Drôle de carrelage

Année 2020 – 2021

Élèves de 3ème : Cyril BOULLIS, Loïc DU LAURENT DE LA BARRE et Alexis FIGUERAS
Elèves de 4ème : Sarah HAOUAM, Oumniya RIFFI ASRI et Eden TRICHEREAU
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91)
Enseignante : Florence FERRY
Chercheur : Olympio HACQUARD

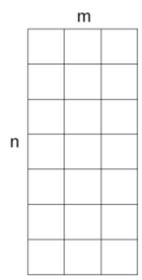
Le sujet : La maison de M. et Mme Prisedetête comporte un couloir de dimension $2 \times n$. Ils ont décidé de carreler ce couloir avec des carreaux de 2×1. M. Prisedetête veut mettre tous les carreaux dans le sens de la largeur et Mme Prisedetête veut les mettre tous dans le sens de la longueur. Arrive l'enfant Prisedetête qui veut mettre les carreaux tantôt dans un sens tantôt dans l'autre.

Mais, au fait combien y a-t-il au total de manières de recouvrir ce couloir avec de tels carreaux ?

Nos résultats : Après avoir pris de nombreux exemples simples, nous avons réussi à conjecturer une suite correspondant au nombre de façons cherchées : la suite de Fibonacci. Nous avons démontré que cette suite correspondait bien à notre problème. Nous avons ensuite élargi le sujet en prenant un couloir de dimension $3 \times n$. Nous avons également trouvé une conjecture nous permettant de calculer le nombre de façons de placer les carreaux pour une valeur de n donnée : la formule trouvée dépend de toutes les étapes précédentes. Nous nous contenterons d'une preuve graphique pour cette conjecture.

I - Couloir de dimension $2 \times n$

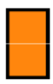
Première remarque : prenons un couloir de dimension quelconque $n \times m$.



2 choix possibles de pose du carreau :

- Horizontalement :

- Verticalement :



Dans la suite de l'article on notera F_n le nombre de possibilités de placer les carreaux pour un couloir de dimension $2 \times n$.

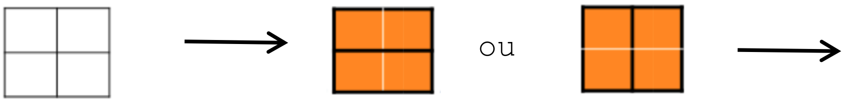
Commençons notre étude en prenant de petites valeurs de n.

1) $n = 1$

Pour $n = 1$, il n'y a qu'une seule façon de poser le carreau.

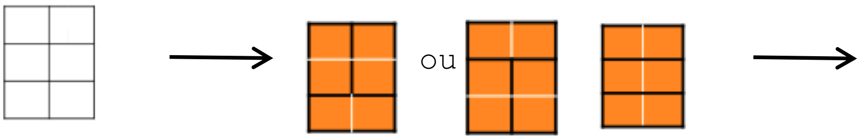
$F_1 = 1$

2) $n = 2$



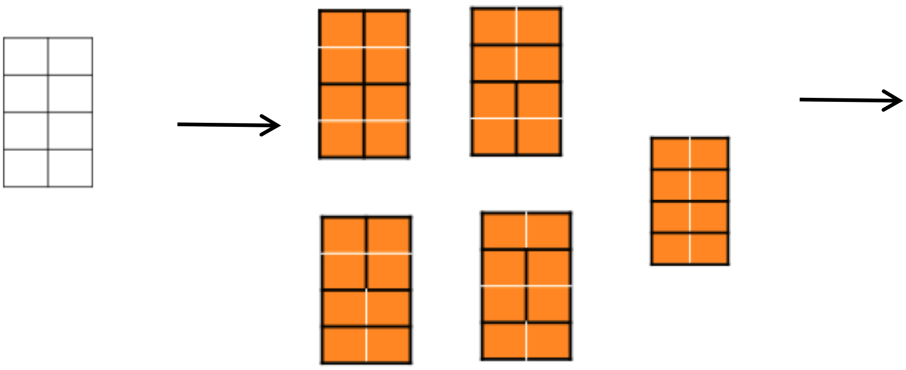
$F_2 = 2$

3) $n = 3$



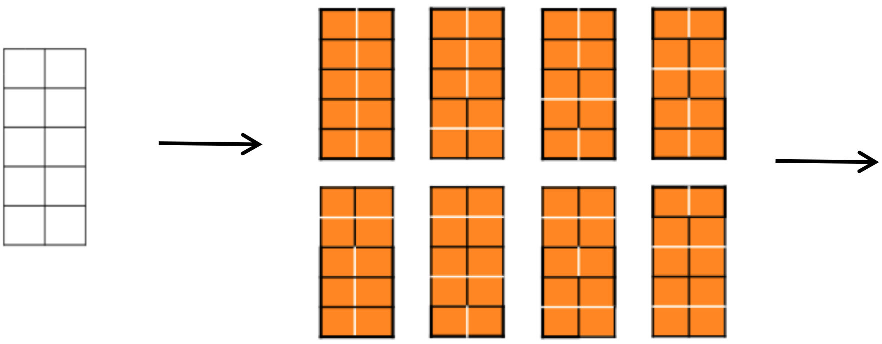
$F_3 = 3$

4) $n = 4$



$F_4 = 5$

5) $n = 5$



$F_5 = 8$

Hum, observez bien ces résultats... Si on les met les uns à la suite des autres on obtient :
1 – 2 – 3 – 5 – 8 … On dirait bien la suite de Fibonacci commençant à partir de son troisième terme ! Mais ce n'est pour l'instant qu'une conjecture.

Qu'est-ce que la suite de Fibonacci ? La suite de Fibonacci est une suite inventée par Leonardo Fibonacci au XIII[e] siècle qui commence par 0 et 1 ; ensuite, chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Voici les premiers termes de la suite :

0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 …

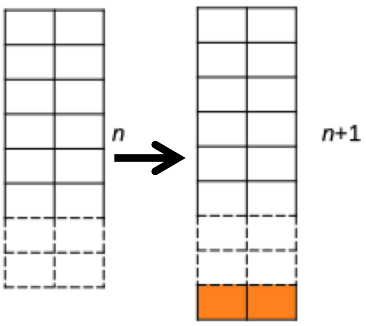
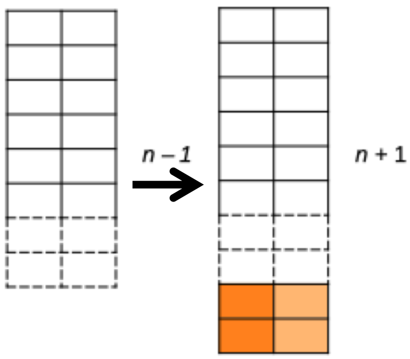
Une preuve

Nous allons démontrer par récurrence que le nombre de façons de poser les carreaux correspond bien à la suite de Fibonacci à partir du troisième terme.

Initialisation
- Pour n = 1 : $F_1 = 1$
- Pour n = 2 : $F_2 = 2$. Nous avons étudié ces deux configurations précédemment.

Supposons maintenant que n est un entier supérieur ou égal à 2 donné, il faut démontrer qu'on obtient F_{n+1} en faisant $F_n + F_{n-1}$.
Pour obtenir F_{n+1} on peut regarder comment on place le dernier carreau, celui qui va recouvrir la dernière case en bas à droite : on le place horizontalement ou verticalement. Si on le place horizontalement, il y a autant de configurations que F_n et si on le place verticalement, celui immédiatement à sa gauche est aussi vertical ; on a, dans ce cas, autant de configurations que F_{n-1}.

Autrement dit, F_{n+1} peut être obtenue de deux façons différentes :

- A partir de F_n : il suffit de rajouter le dernier carreau horizontalement (seule possibilité) à toutes les configurations trouvées au rang n précédent. Illustration  	- A partir de F_{n-1} : les deux derniers carreaux placés peuvent être mis a) horizontalement : ce cas est déjà dans les configurations obtenues à partir de F_n , ci-contre. b) verticalement (c'est donc la seule possibilité). Illustration 

Conclusion : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et notre conjecture est bien démontrée.

Mais que vaut F_n ?

Nous nous sommes ensuite demandés si nous pouvions calculer F_n directement sans calculer tous les F_i précédents. Nous avons trouvé cette formule sur internet qui nous permet de calculer le *n-ième* terme de notre suite tirée de celle de Fibonacci.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) pour\ n \geqslant 1$$

Démonstration par récurrence :

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \times ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}$$

$donc : F_1 = 1$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \times ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^3 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^3) = \frac{1}{2^3\sqrt{5}} \times ((1+\sqrt{5})^3 - (1-\sqrt{5})^3)$$

Calculons d'abord :
$(1+\sqrt{5})^3 = (1+\sqrt{5}) \times (1+\sqrt{5})^2 = (1+\sqrt{5}) \times (1+2\sqrt{5}+5) = 1+2\sqrt{5}+5+\sqrt{5}+10+5\sqrt{5} = 16+8\sqrt{5}$
Puis :
$(1-\sqrt{5})^3 = (1-\sqrt{5}) \times (1-\sqrt{5})^2 = (1-\sqrt{5}) \times (1-2\sqrt{5}+5) = 1-2\sqrt{5}+5-\sqrt{5}+10-5\sqrt{5}$
$= 16-8\sqrt{5}$

Maintenant nous reprenons le calcul du départ.

$$F_2 = \frac{1}{2^3\sqrt{5}} \times ((1+\sqrt{5})^3 - (1-\sqrt{5})^3) = \frac{1}{8\sqrt{5}} \times ((16+8\sqrt{5}) - (16-8\sqrt{5}))$$
$$= \frac{1}{8\sqrt{5}} \times (16+8\sqrt{5}-16+8\sqrt{5})$$

Donc : $F_2 = \frac{1}{8\sqrt{5}} \times (16\sqrt{5}) = \frac{16\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = 2$

Supposons maintenant que :
$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$ et $F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n})$

Calculons F_{n+1}.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}} \times ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n})$$

Donc : $F_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \times ((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}) + \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \times ((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n)$ (1)

On pose : $a = 1+\sqrt{5}$ et $b = 1-\sqrt{5}$

$$F_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \times (a^{n+1} - b^{n+1}) + \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \times (a^n - b^n)$$
$$F_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}\sqrt{5}} \times (2a^{n+1} - 2b^{n+1}) + \frac{1}{2^{n+2}\sqrt{5}} \times (4a^n - 4b^n)$$
$$F_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}\sqrt{5}} \times (2a^{n+1} - 2b^{n+1} + 4a^n - 4b^n)$$
$$F_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}\sqrt{5}} \times (a^{n+2}(\frac{2}{a} + \frac{4}{a^2}) - b^{n+2}(\frac{2}{b} + \frac{4}{b^2})) \text{(1)}$$

On calcule maintenant :

$$\frac{2}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{2+2\sqrt{5}+4}{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}+5} = 1$$

De même on a :

$$\frac{2}{b} + \frac{4}{b^2} = \frac{2}{1-\sqrt{5}} + \frac{4}{(1-\sqrt{5})^2} = \frac{2-2\sqrt{5}+4}{(1-\sqrt{5})^2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{1-2\sqrt{5}+5} = 1$$

Revenons à (1)
$F_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}\sqrt{5}} \times (a^{n+2} - b^{n+2})$ donc : $F_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}\sqrt{5}} \times ((1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2})$

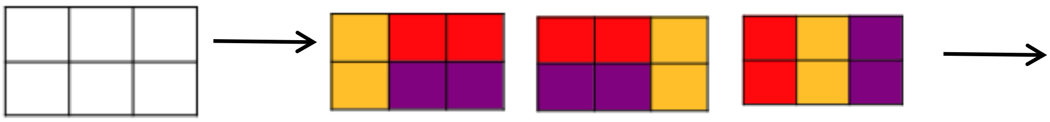
CQFD

II - Couloir de dimension $3 \times n$

Nous allons changer une dimension du couloir et étudier un carrelage de type $3 \times n$.
Nous recommençons notre étude avec de petites valeurs de n.

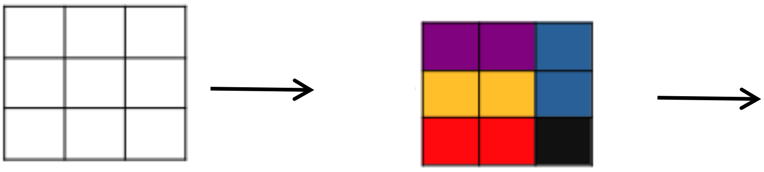
1) $n = 1$
Dans ce cas nous ne pouvons pas recouvrir le couloir entièrement avec les carreaux 2×1.

2) $n = 2$
Nous ajoutons ici des couleurs simplement pour mieux voir la place qu'occupe chaque carreau.



3 façons de carreler.

3) $n = 3$



Impossible !

Lorsque n est impair, il reste un carré seul à la fin donc il sera impossible de placer des carreaux entiers.

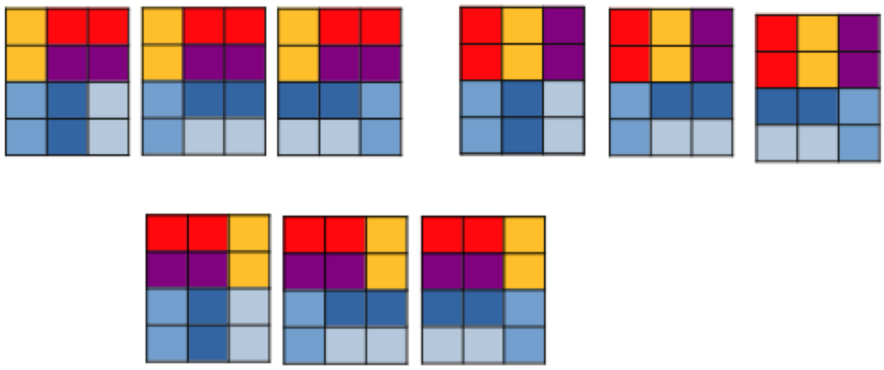
Démonstration
Si on choisit comme unité d'aire, un carré du carrelage, $3 \times n$ correspond à la surface totale du carrelage et aussi au nombre de carrés.
Soit n un nombre entier impair ; il existe alors un nombre x entier positif tel que $n = 2x + 1$.
$3 \times (2x + 1) = 3 \times 2x + 3 \times 1 = 6x + 3 = 6x + 2 + 1 = 2(3x + 1) + 1$ Ce nombre est la somme d'un nombre pair avec 1 c'est donc un nombre impair.
Il y a un nombre impair de carrés ; mais nous devons poser des carreaux composés de deux carrés chacun, ce qui nous fait un nombre pair de carrés au total. D'où l'impossibilité de le faire.

Conclusion : on ne peut carreler un couloir de dimension $3 \times n$ que si n est pair.

Dans la suite on notera Fk le nombre de façons de carreler un couloir de dimension $3 \times 2k$ où k est un entier strictement positif.

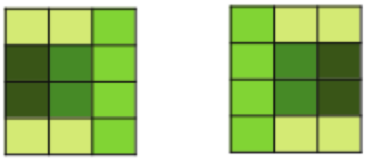
On a trouvé ci-dessus : $F_1 = 3$.

4) $n = 4$
Nous avons d'abord trouvé à la main toutes les configurations possibles puis nous avons essayé de comprendre comment les fabriquer. En s'aidant de ce que nous avions observé pour les couloirs de dimensions $2 \times n$, on est parti des cas du rang $n = 2$ précédent et on a ajouté un bloc de 3×2 : il y a donc 3 possibilités pour chacun, ce qui nous donne déjà $3 \times 3 = 9$ façons différentes de placement des carreaux.



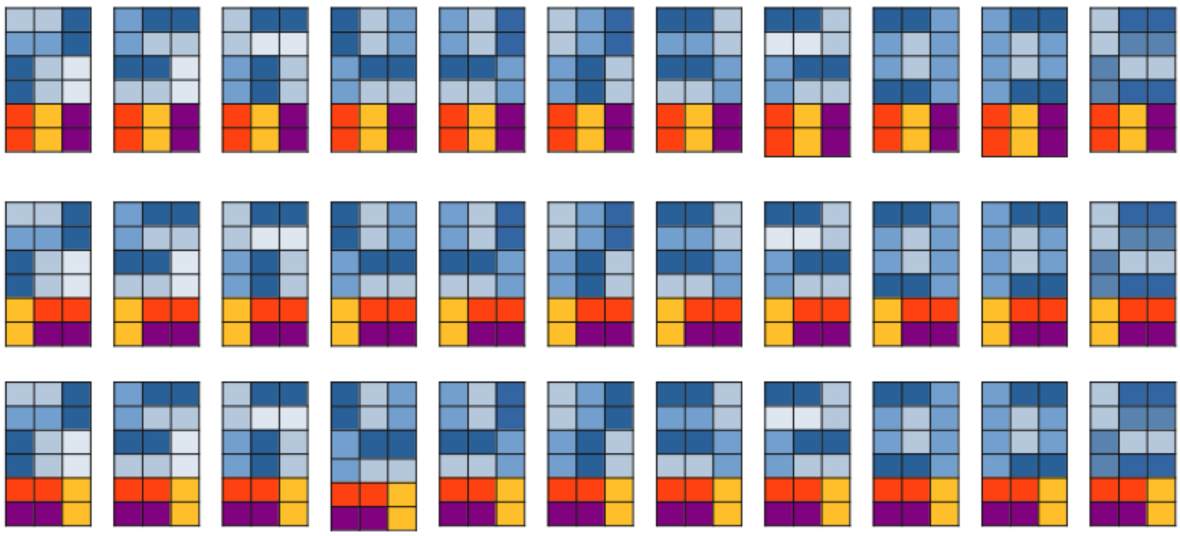
Remarque : Si on ajoute les blocs de 3×2 au dessus au lieu d'en dessous, on retrouve les mêmes configurations.

Une fois terminée cette manipulation, on obtient 9 cas mais nous en avions obtenu 11 à la main. Il y en a deux supplémentaires qu'on ne peut pas obtenir à partir des précédents :



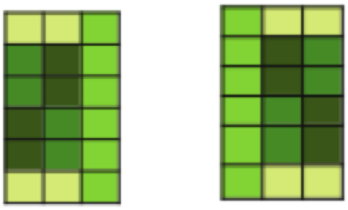
Finalement on a : $F_2 = 3 \times F_1 + 2 = 3 \times 3 + 2 = 11$

5) $n = 6$
Pour ce cas encore, notre recherche s'est faite à la main et nous avons appliqué le même principe pour ne pas en oublier.
On part des 11 configurations précédentes (représentées en bleues sur les figures ci-dessous) auxquelles en ajoute un bloc de dimensions 3×2 ; il y a 3 blocs 3×2 différents donc on obtient $3 \times 11 = 33$ configurations différentes :



Que l'on place les blocs3×2en haut ou en bas, nous obtenons les mêmes 33 cas.
On prend ensuite les 3 configurations au rang encore précédent et on ajoute à chacune d'elles les deux blocs « particuliers »3×4 ce qui nous donne 6 nouveaux cas.

Enfin, il nous reste encore deux cas particuliers, qu'on ne peut pas obtenir à partir des configurations précédentes :



Finalement on a :$F_3 = 3 \times F_2 + 2 \times F_1 + 2 = 3 \times 11 + 2 \times 3 + 2 = 41$

Pour les cas suivants, le nombre de configurations était vraiment trop grand, donc nous avons conjecturé les résultats en généralisant le processus de construction.

Voici la conjecture que nous avons trouvée :

Pour un carrelage (n >1 et n = 2k avec k entier), il suffit de prendre :

- le nombre de carrelages obtenus au rang 2(k – 1) et de multiplier ce nombre par 3 puisqu'on rajoute à chacun l'une des 3 façons de paver un carrelage 3 × 2.

- le nombre de carrelages obtenus au rang 2(k – 2) multiplié par deux puisqu'on ajoute à chacun les 2 pavages particuliers.

- les nombres de carrelages obtenus aux rangs *2(k* – i) (i entier allant de 3 à *k – 1* multiplié par deux puisqu'on ajoute à chacun les 2 pavages particuliers.

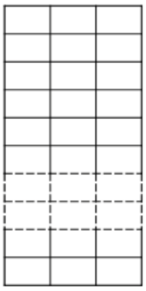
- les 2 pavages particuliers.

Ainsi on a :
$F_1 = 3$
$F_2 = 3 \times F_1 + 2 = 3 \times 3 + 2 = 11$
$F_3 = 3 \times F_2 + 2 \times F_1 + 2 = 3 \times 11 + 2 \times 3 + 2 = 41 F_4 = 3 \times F_3 + 2 \times F_2 + 2 \times F_1 + 2 = 153$
$F_5 = 3 \times F_4 + 2 \times F_3 + 2 \times F_2 + 2 \times F_1 + 2 = 571$

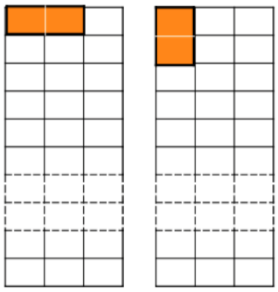
Nous pouvons conjecturer une généralisation de cette formule :
$F_n = 3 \times F_{n-1} + 2 \times F_{n-2} + 2 \times F_{n-3} + \ldots + 2 \times F_1 + 2$

Remarque : F_n dépend de tous les rangs précédents ; nous n'avons pas trouvé de formule explicite dépendant uniquement de n, comme pour le cas 2×n.

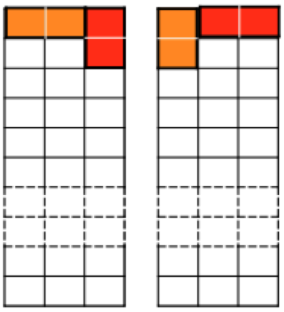
Mais pourquoi n'y a-t-il que deux carrelages « particuliers » non obtenus à partir des pavages précédents ?



Etape 1 : on place la première dalle en haut à gauche ; il n’y a que 2 cas possibles.

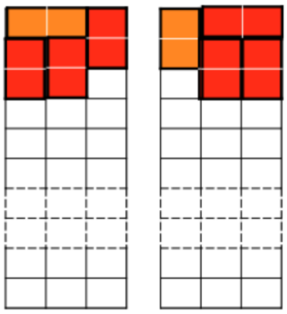


Etape 2 : Pour placer la seconde dalle (rouge).
Cas 1 : on est obligé de la mettre verticalement.
Cas 2 : si on la met verticalement à côté de la dalle orange, on sera obligé de mettre la suivante également verticalement mais c’est un cas qu’on a déjà vu. Donc on doit la placer horizontalement comme le montre le schéma ci-dessous.

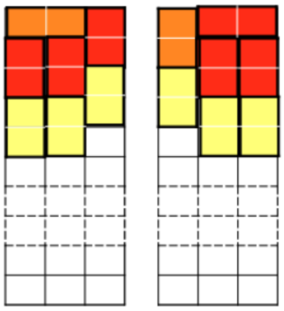


Pour les étapes suivantes nous avons mis les schémas qui expliquent que nous n’avons que deux possibilités (une pour chaque cas) pour placer les dalles.

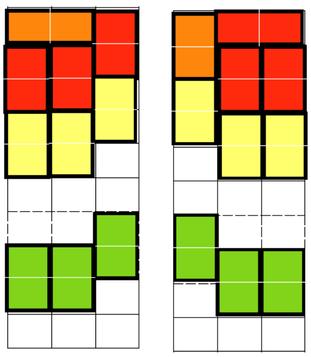
Etape 3



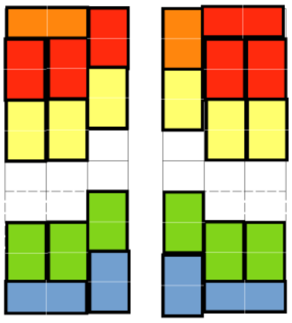
Etape 4



Etape K



Pour les deux dernières dalles à placer, on n'a toujours qu'une seule possibilité.



Ainsi, une fois le démarrage enclenché, tout est déterminé, il n'y a plus de choix. Les seuls choix sont donc les deux positions de la dalle de départ. C'est ce qui explique qu'il n'y a que deux carrelages particuliers.

Nous remercions notre chercheur et notre professeur de nous avoir guidés tout au long de ce projet Math en Jeans.

Notes d'édition

Aucune