Compter des droites finies

année 2012

Tiphaine BARAT, 1ère S
Fanny ORHON, 1ère L
Adèle GIRAUD, 1ère S

Cité Scolaire Môquet-Lenoir

1 Rue de l'Europe 44146 Chateaubriant

Enseignant : M^{r} GREAU

Chercheur : M^{r} DUCROT

I) Sujet

On appelle plan projectif fini un ensemble fini d'éléments appelés points, possédant un certain nombre de sous-ensembles appelés droites. Nous sommes ici dans la géométrie projective, c'est-à-dire que l'on suppose que deux droites quelconques se coupent toujours. On veut que les points et les droites vérifient certaines propriétés :

- deux droites distinctes se coupent toujours exactement en un point ;
- il existe un ensemble F constitué de 4 points, tel qu'aucune droite ne coupe F en plus de 2 points ; **(1)**
- par deux points distincts, il passe exactement une droite.

On cherche à déterminer de tels ensembles.

On commence d'abord par essayer de déterminer des plans de petite taille, comme un plan projectif constitué de 4 points. On cherche à établir une liste des points et des droites de cet ensemble. Cependant, on se rend rapidement compte que c'est impossible.

On cherche ensuite des plans avec un nombre d'éléments de plus en plus grand.

On constate que les plans à moins de 7 éléments ne sont pas réalisables.

On essaye ensuite avec un plan à 7 éléments en commençant par organiser les points sous forme de listes de droites. On obtient la composition suivante :

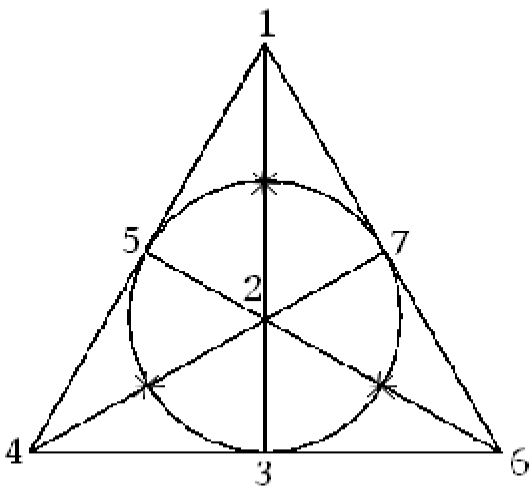
Composition du plan de Fano :

Les 7 points du points sont :
1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7

Les 7 droites du plan sont :

1	**2**	**3**
1	**4**	**5**
1	**6**	**7**
4	**2**	**7**
4	**3**	**6**
4	**5**	**1**
3	**5**	**7**

Une fois avoir réussi à déterminer les 7 droites de l'ensemble en respectant les propriétés énoncées au départ, on cherche à créer une représentation graphique. On obtient le dessin suivant :



Dans cette représentation graphique, les trois points marqués par une étoile apparaissent graphiquement comme des intersections mais ne le sont en fait pas. Le cercle au centre représente une droite.

II) Reformulation du sujet sous

forme de problème

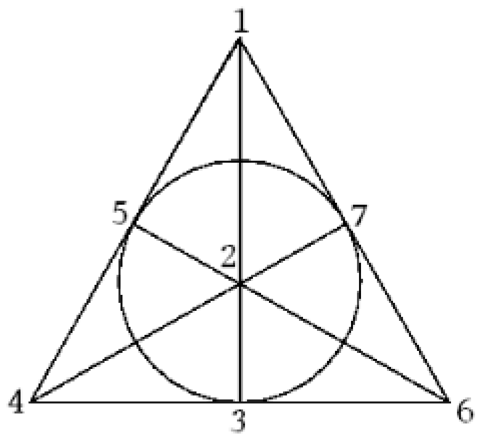
Puisque le sujet n'est pas forcément simple à aborder, on cherche des illustrations plus concrètes.

Exemple 1 :

Un commissaire de police a un effectif de 7 policiers. Pendant une semaine, il est chargé de nommer ses coéquipiers pour monter la garde devant une bijouterie. Cependant, il doit planifier les gardes en respectant certaines conditions : il doit y avoir trois policiers par jour, tous les policiers doivent travailler le même nombre de jours et deux policiers différents ne peuvent monter la garde ensemble qu'une fois par semaine.

Comment le commissaire doit-il organiser son planning ?

La solution à ce problème est en fait le plan de Fano. Chaque point du plan représente un policier tandis que chaque droite représente un jour.



Jour 1 : 1 5 4
Jour 2 : 4 3 6
Jour 3 : 6 7 1
Jour 4 : 1 2 3
Jour 5 : 5 3 7
Jour 6 : 5 2 6
Jour 7 : 4 2 7

Exemple 2 :

Un homme invite 31 personnes chez lui pendant le mois de janvier. Il souhaite passer chaque journée avec six d'entre elles en faisant en sorte de voir tous les invités le même nombre de fois et que deux invités ne passent la journée ensemble qu'une seule fois durant le mois.

Est-ce possible de trouver une organisation respectant ces principes?

Si on pose le même problème au mois d'avril avec 30 personnes, peut-on là encore trouver une organisation respectant ces principes?

Notre sujet revient en fait à chercher les solutions aux problèmes de ce genre et à déterminer s'il existe toujours une solution à ce type de problème.

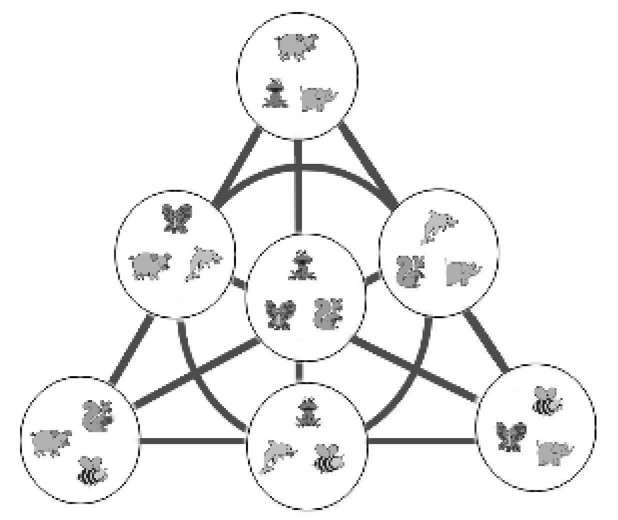
III) Parallèle avec le jeu Dobble

Par hasard nous nous sommes rendu compte que que l'on pouvait faire un parallèle entre notre sujet et le jeu de société « Dobble ».

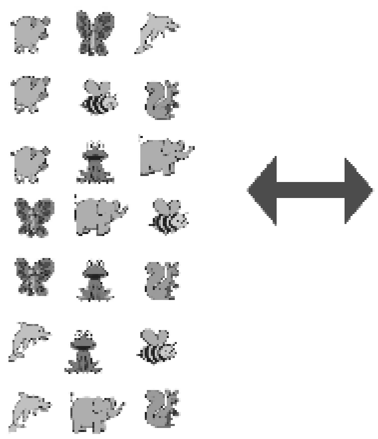
Dobble est un jeu de 55 cartes comportant chacune 8 symboles différents. Les règles du jeu sont les suivantes : on distribue une carte face cachée à chaque joueur puis on pose le tas de cartes restantes au centre, face visible. Les joueurs retournent leur carte en même temps.

Le but du jeu est d'être le premier à identifier le symbole commun entre sa carte et la carte du milieu. Un fois le symbole identifié, il faut le dire à voix haute, prendre la carte du milieu et l'ajouter à son propre tas. En prenant cette carte, une nouvelle carte est révélée. La partie continue jusqu'à ce que les cartes de la pioche aient toutes été récupérées. Le joueur gagnant est celui qui a récupéré le plus de cartes à la fin de la partie.

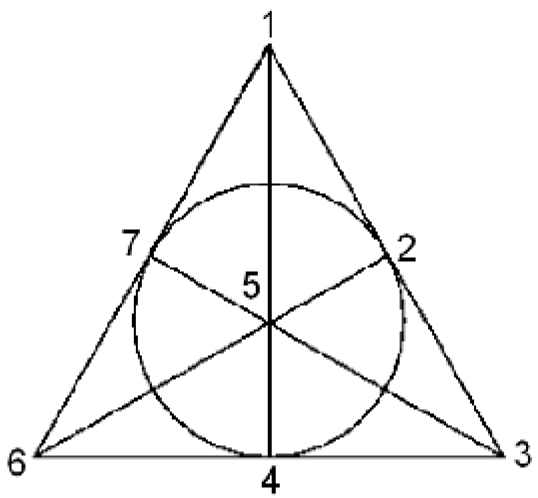
Maintenant, on prend un jeu de Dobble plus petit. Cette fois-ci, il n'y a plus 55 mais 7 cartes, et il n'y a plus 8 mais 3 signes par carte. On dispose les cartes selon les alignements de signe et on trace des lignes qui relient les cartes ayant des signes en commun. On voit apparaître la figure suivante :



Maintenant, on reprend les cartes et on échange les symboles par des nombres Ainsi, à partir de maintenant on ne parlera plus avec des symboles mais plutôt avec des nombres pour rendre les explications plus simples. Chacun des symboles/nombres correspond à un point de l'ensemble, et de même, chacune des cartes peut être assimilée à une droite. L'ensemble constitué des points et des droites correspond au plan de Fano. En remplaçant les nombres par des points, on retrouve le plan de Fano présenté initialement.



1	2	3
1	4	5
1	6	7
2	7	4
2	6	5
3	6	4
3	7	5



IV) Théorèmes de départ

Pour nous permettre d'établir un cas général sur les plans projectifs, il nous a d'abord fallu démontrer deux choses, à savoir que dans les plans projectifs, toutes les droites ont le même nombre de points et que tous les points sont contenus dans un certain nombre de droites.

Théorème 1: Pour toute droite d'un plan projectif, il existe au moins un point n'appartenant pas à cette droite

On prend une droite D. On suppose qu'il n'existe pas de point O tel que O n'appartient pas à D. D'après la propriété selon laquelle par deux points distincts il passe exactement une droite, l'ensemble est donc constitué d'une seule droite constituée de deux points. Or on sait que l'ensemble doit être constitué d'au moins 4 points, tel qu'aucune droite ne coupe F en plus de deux points. **On a donc trouvé un point O n'appartenant pas à D.** (2)

Théorème 2: Dans un plan projectif, toutes les droites doivent avoir le même nombre de points

On considère une droite D avec p points et une droite D' avec n points, avec p différent de n.

Les droites D et D' ont nécessairement un point d'intersection. On place un point O qui n'est ni dans D ni dans D'. Par chaque point P de D et le point O il passe une droite.

Toutes les droites doivent avoir un point d'intersection donc chaque droite passant par P et O doit aussi passer par un point P' de D'. Or D' ne contient pas le même nombre de points que la droite D, il n'est donc pas possible qu'il y ait une droite passant par chaque point de D', par O et par chaque point de D. (3)

On en déduit que n=p et donc dans un plan projectif, toutes les droites doivent donc avoir le même nombre de points.

Théorème 3: Dans un ensemble à n points par droite, tout point est contenu dans n droites

On considère une droite D contenant n points et un point O n'appartenant pas à D. Selon les propriétés de départ, le point O doit apparaître au moins une fois avec chacun des points de l'ensemble. Il existera donc n droites reliant O à chacun des point de D. **(4)**
Dans un ensemble à n points par droite, tout point est contenu dans n droites.

Définition: Ordre d'un plan

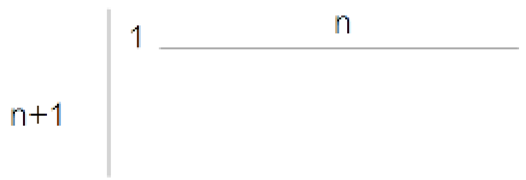
L'ordre n d'un plan projectif correspond au nombre de points par droite moins 1. Par exemple, dans un plan projectif d'ordre 6, il y a 7 points par droites. Un plan d'ordre n a donc n+1 points par droites.

Le plan de Fano est donc un plan projectif d'ordre 2.

V) Nombre de points et de droites d'un plan d'ordre n

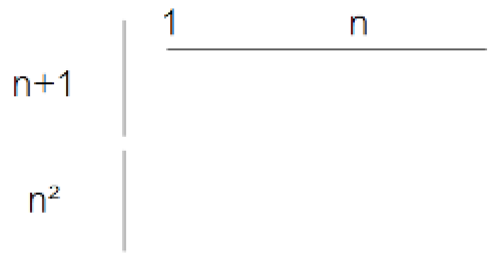
Avec ce que nous venons de démontrer, on veut maintenant déterminer combien de points et de droites sont contenus dans un plan d'ordre n et ensuite établir une méthode permettant de fabriquer un plan projectif.

A) <u>Nombre de points d'un ensemble</u>



On a n+1 points par droite donc selon le théorème 3, le point 1 apparaîtra dans n+1 droites. Dans la première droite, il y a n points derrière le point 1. Ces n points ne pourront pas apparaître encore avec le point 1. Dans les n autres droites débutant par le point 1, il faudra donc n x n autres points. Au total, on aura donc le point 1, plus les n points de la première lignes, plus les n x n autres points. **On a donc n^2+n+1 points dans un plan projectif d'ordre n.** **(5)**

B) <u>Nombre de droites d'un ensemble</u>



On prend le point 1. Selon le théorème 3, il apparaîtra dans n+1 droites. On prend les n autres points qui constituent la première droite. Ils n'apparaissent pour l'instant que dans une droite, ils devront donc chacun encore apparaître dans n droites. Au final, nous auront donc les n+1 droites commençant par 1 et les nxn droites. **On a donc n^2+n+1 droites dans un plan projectif d'ordre n.** **(6)**

C) <u>Construction d'un plan d'ordre 3</u>

Pour commencer, nous choisissons un ensemble d'ordre 3, c'est à dire qu'il y a 4 points par droite. On cherche à trouver le nombre de points et de droites qui composent l'ensemble et leur disposition, tout en veillant à respecter les propriétés de départ.

<u>Étape 1:</u> On sait qu'il y a 4 points par droite, donc chaque point sera contenu dans 4 droites différentes. On prend le premier point qu'on place au début de 4 lignes.

1 _ _ _
1 _ _ _
1 _ _ _
1 _ _ _

<u>Étape 2:</u> On sait qu'il y aura 3 autres points derrière chacun des 4 premières droites. Un point ne peut pas apparaître deux fois avec le même point, on doit donc rajouter 12 points

différents.

1	2	3	4
1	5	6	7
1	8	9	10
1	11	12	13

On cherche à construire un plan d'ordre 3. Ce plan doit donc avoir $n^2+n+1=13$ points, ce que vérifie pour l'instant notre méthode.

Étape 3: On sait que le 2nd point sera contenu dans 4 droites. Il est déjà présent dans une droite, donc il apparaîtra dans 3 autres droites. On place un point 2 au début de 3 nouvelles droites.

1	2	3	4
1	5	6	7
1	8	9	10
1	11	12	13
2			
2			
2			

Étape 4: On effectue la même opération avec les points 3 et 4. Au final, on obtient 13 droites.

1	2	3	4		3
1	5	6	7		3
1	8	9	10		3
1	11	12	13		4
2					4
2					4
2					

Étape 5: Maintenant, on pourrait être tenté de faire la même chose avec les autres points. Or, on prend par exemple le point 5. Pour le moment, il n'apparait que dans une seule droite. Il faut qu'il apparaisse encore 3 fois. Pour le moment, il est apparu avec le 1, le 6 et le 7. Il n'est pas apparu avec le 2 et 3. On place donc un 5 au début d'une droite commençant par 2 et d'une droite commençant par 3.

1	2	3	4		3	5
1	5	6	7		3	
1	8	9	10		3	
1	11	12	13		4	5
2	5				4	
2					4	
2						

Étape 6: On effectue la même opération avec le 6 et le 7 (il faut obtenir 5 – 6 – 7 verticalement)

1	2	3	4		3	5
1	5	6	7		3	6
1	8	9	10		3	7
1	11	12	13		4	5
2	5				4	6
2	6				4	7
2	7					

Étape 7: La dernière étape consiste à placer tous les autres points de la même manière en veillant à respecter les propriétés de départ.

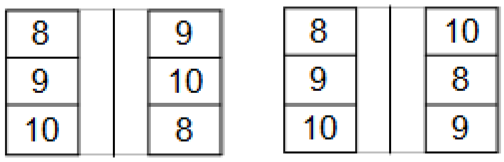
1	2	3	4		3	5	10	12
1	5	6	7		3	6	8	13
1	8	9	10		3	7	9	11
1	11	12	13		4	5	9	13
2	5	8	11		4	6	10	11
2	6	9	12		4	7	8	12
2	7	10	13					

Grâce à cette méthode, nous avons pu

déterminer l'organisation de plans d'ordre 2, 3, 5, 7 et 11. En revanche, cette méthode ne fonctionne pas pour constuire des plans d'ordre 4 et 8.

VI) Construire un plan d'ordre 4 et 8

On observe plus précisément la méthode de construction d'un tableau d'ordre 3. Lors du remplissage des deux dernières colonnes (étape 7), on effectue une opération différente des autres puisque nous devons « décaler » à chaque fois les nombres afin qu'ils ne retombent jamais les uns avec les autres. On répertorie donc rigoureusement les combinaisons (les décalages effectués) à partir d'un modèle référent. Le modèle référent est la base de la combinaison grâce auquel nous pourrons les comparer entre elles. On prend pour référent la suite 8 ;9 ;10.

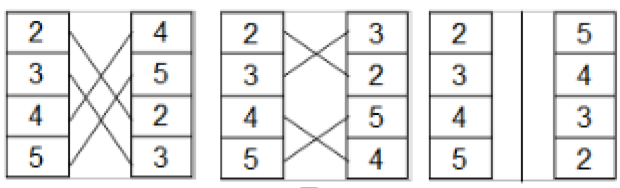


+1 +2

Nous observons donc que la première combinaison (celle de gauche) décale juste les nombres d'une place vers le bas. La seconde combinaison (celle de droite) décale les nombres de deux places vers le bas. Nous avons utilisé le même processus (assembler des combinaison en augmentant de un les places décalées) avec tous les autres ordres possibles.

Mais, un problème est survenu avec les tableaux d'ordre 2^k (k supérieur ou égal à 2). En effet, cela donnerait un tableau faux dans lequel les nombres se croiseraient plusieurs fois. Il fallait donc trouver une autre technique permettant de résoudre ces tableaux.

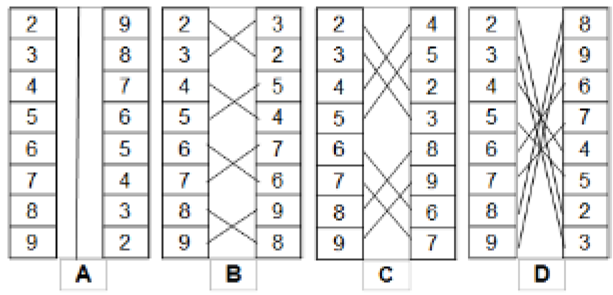
Tout d'abord par hasard, puis par logique, nous avons cherché d'autres combinaisons permettant le bon déroulement de la construction du tableau.

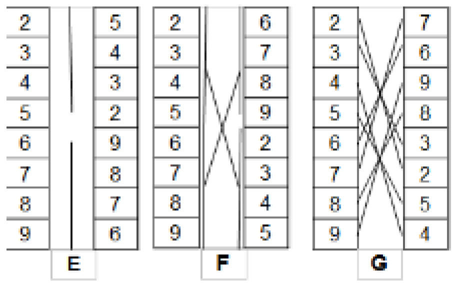


A B C

Voici trois combinaisons qui vont nous permettre de remplir un tableau d'ordre 4. On trouve trois combinaisons. En ajoutant le référent (2;3;4;5), la somme est 4 et cela semble logique.

En ajoutant deux fois la même combinaison, on retourne au référent de base. Donc, s'il y a un nombre pair de la même combinaison, elle s'annule. On comprend donc que nous devons trouver n-1 combinaisons pour remplir un tableau de n+1 points par droite. On essaie alors, avec la même technique de faire un tableau d'ordre 8.





En arrangeant les combinaisons, on arrive à construire un tableau d'ordre 8 (voir l'annexe.)

On peut ainsi se demander s'il est possible de réaliser tous les tableaux dont les ordres sont une puissance de deux grâce à cette méthode.

VII) Résolution des problèmes de départ

On reprend le problème cité au début du sujet, à savoir : Un homme invite 31 personnes chez lui pendant le mois de janvier. Il souhaite passer chaque journée avec six d'entre elles en faisant en sorte de voir tous les invités le même nombre de fois et que deux invités ne passent la journée ensemble qu'une seule fois durant le mois. On pose le même problème au mois d'avril. Est-il possible de résoudre ces deux problèmes, et si oui comment ? Tous les problèmes de ce genre sont-ils résolubles ?

Grâce à ce que nous avons montré, nous sommes à présent en mesure de répondre au problème. L'action se passe au mois de janvier, un mois comprenant 31 jours, il y a 31 invités en tout et 6 invités par jour.

En regroupant ces informations, on voit que la solution est un plan d'ordre 5. En effet, en considérant une journée comme une droite et un invité comme un point, on a 6 points par droite, donc un ordre 5. $5^2+5+1=31$, on devra donc avoir 31 points et 31 droites en tout. Cela correspond bien aux informations de départ, donc le problème est résolu en associant un prénom à chaque nombre.

Si on pose le même problème au mois d'avril, il n'y a plus que 30 jours. On doit donc chercher à résoudre $n^2+n+1=30$. Les solutions de ce trinôme sont environ 4,91 et -5,91. Or l'ordre du plan doit être un nombre entier, donc on ne peut pas résoudre ce problème.

VIII) Conclusion

Bien que nous ne soyons pas en mesure de le démontrer, nous savons que pour qu'un plan projectif respectant les propriétés énoncées au départ soit réalisable, il faut que l'ordre du plan soit un nombre premier ou une puissance de nombre premier.

En établissant un cas général sur les plans projectifs, nous avons montré que si un plan projectif d'ordre n existe, il est toujours composé de n^2+n+1 droites et de n^2+n+1 points.

Enfin, grâce à la première méthode de remplissage que nous avons mise en place, nous pouvons établir l'organisation des plans d'ordre 2, 3, 5, 7 et 11.

Cependant, comme elle ne fonctionne pas pour les plans dont l'ordre est une puissance de 2 (sauf l'ordre 2), nous avons trouvé une autre méthode qui nous a permis de trouver l'organisation des plans d'ordre 4 et 8.

Notes de l'édition

(1) Cette hypothèse est ajoutée pour éviter les plans projectifs dits « triviaux », par exemple, le cas d'une unique droite contenant tous les points, comme démontré par la suite dans le théorème 1.

(2) Attention, le fait qu'il n'y ait qu'une droite ne signifie pas immédiatement que le nombre de points est nécessairement deux.

(3) Il est ici implicitement supposé que pour toute paire de droites, il existe un point n'appartenant à aucune des deux droites. Ce résultat est un peu compliqué à montrer, mais il est juste.

(4) Il manque ici deux points qui sont justes :
1/ pour tout point, il existe une droite ne contenant pas ce point
2/ par un point ne passent pas *plus* de n droites

(5) Il est montré ici qu'un plan projectif contient *au moins* n^2+n+1 points. Il manque un petit argument : s'il existait un point p que nous n'avions pas compté précédemment, par construction, il n'existe pas de droite passant par p et par le point 1, ce qui est contraire aux hypothèses.

(6) La preuve donnée compte *toutes* les droites coupant la première droite passant par le point 1. Comme par hypothèse, toutes les droites se coupent, il ne peut pas y avoir d'autre droite.

IX) Annexe :

Voici l'exemple de quelques plans plus grands

Ordre 5:

1	2	3	4	5	6
1	7	8	9	10	11
1	12	13	14	15	16
1	17	18	19	20	21
1	22	23	24	25	26
1	27	28	29	30	31
2	7	12	17	22	27
2	8	13	18	23	28
2	9	14	19	24	29
2	10	15	20	25	30
2	11	16	21	26	31
3	7	13	19	25	31
3	8	14	20	26	27
3	9	15	21	22	28
3	10	16	17	23	29
3	11	12	18	24	30

4	7	14	21	23	30
4	8	15	17	24	31
4	9	16	18	25	27
4	10	12	19	26	28
4	11	13	20	22	29
5	7	15	18	26	29
5	8	16	19	22	30
5	9	12	20	23	31
5	10	13	21	24	27
5	11	14	17	25	28
6	7	16	20	24	28
6	8	12	21	25	29
6	9	13	17	26	30
6	10	14	18	22	31
6	11	15	19	23	27

Ordre 8:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	11	12	13	14	15	16	17
1	18	19	20	21	22	23	24	25
1	26	27	28	29	30	31	32	33
1	34	35	36	37	38	39	40	41
1	42	43	44	45	46	47	48	49
1	50	51	52	53	54	55	56	57
1	58	59	60	61	62	63	64	65
1	66	67	68	69	70	71	72	73
2	10	18	26	34	42	50	58	66
2	11	19	27	35	43	51	59	67
2	12	20	28	36	44	52	60	68
2	13	21	29	37	45	53	61	69
2	14	22	30	38	46	54	62	70
2	15	23	31	39	47	55	63	71
2	16	24	32	40	48	56	64	72
2	17	25	33	41	49	57	65	73
3	10	25	27	36	48	53	62	71
3	11	24	26	37	49	52	63	70
3	12	23	29	34	46	51	64	73
3	13	22	28	35	47	50	65	72
3	14	21	31	40	44	57	58	67
3	15	20	30	41	45	56	59	66
3	16	19	33	38	42	55	60	69
3	17	18	32	39	43	54	61	68
4	10	19	28	40	45	54	63	73
4	11	18	29	41	44	55	62	72
4	12	21	26	38	43	56	65	71
4	13	20	27	39	42	57	64	70
4	14	23	32	36	49	50	59	69
4	15	22	33	37	48	51	58	68
4	16	25	30	34	47	52	61	67
4	17	24	31	35	46	53	60	66
5	10	20	32	37	46	55	65	67
5	11	21	33	36	47	54	64	66
5	12	18	30	35	48	57	63	69
5	13	19	31	34	49	56	62	68
5	14	24	28	41	42	51	61	71
5	15	25	29	40	43	50	60	70
5	16	22	26	39	44	53	59	73
5	17	23	27	38	45	52	58	72
6	10	24	29	39	47	57	59	68
6	11	25	28	39	46	56	58	69
6	12	22	27	40	49	55	61	66
6	13	23	26	41	48	54	60	67
6	14	20	33	34	43	53	63	72
6	15	21	32	35	42	52	62	73
6	16	18	31	36	45	51	65	70
6	17	19	30	37	44	50	64	71
7	10	21	30	39	49	51	60	72
7	11	20	31	38	48	50	61	73
7	12	19	32	41	47	53	58	70
7	13	18	33	40	46	52	59	71
7	14	25	26	35	45	55	64	68
7	15	24	27	34	44	54	65	69
7	16	23	28	37	43	57	62	66
7	17	22	29	36	42	56	63	67
8	10	22	31	41	43	52	64	69
8	11	23	30	40	42	53	65	68
8	12	24	33	40	42	53	65	68
8	13	25	32	38	44	51	63	66
8	14	18	27	37	47	56	60	73
8	15	19	26	36	46	57	61	72
8	16	20	29	35	49	54	58	71
8	17	21	28	34	48	55	59	70
9	10	23	33	35	44	56	61	70
9	11	22	32	34	45	57	60	71
9	12	25	31	37	42	54	59	72
9	13	24	30	36	43	55	58	73
9	14	19	29	39	48	52	65	66
9	15	18	28	38	49	53	64	67
9	16	21	27	41	46	50	63	68
9	17	20	26	40	47	51	62	69

A B C D E F G