions les gaufres carrées.
B – Quelques généralités sur ces duels.
C – Puis nous étudions des gaufres rectangulaires.
D – Enfin, nous changeons les règles du duel pour de plus grandes gaufres.

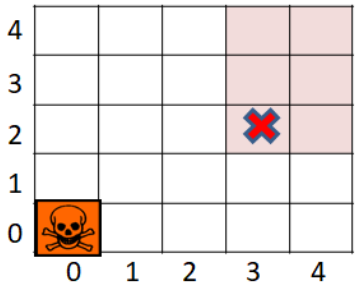
3. Conclusion

Avec la première règle du duel, nous avons montré que celui qui commence le duel a une stratégie gagnante, même si la preuve ne permet pas de donner cette stratégie. Puis nous donnons une méthode pour trouver les morceaux de gaufres que le 1er joueur doit laisser à son adversaire afin de ne pas s'empoisonner, quoi que réplique ce dernier.

Avec la deuxième règle du duel, nous trouvons des carrés de gaufres que le 1er joueur doit choisir pour s'assurer de gagner quoi que fasse son adversaire après lui, et cela même pour de grandes gaufres.

Duels de gaufres

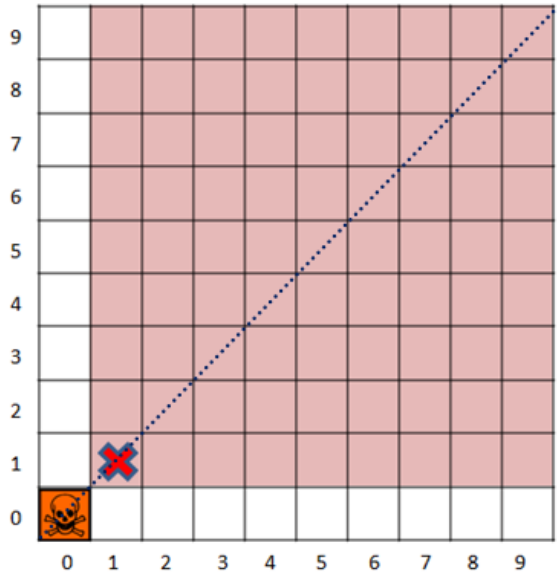
Le principe du duel (jeu) est le suivant :
La gaufre est représentée par un quadrillage à n lignes et p colonnes.
Le carré de gaufre en bas à gauche est empoisonné.
Mordre la gaufre consiste à prendre un carré de gaufre, le manger, et avec lui tout ce qui se trouve au dessus et à droite.
Le **1er joueur** commence comme sur la gaufre ci-contre, il prend le carré de coordonnées (3 ; 2) et mange tous les carrés en rose
Les deux adversaires (**1er joueur** et **2ème joueur**) mordent alternativement la gaufre et celui qui est obligé de manger le carré empoisonné a perdu.

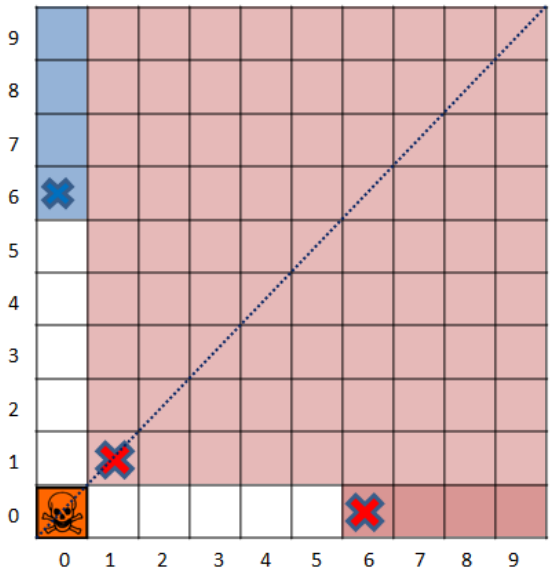


A – Etude de duels avec des gaufres carrées

Définition : Une stratégie est dite gagnante pour un joueur J si, quelle que soit la façon dont joue l'autre joueur, c'est le joueur J qui gagne lorsqu'il joue selon cette stratégie.

Stratégie gagnante pour le 1er joueur sur une gaufre de 10 carreaux sur 10 :





→ **Le 1er joueur prend le carré (1 ; 1)** et donc mange tous les carrés au dessus et à droite (en rose sur la figure ci-contre).

Le 2ème joueur ne peut plus que prendre un carré sur la ligne et la colonne restantes (en blanc sur la figure ci-contre).

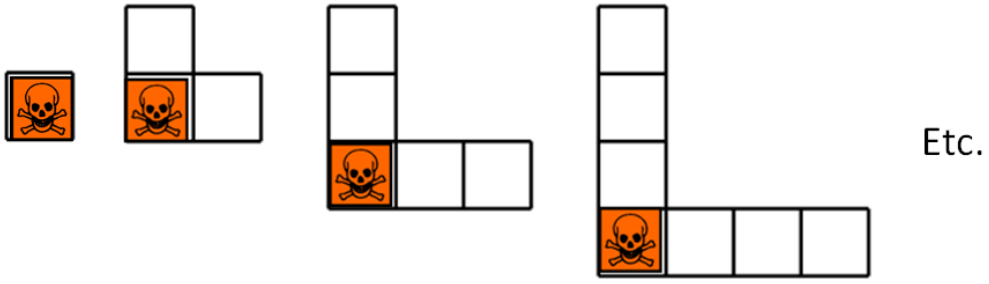
→ **Si** le 2ème joueur prend un carré sur la colonne restante de coordonnées (0 ; a) avec a compris entre 1 et 9, **alors** le 1er joueur va répliquer en prenant le carré symétrique par rapport à la diagonale de la gaufre qui passe par le carré empoisonné de coordonnées (a ; 0).
Ou si le 2ème joueur prend un carré sur la ligne restante de coordonnées (a ; 0), **alors** le 1er joueur va répliquer en prenant le carré de coordonnées (0 ; a).

→ **Si** le 1er joueur continue à répliquer ainsi symétriquement par rapport à la diagonale de la gaufre à tous les coups du 2ème joueur, **alors** à la fin, il ne restera que le carré empoisonné pour le 2ème joueur et il aura perdu quoi qu'il fasse.

Joueur 1
Joueur 2

Bien entendu, cette stratégie est applicable à toutes les gaufres carrées de n carreaux sur n, avec n entier > 1.

En conséquence, voici les morceaux de gaufres que le 1er joueur doit laisser à son adversaire pour être sûr de pouvoir gagner quoi que fasse son adversaire, en lui répliquant toujours symétriquement :



Ces morceaux de gaufres seront appelés « **morceaux perdants** », car celui qui se trouve face à un tel morceau perdra quoi qu'il fasse, à condition que son adversaire applique la stratégie gagnante de toujours laisser un « **morceau perdant** » plus petit.

B – Généralités sur ces duels

Dans ce jeu opposant deux joueurs qui jouent alternativement :

● Toute partie se termine lorsqu'il n'y a plus de carré de gaufre à manger.

● Il n'y a pas de hasard et il ne peut y avoir de match nul.

Propriété 1 : **L'un des deux joueurs a forcément une stratégie gagnante.**

En effet :

→ Si le 1er joueur a une stratégie gagnante et l'applique, il gagne quoi que fasse le 2ème joueur, donc le 2ème joueur perd toujours et n'a pas de stratégie gagnante.

→ Si le 1er joueur n'a pas de stratégie gagnante, alors quoi qu'il fasse, le 2ème peut répondre à tous les coups du 1er joueur sans que ce dernier ne gagne. Et comme on mange des carrés à chaque fois et qu'il y a toujours un gagnant (pas de match nul), le 2ème joueur a donc une stratégie gagnante.

Propriété 2 : **Le 1er joueur possède toujours une stratégie gagnante.**

→ Nous avons vu que pour une gaufre carrée, le 1er joueur avait une stratégie gagnante.
(Il prend le carré (1 ; 1) et réplique à son adversaire symétriquement par rapport à la diagonale de la gaufre qui passe par le carré empoisonné.)

→ Nous allons démontrer par l'absurde que pour une gaufre rectangulaire, le 1er joueur à toujours une stratégie gagnante.

Si on suppose que le 1er joueur n'a pas de stratégie gagnante.
Il prend le carré le plus en haut à droite de la gaufre.
D'après la propriété 1, c'est alors le 2ème joueur qui a une stratégie gagnante et il la joue.

Mais si le 1er joueur joue dès le début le carré du 2ème joueur et suit la stratégie qu'avait suivie le deuxième joueur, alors c'est le 1er joueur qui a une stratégie gagnante.
La supposition initiale est donc fausse.

Il existe donc toujours une stratégie gagnante pour le 1er joueur.

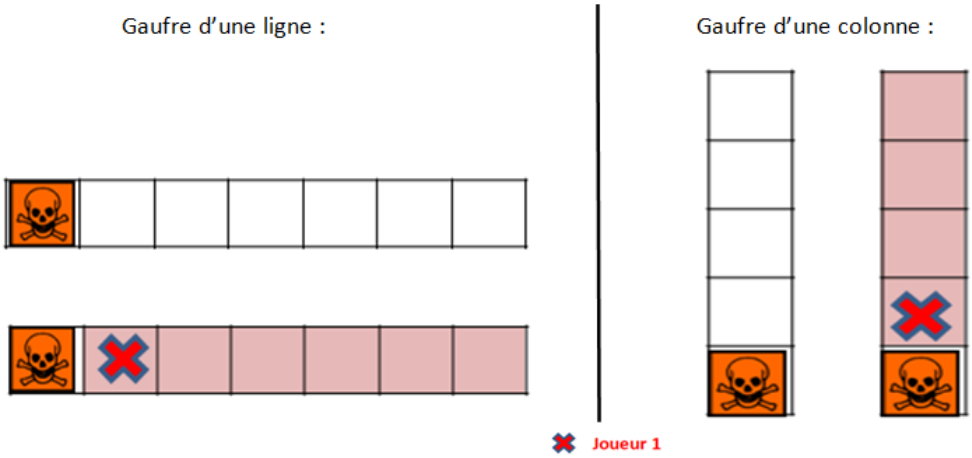
On sait donc que le 1er joueur peut gagner, mais on ne sait pas comment !

Nous allons donc étudier des duels avec des gaufres rectangulaires.

B – Etude de duels avec des gaufres rectangulaires

1°) Avec des gaufres d'une seule ligne ou d'une seule colonne

Stratégie gagnante pour le 1er joueur

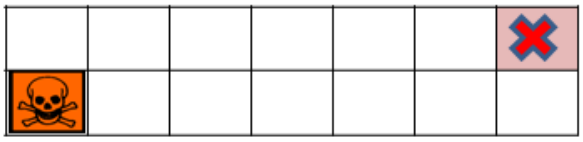


Dans les 2 cas, le 1er joueur prend tous les carrés non empoisonnés et il ne reste que le carré empoisonné pour le 2ème joueur.

2°) Avec des gaufres de 2 lignes ou 2 colonnes

Stratégie gagnante pour le 1er joueur

Gaufre de 2 lignes :



→ Le 1er joueur prend le carré en haut le plus à droite (croix rouge).

→ **Si** le 2ème joueur prend un carré de la ligne du haut (croix bleue du haut) **alors** le 1er joueur va répliquer en prenant le carré de la ligne du bas, mais décalé d'un rang à droite.

→ **Si** le 2ème joueur prend un carré de la ligne du bas (croix bleue du bas) **alors** le 1er joueur va répliquer en prenant le carré de la ligne du haut dans la colonne juste à côté.

→ Le joueur 1 réplique ainsi à tous les coups du 2ème joueur. A la fin de la partie, le 2ème joueur s'empoisonne car il ne lui restera forcément que le carré empoisonné.

Gaufre de 2 colonnes (1):

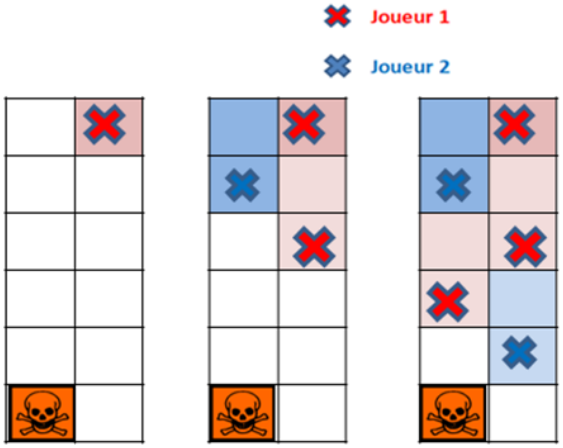


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

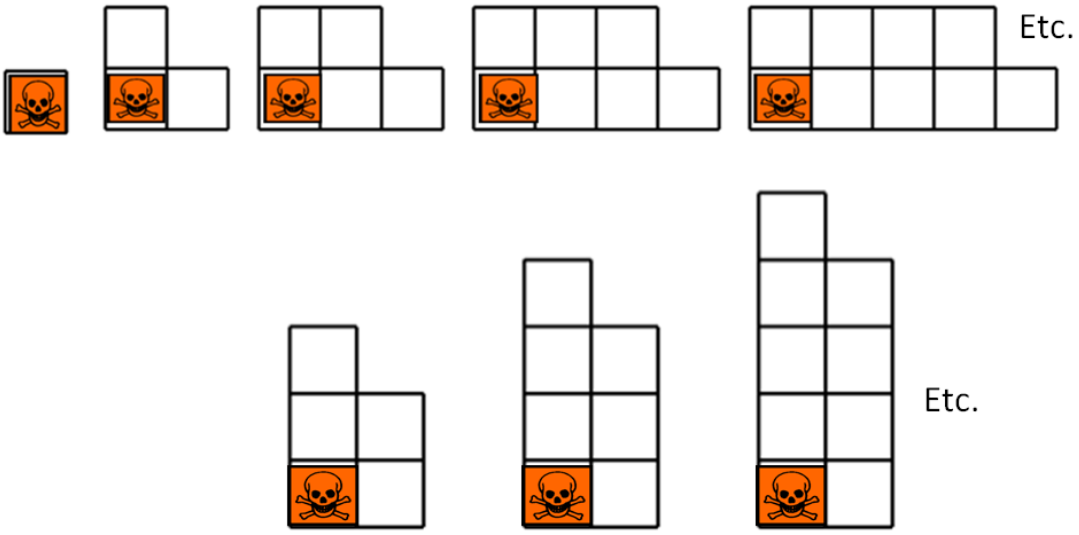
→ Fig. 1 : Le 1er joueur prend le carré en haut le plus à droite (croix rouge).

→ Fig. 2 : **Si** le 2ème joueur prend un carré de la 1ère colonne (croix bleue) **alors** le 1er joueur va répliquer en prenant le carré de la 2ème colonne juste en dessous.

→ Fig. 3 : **Si** le 2ème joueur prend un carré de la 2ème colonne (croix bleue) **alors** le 1er joueur va répliquer en prenant le carré de la 1ère colonne, juste au dessus.

→ Le joueur 1 réplique ainsi à tous les coups du 2ème joueur. A la fin de la partie, le 2ème joueur s'empoisonne car il ne lui restera forcément que le carré empoisonné.

En conséquence, voici les « **morceaux perdants** » que le 1er joueur doit toujours laisser à son adversaire.



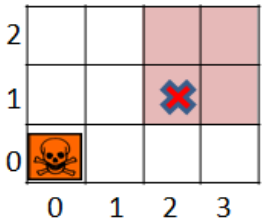
Et pour répliquer aux coups suivants du 2ème joueur, le 1er joueur appliquera la stratégie gagnante de laisser à son adversaire un « **morceau perdant** » plus petit, le 2ème joueur va perdre quoi qu'il fasse.

2°) Avec des gaufres de 3 lignes (et jusqu'à 7 colonnes)

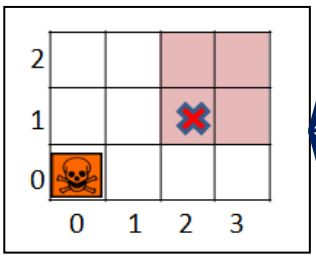
Stratégie gagnante pour le 1er joueur

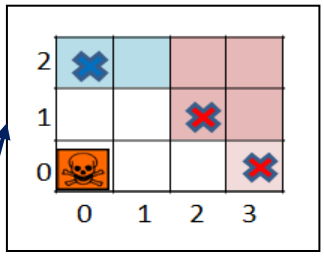
● Nous avons déjà vu les stratégies gagnantes pour 1 ou 2 colonnes, ainsi que pour 3 colonnes (gaufre carrée).

● Pour 4 colonnes, nous avons fait beaucoup d'essais avant de trouver que le 1er joueur devait prendre le carré de coordonnées (2,1).

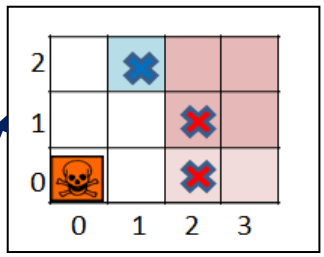


Il y a alors 7 possibilités de jeu pour le 2ème joueur car il reste 7 carrés à prendre (en blanc sur la figure).
A chaque fois on a trouvé une réplique pour que le 1er joueur gagne.
Nous avons présenté ces répliques à l'aide d'un arbre.

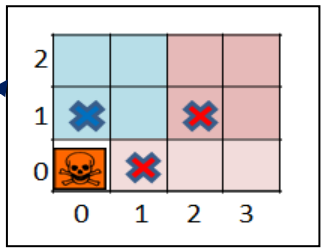




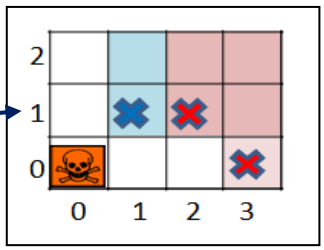
Le 1er joueur réplique au 2ème en lui laissant un « **morceau perdant** ».
(cf. gaufre carrée de 2 lignes)



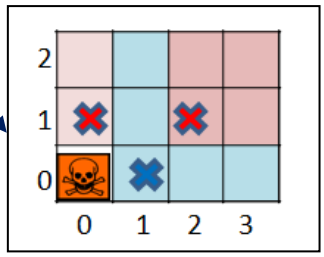
Le 1er joueur réplique au 2ème en lui laissant un « **morceau perdant** ».
(cf. gaufre carrée de 2 colonnes)



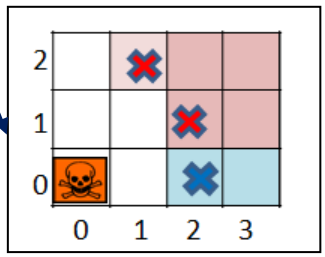
Le 1er joueur réplique au 2ème en ne lui laissant que la gaufre empoisonnée.



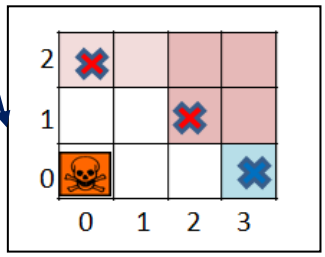
Le 1er joueur réplique au 2ème en lui laissant un « **morceau perdant** ».
(cf. gaufre carrée de 3 carrés sur 3).



Le 1er joueur réplique au 2ème en ne lui laissant que la gaufre empoisonnée.



Le 1er joueur réplique au 2ème en lui laissant un « **morceau perdant** ».
(cf. gaufre carrée de 2 colonnes)



Le 1er joueur réplique au 2ème en lui laissant un « **morceau perdant** ».
(cf. gaufre carrée de 2 lignes)

Joueur 1

Joueur 2

Dans les 5 cas où il ne reste pas que le carré empoisonné au 2ème joueur, le 1er joueur va gagner quoi que fasse le 2ème joueur car il pourra toujours répliquer en laissant un « **morceau perdant** » plus petit à son adversaire.

Nous avons ainsi détaillé la stratégie gagnante pour le 1er joueur pour une gaufre de 3 lignes et 4 colonnes.

● Pour plus de 4 colonnes la recherche est longue et pas économique en papier.

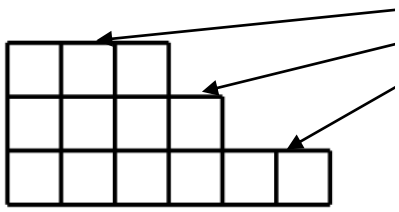
Notre chercheuse nous a mis sur la voie d'une méthode pour trouver les « **morceaux perdants** » de gaufres que le 1er joueur devait laisser à son adversaire.

Nous codons les morceaux de gaufres avec des triplets (car il y a 3 lignes) de la manière suivante :
Pour le triplet abc,

→ a désigne le nombre de carrés restants sur la 3ème ligne.
→ b désigne le nombre de carrés supplémentaires restants sur la 2ème ligne par rapport à la 3ème ligne.
→ c désigne le nombre de carrés supplémentaires restants sur la 1ème ligne par rapport à la 2ème ligne.

$a + b + c \leq 7$ car nous nous limitons ici à 7 colonnes.

Par exemple, le morceau de gaufre ci-dessous correspond au triplet **312**



3 carrés restants sur la 3ème ligne.
1 carré supplémentaire sur la 2ème ligne.
2 carrés supplémentaires sur la 1ère ligne.

Puis nous répertorions tous les morceaux de gaufres possibles dans une gaufre de 3 lignes et 7 colonnes en énumérant méthodiquement tous les triplets dont la somme des chiffres est inférieure ou égale à 7 :

▪ Gaufres d'une ligne : 001 – 002 – 003 – 004 – 005 – 006 – 007.
▪ Gaufres de 2 lignes : 010 – 011 – 012 – 013 – 014 – 015 – 016 – 020 – 021 – 023 – 024 – 025 – 030 – 031 – 032 – 033 – 034 – 040 – 041 – 042 – 043 – 050 – 051 – 052 – 060 – 061 – 070.
▪ Gaufres de 3 lignes : 100 – 101 – 102 – 103 – 104 – 105 – 106 – 110 – 111 – 112 – 113 – 114 – 115 – 120 – 121 – 122 – 123 – 124 – 130 – 131 – 132 – 133 – 140 – 141 – 142 – 150 – 151 – 160 – 200 – 201 – 202 – 203 – 204 – 205 – 210 – 211 – 212 – 213 – 214 – 220 – 221 – 222 – 223 – 230 – 231 – 232 – 240 – 241 – 250 – 300 – 301 – 302 – 303 – 304 – 310 – 311 – 312 – 313 – 320 – 321 – 322 – 330 – 331 – 340 – 400 – 401 – 402 – 403 – 410 – 411 – 412 – 420 – 421 – 430 – 500 – 501 – 502 – 510 – 511 – 520 – 600 – 601 – 610 – 700.

Pour chacun de ces morceaux de gaufre possibles dans une gaufre de 3 lignes et 7 colonnes cités dans l'ordre ci-dessus, s'il est laissé par le 1er joueur à son adversaire, nous regardons comment le 2ème joueur peut répliquer.
Les résultats sont notés dans un tableau. Chaque colonne du tableau peut représenter une étape d'un duel.

Dès qu'un joueur laisse à son adversaire un « **morceau perdant** » et joue la stratégie gagnante de toujours laisser à son adversaire un « **morceau perdant** » plus petit, il va gagner quoi que fasse son adversaire.

Nous notons en rouge les triplets qui représentent les « **morceaux perdants** », en noir les autres non perdants.
Nous avons déjà vu que les morceaux représentés par les triplets : **001, 011, 011, 021, 031, 041, 051, 061, 110 et 102,** étaient des « **morceaux perdants** » au début de l'article.

Morceau laissé par J1 à J2	**001**	002	003	004	005	006	007
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	J2 perd	**001**	**001**	**001**	**001**	**001**	**001**
		J1 perd	J1 perd	J1 perd	J1 perd	J1 perd	J1 perd

Morceau laissé par J1 à J2	010	**011**	012	013	014	015	016	020
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	**001**	J2 perd	**011**	**011**	**011**	**011**	**011**	**011**
	J1 perd		J1 perd	J1 perd	J1 perd	J1 perd	J1 perd	J1 perd

Morceau laissé par J1 à J2	**021**	022	023	024	025	030	**031**	032
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	J2 perd*	**021**	**021**	**021**	**021**	**021**	J2 perd*	**031**
		J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*		J1 perd*

Morceau laissé par J1 à J2	033	034	040	**041**	042	043	050	**051**
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	**031**	**031**	**031**	J2 perd*	**041**	**041**	**041**	J2 perd*
	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*		J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	

Morceau laissé par J1 à J2	052	060	**061**	070	100	101	**102**	103
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	**051**	**051**	J2 perd*	**061**	**001**	**011**	J2 perd*	**102**
	J1 perd*	J1 perd*		J1 perd*	J1 perd	J1 perd		J1 perd*

Morceau laissé par J1 à J2	104	105	106	**110**	111	112	113	114
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	**102**	**102**	**102**	J2 perd*	**110**	**110**	**110**	**110**
	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*		J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*

Morceau laissé par J1 à J2	115	120	121	122	123	124	130	131
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	**110**	**110**	**110**	**110**	**110**	**110**	**110**	**110**
	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*

Morceau laissé par J1 à J2	132	133	140	141	142	150	151	160
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	**110**	**110**	**110**	**110**	**110**	**110**	**110**	**110**
	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*

Morceau laissé par J1 à J2	200	201	**202**	203	204	205	210	211
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	**110**	**102**	J2 perd*	**202**	**202**	**202**	**102**	**031**
	J1 perd*	J1 perd*		J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*

* Si quoi qu'il joue, son adversaire adopte la stratégie gagnante de laisser un « **morceau perdant** » plus petit.

Morceau laissé par J1 à J2	**212**	213	214	220	221	**222**	223	230
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	J2 perd*	**212**	**212**	**202**	**212**	J2 perd*	**222**	**212**
		J1 perd*	J1perd*	J1 perd*	J1 perd*		J1 perd*	J1 perd*

Morceau laissé par J1 à J2	231	**232**	240	241	250	300	301	302
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	**051**	J2 perd*	**222**	**061**	**232**	**102**	**031**	**212**
	J1 perd*		J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*

Morceau laissé par J1 à J2	**303**	304	310	311	312	**313**	**320**	321
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	J2 perd*	**303**	**202**	**041**	**222**	J2 perd*	J2 perd*	**320**
		J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*			J1 perd*

Morceau laissé par J1 à J2	322	330	331	340	400	401	402	403
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	**320**	**320**	**061**	**320**	**202**	**041**	**303**	**310**
	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*

Morceau laissé par J1 à J2	410	411	412	420	421	**430**	500	501
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	**320**	**051**	**231**	**303**	**061**	J2 perd*	**320**	**051**
	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*		J1 perd*	J1 perd*

Morceau laissé par J1 à J2	502	510	511	520	600	601	610	700
Réplique : **morceau laissé par J2** à J1	**430**	**303**	**061**	**430**	**303**	**061**	**430**	**430**
	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*	J1 perd*

* Si quoi qu'il joue, son adversaire adopte la stratégie gagnante de laisser un « **morceau perdant** » plus petit.

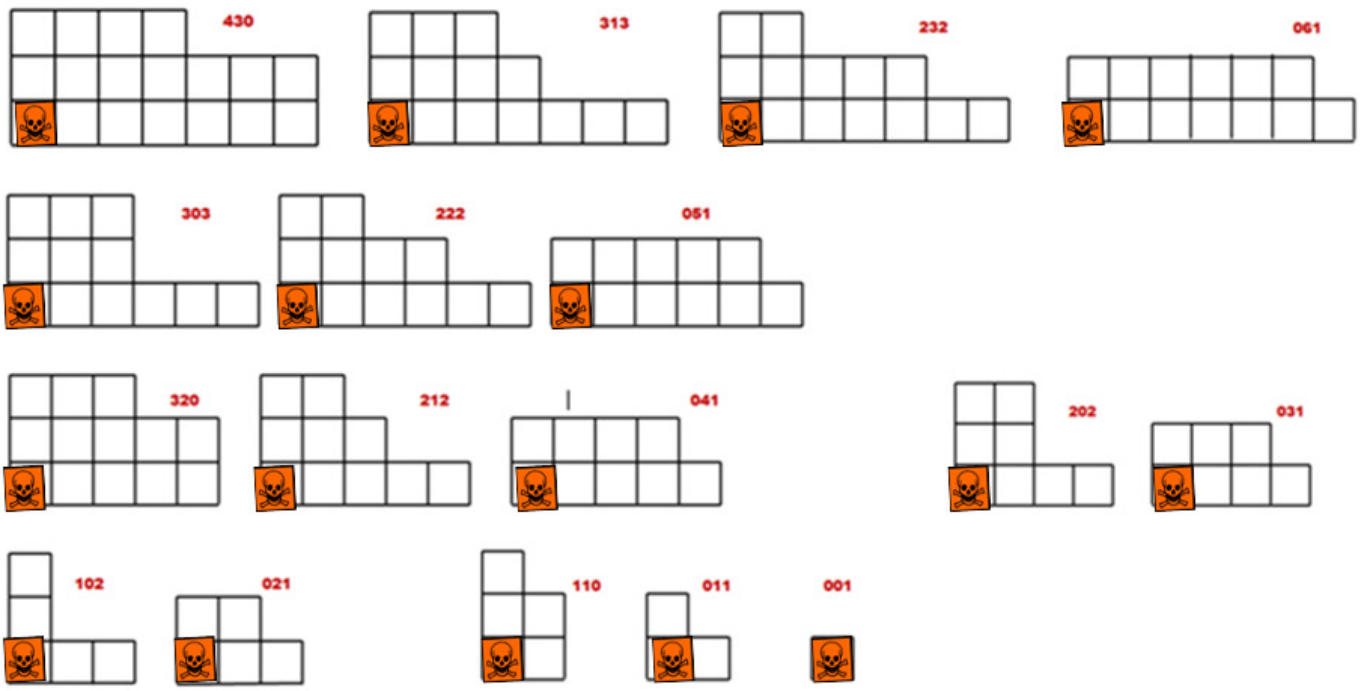
Remarque :

Les morceaux de gaufres représentés par les triplets **202**, **212**, **222**, **232**, **303**, **313**, **320** et **430** sont de nouveaux « **morceaux perdants** » pour le 2ème joueur, car devant ces morceaux le 2ème joueur ne peut pas trouver de « **morceau perdant** » déjà répertorié plus petit à laisser au 1er joueur.

Le 2ème joueur va donc répliquer en laissant au 1er joueur un morceau de gaufre plus petit non perdant (en noir) répertorié plus haut dans le tableau. Mais alors, le 1er joueur pourra toujours répliquer en lui laissant cette fois un « **morceau perdant** ».

Le 2ème joueur va donc perdre, quoi qu'il fasse si le 1er joueur continue à bien appliquer sa stratégie gagnante qui est de toujours laisser un « **morceau perdant** » plus petit à son adversaire.

Nous avons alors répertorié tous les « **morceaux perdants** » de gaufres que le 1er joueur doit laisser à son adversaire dans une gaufre de 3 lignes et jusqu'à 7 colonnes :

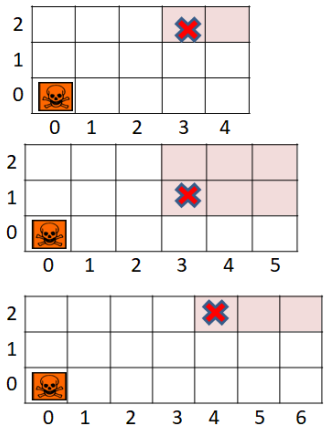


Ainsi :

- pour une gaufre de **3 lignes et 5 colonnes**, le 1er joueur doit démarrer le duel en prenant le carré de coordonnées (3 ; 2).

- pour une gaufre de **3 lignes et 6 colonnes**, le 1er joueur doit démarrer le duel en prenant le carré de coordonnées (3 ; 1).

- pour une gaufre de **3 lignes et 7 colonnes**, le 1er joueur doit démarrer le duel en prenant le carré de coordonnées (4 ; 2).



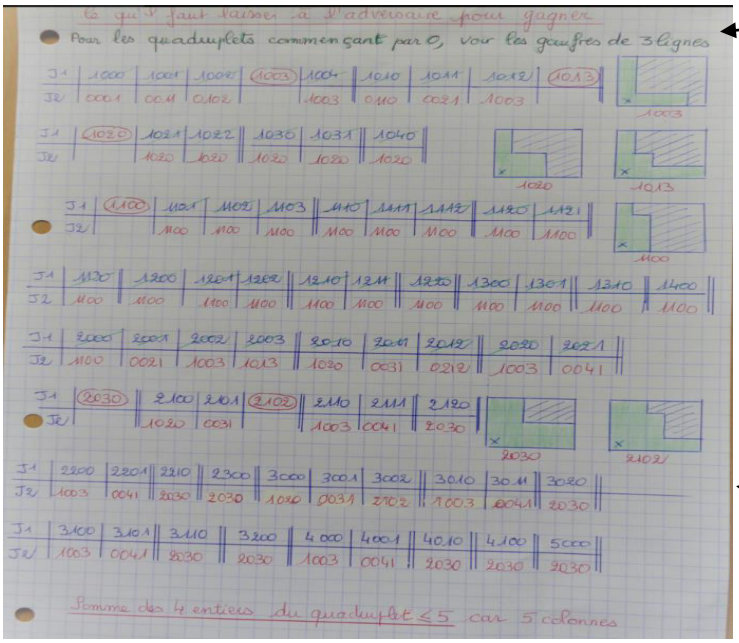
On peut continuer pour plus de colonnes. Pour n colonnes avec n>7, on prendra tous les triplets dont la somme des chiffres sera inférieure ou égale à n.

3°) Avec des gaufres de plus de 3 lignes

On fait de même avec
- des quadruplets pour des gaufres de 4 lignes.
- des quintuplets pour des gaufres de 5 lignes.
etc.

Mais c'est très long à la main!

Nos avons fait le même travail que ci-dessus avec des quadruplets dont la somme des chiffres est inferieure ou égale à 5 pour des gaufres de 4 lignes et jusqu'à 5 colonnes.

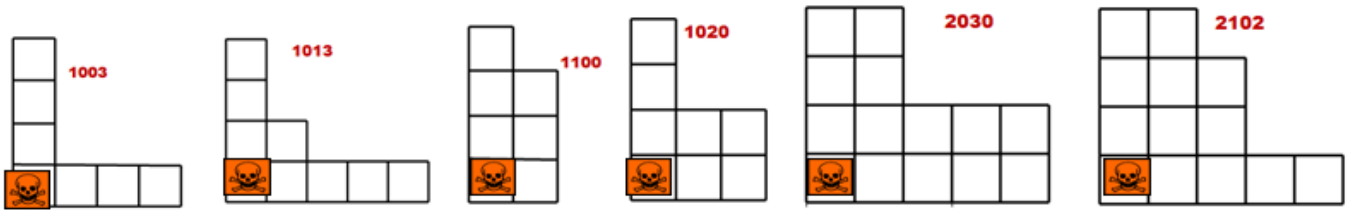


Pour les quadruplets commençant par 0, on se reporte aux gaufres de 3 lignes.

Ainsi tous les quadruplets suivants représentent déjà des « **morceaux perdants** » pour le 2ème joueur :
0001, 0011, 0011, 0021, 0031, 0041, 0051, 0061, 0110, 0102, 0202, 0212, 0222, 0232, 0303, 0313, 0320 et 0430.
On a juste placé un 0 devant les triplets représentants des **« morceaux perdants** ».

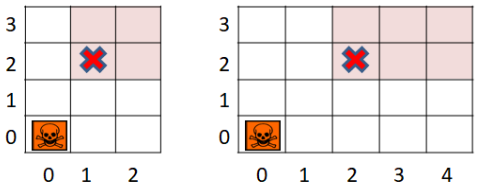
En procédant de même, on trouve que les quadruplets **1003, 1013, 1100, 1020, 2030 et 2102** représentent de nouveaux « **morceaux perdants** ».

Nous avons ainsi trouvé des « **morceaux perdants** » de gaufres supplémentaires que le 1er joueur doit laisser à son adversaire dans une gaufre de 4 lignes et jusqu'à 5 colonnes :

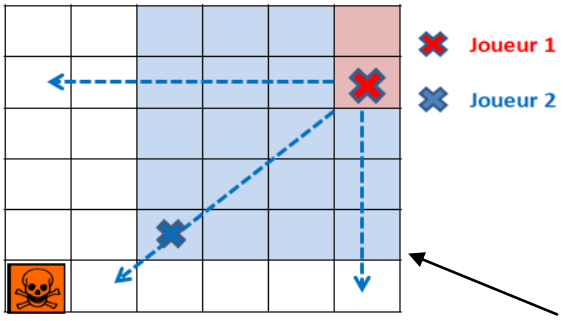


Ainsi :
- pour une gaufre de **4 lignes et 3 colonnes**, le 1er joueur doit démarrer le duel en prenant le carré de coordonnées (1 ; 2).

- pour une gaufre de **4 lignes et 5 colonnes**, le 1er joueur doit démarrer le duel en prenant le carré de coordonnées (2 ; 2).



C – Autre règle pour le duel !



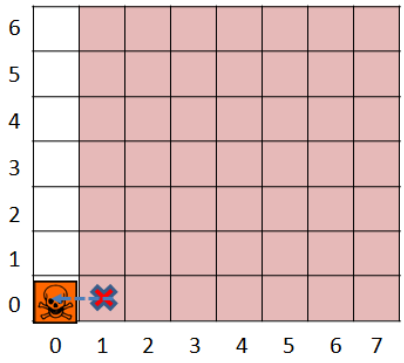
Le 2ème joueur ne peut répliquer au 1er joueur qu'en prenant un carré de gaufre sur la même ligne, la même colonne ou la diagonale dirigée vers le bas par rapport au carré pris par le 1er joueur.

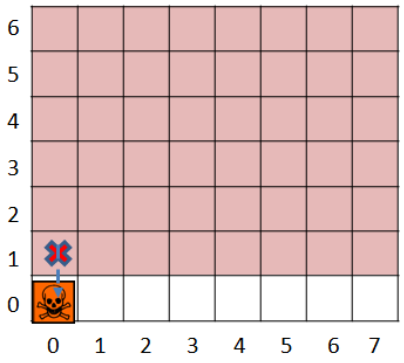
Par exemple sur la gaufre ci-contre, le 2ème joueur n'a plus que 13 possibilités de jeu au lieu des 34 carrés comme précédemment.

Ci-contre, en bleu, une des possibilités pour le 2ème joueur.

Il est alors facile de trouver les carrés de gaufres que le 1er joueur peut prendre pour s'assurer de gagner quoi que fasse son adversaire après lui, c'est à dire les « **positions gagnantes** » pour le 1er joueur.
Nous choisissons ici de répertorier les « **positions gagnantes** » pour le 1er joueur plutôt que les « **morceaux perdants** » à laisser au 2ème joueur comme dans le paragraphe B –

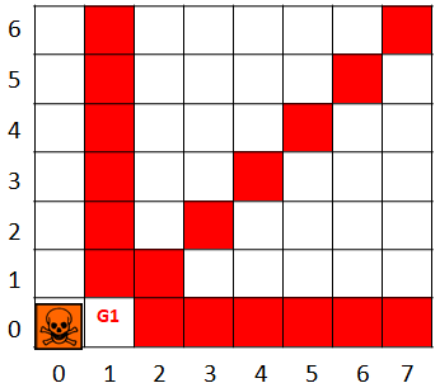
● Tout d'abord, deux « **positions gagnantes** » évidentes pour le 1er joueur : **G1**(1 ; 0) et **G2**(0 ; 1)



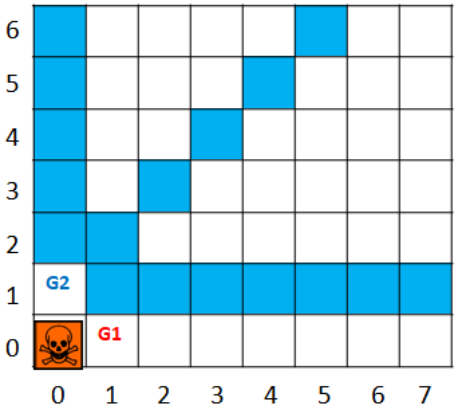


Si le 1er joueur prend le carré (1 ; 0) ou le carré (0 ; 1), alors le 2ème joueur ne peut prendre que le carré empoisonné qui est juste à côté ou en dessous. Il a donc perdu !

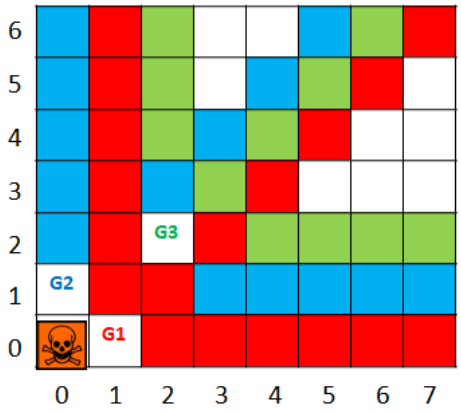
● Nous avons alors cherché d'autres « **positions gagnantes** » pour le 1er joueur pour faire durer le duel et ne pas empoisonner tout de suite le 2ème joueur.



Comme la position **G1**(1 ; 0) est une « **position gagnante** » pour le 1er joueur, toutes les positions sur la même ligne, la même colonne et la diagonale qui passe par le carré (1 ; 0) sont perdantes pour le 1er joueur, car s'il prend un de ces carrés (en rouge sur la figure ci-contre), le 2ème joueur pourra répliquer en prenant la position gagnante G1(1 ; 0) et ce sera lui qui va gagner.



De même, comme la position **G2**(0 ; 1) est une « **position gagnante** » pour le 1er joueur, toutes les positions sur la même ligne, la même colonne et la diagonale qui passe par le carré (0 ; 1), c'est-à-dire les carrés en bleu sur la figure, sont perdantes pour le 1er joueur.

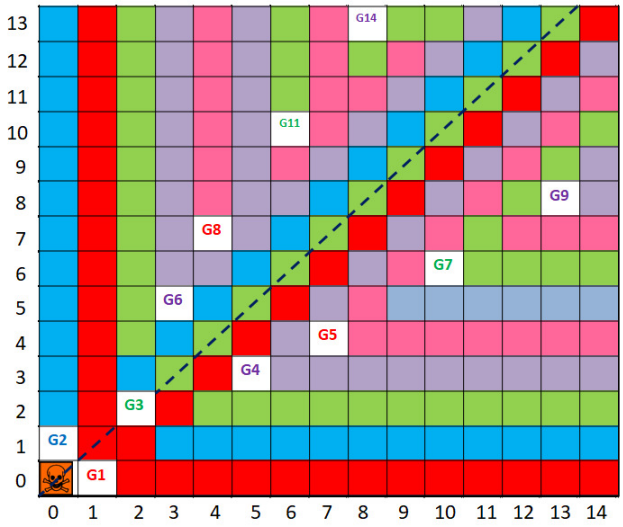


La position **G3**(2 ; 2) est la « **position gagnante** » suivante pour le 1er joueur, car il n'y a pas de « **position gagnante** » sur la ligne, la colonne et la diagonale issues de **G3**.
Si le 1er joueur prend le carré **G3** (2 ; 2), le 2ème joueur ne pourra pas prendre les carrés **G1**(1 ; 0) ou **G2**(0 ; 1) qui pourraient le faire gagner et en prenant un autre carré, le 1er joueur pourra lui répondre en prenant le carré **G1** ou **G2** et donc gagner.

Et alors toutes les positions en vert deviennent des positions perdantes pour le 1er joueur.

Nous continuons ainsi de suite. La « **position gagnante** » suivante pour le 1er joueur est le carré **G4**(5 ; 3) qui est le carré non éliminé (en blanc sur le figure) de la ligne suivante le plus à gauche. Il n'y a pas de position gagnante sur la ligne, la colonne et la diagonale issues de **G4**. Quelle que soit la réplique du 2ème joueur, le premier pourra lui répondre et prenant le carré d'indice inférieur **G1**, **G2** ou **G3.**

Et nous éliminons les positions perdantes pour le 1er joueur sur la même ligne, la même colonne ou la diagonale passant par le carré (5 ; 3).



En couleur, les positions perdantes.

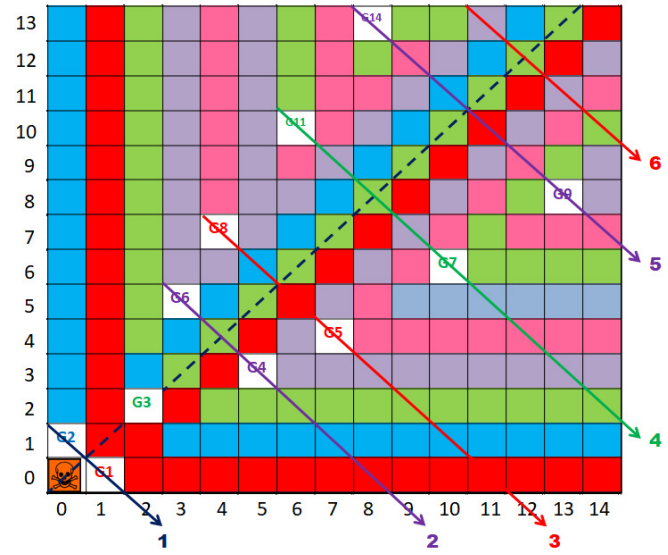
En continuant de même, au final pour une grande gaufre de 13 lignes et 14 colonnes, nous obtenons les « **positions gagnantes** » pour le 1er joueur indiquées ci-contre.

Sur les lignes 9, 11 et 12, les « **positions gagnantes** » G10, G12 et G13 ne sont pas visibles, elles sont au-delà de la 14ème colonne.

Ainsi, d'après le coloriage des positions perdantes , il y a une seule « **position gagnante** » sur chaque ligne, une seule sur chaque colonne et une seule sur chaque diagonale.

On peut remarquer que les « **positions gagnantes** » sont symétriques par rapport à la diagonale de la gaufre passant par le carré empoisonné.

Nous avons aussi remarqué une particularité entre les différences de coordonnées de deux « **positions gagnantes** » symétriques.



Pour les positions gagnantes **G1**(1 ; 0) et **G2**(0 ; 1),**1** est la différence entre les coordonnées 1 – 0 et aussi la différence des deux indices 2 – 1 .

Pour les positions gagnantes **G4**(5 ; 3) et **G6**(3 ; 5), **2** est la différence entre les coordonnées 5 – 3 et aussi la différence des deux indices 4 – 6 .

Pour les positions gagnantes **G5**(7 ; 4) et **G8**(4 ; 7), la différence est de **3**.

Pour les positions gagnantes **G7**(10 ; 6) et **G11**(6 ; 10), la différence est de **4**.

Pour les positions gagnantes **G9**(13 ; 8) et **G14**(8 ; 13), la différence est de **5**.

Cette constatation nous permet de trouver les positions gagnantes suivantes.

Nous avons trouvé les positions gagnantes sur les lignes : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.
La prochaine position gagnante sera sur la ligne 9, donc d'ordonnée 9 et avec une différence de coordonnées de **6**, son abscisse sera donc 15.
Nous obtenons ainsi la position gagnante **G10**(15 ; 9) et sa symétrique sera **G16**(9 ; 15) car la différence des indices est de **6** aussi.

Les positions gagnantes suivantes seront la position **G12**(18 ; 11) sur la 11ème ligne et sa symétriques **G19**(11 ; 18) avec une différence de **7**, puis la position **G13**(20 ; 12) sur la 12ème ligne et sa symétriques **G21**(12 ; 20) avec une différence de **8**. On peut continuer ainsi de suite.

Nous avons vérifié l'exactitude des coordonnées des positions gagnantes en coloriant une grande gaufre de 20 carrés sur 20(2).

Pour récapituler les positions gagnantes, nous avons alors dressé le tableau suivant :

Positions	G1	G2	G3	G4	G6	G5	G8	G7	G11	G9	G14	G10	G16	G12	G19	G13	G21
x	1	0	2	5	3	7	4	10	6	13	8	15	9	18	11	20	12
y	0	1	2	3	5	4	7	6	10	8	13	9	15	11	18	12	20
|x – y|	**1**	**1**	**0**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**5**	**5**	**6**	**6**	**7**	**7**	**8**	**8**

Pour faire durer le suspense du duel, le 1er joueur joue une « **position gagnante** » d'indice élevé.
La réplique du 2ème joueur ne pourra pas être une des « **positions gagnantes** » d'indice inférieur car il n'y en a pas sur la ligne, la colonne et la diagonale issues du carré joué par le 1er joueur.
Quel que soit la réplique du 2ème joueur, il existera toujours une « **position gagnante** » d'indice inférieur pour le 1er joueur sur une ligne, une colonne ou une diagonale. En continuant ainsi, le 1er joueur va gagner.

Remerciements
Nous remercions chaleureusement notre chercheuse Marie Duflot-Kremer, pour le choix de ce sujet de recherche et son aide bienveillante tout au long de l'année, son dynamisme et ses nombreux tours de magie !

Notes d'édition

(1) Il y a une case supplémentaire à colorier en bleu dans les figures 2 et 3 des gaufres de 2 colonnes

(2) Plutôt que vérifier les résultats conjecturés pour une gaufre de 20 sur 20, on pouvait peut être donner une démonstration générale ?