Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Dessine-moi Fibonacci !

2017-2018

Nom, prénom et niveaux des élèves : CASUNEANU Otilia, CIOATA Larisa, GHERGHEL Stefan, HODY Eloïse, MARTIN Simon, ORBAN Victor, RUGIGANA Lisa, UNGUREANU Tudor

Établissement : Collège Sainte-Véronique Belgique - Collège National Iasi Roumanie

Enseignant(s) : GERARD Sophie, GURDAL Pascaline, HANSEN Dylan, KIRSH Sébastien, LACROIX Anne, LEBEL Céline, SCHIERES Sandrine, ZANOSCHI Gabriela Elena

Chercheur(s) : AERTS Stéphanie, ERNST Marie, LEROY Julien, VANDERMEER Marion (Université de Liège) et VOLF Claudiu (Iasi)

1 Introduction

1.1 Construction de la suite

Nous avons travaillé sur une suite W composée de nombres composés de 0 et 1.
Pour construire cette suite, nous commençons par 0 (nous avons décidé de l'appeler W_0), et, pour passer de chaque nombre à son suivant (nous avons décidé d'appeler le n-ième nombre de cette suite W_n), on transforme tout les 0 en 01 et tout les 1 en 0 (cette transformation sera notée φ) :

$$0 \Rightarrow 01$$

$$1 \Rightarrow 0$$

Les premiers nombres sont :

$$W_0 = 0$$

$$W_1 = 01$$

$$W_2 = 010$$

$$W_3 = 01001$$

$$W_4 = 01001010$$

...

En effet, pour passer, par exemple, de $W_2 = 010$ à W_3, on applique φ, cela transforme le premier 0 en 01, le 1 en 0 et le deuxième 0 en 01 :

W_2 :	0	1	0	$\Rightarrow$	010
W_3 :	01	0	01	$\Rightarrow$	010101

1.2 Partie graphique

A chaque nombre de cette série, nous avons associé une courbe. Elle est construite comme ceci : chaque chiffre donne un segment de longueur 1. le premier 0 du nombre donnera un segment horizontal allant de gauche à droite, ensuite, on suit la règle de construction suivante :

si on a un 1, on continue le trait dans la même direction

si on a un 0, on tourne,

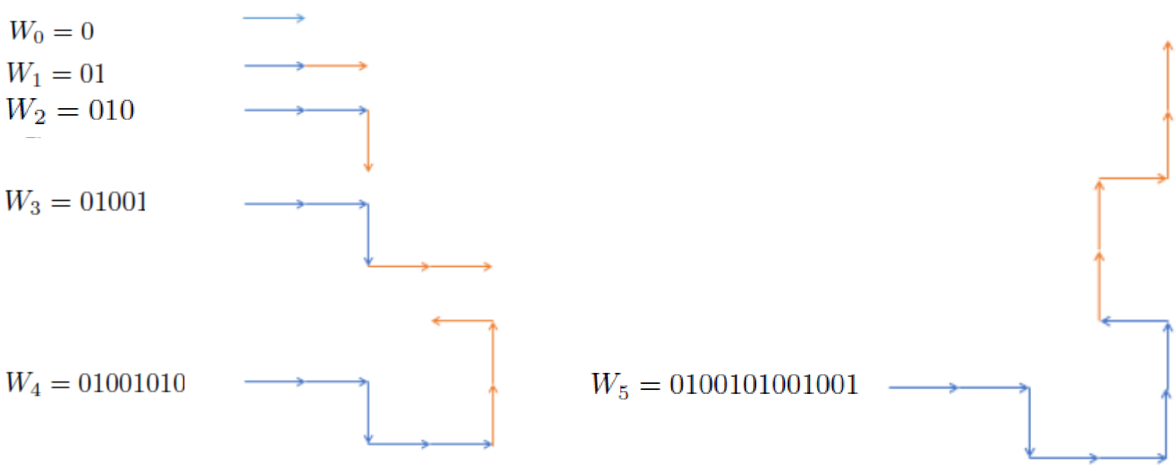
— de 90° vers la **droite** si la position du chiffre dans le nombre est **pair**,

— de 90° vers la **gauche** si la position du chiffre dans le nombre est **impair**.

Par exemple pour construire la courbe associée à W_3 :

W_3	0	1	0	0	1
position	0	1	2	3	4
changement de direction	horizontal	même dir.	tourner à droite	tourner à gauche	même dir.
direction	droite	droite	bas	droite	droite

Les premières courbes sont celles-ci :



2 Les questions de recherche

Nous avons, au cours de l'année, tenté de répondre à différentes questions qui sont celles-ci :
1) Combien y a-t-il d'angles droits et d'angles plats dans chaque courbe ?
2) Comment passer graphiquement d'une courbe à la suivante ?
3) Si on continuait à l'infini, la courbe s'intersecterait-t-elle ?

3 Réponse à la question 1

Combien y a-t-il d'angles droits et d'angles plats dans chaque courbes ?

Tout d'abord, grâce à la définition de la construction de la courbe, nous savons que **le nombre d'angles droit présents dans la courbe est égal au nombre de** 0 **diminué de** 1 **de la série correspondante** comme chaque 0 donne un angle de 90° sauf le premier qui donne un segment horizontal. Ensuite, **chaque** 1 **donne un angle plat**.

Nous avons remarqué que le nombre de 0 dans W_n (que nous avons décidé de noter W_n^0) était égal à la longueur de la suite W_{n-1} (notée $|W_{n-1}|$). En effet, comme la transformation φ transforme les 1 en 0 et les 0 en 01, chaque nombre transformé donnera un et un seul 0.

Par un même raisonnement, on peut établir que le nombre de 1 dans la suite W_n (noté W_n^1) est égal à $W_{n-1}^0 = |W_{n-2}|$ comme seuls les 0 donnent un 1 par φ.

Ensuite nous avons trouvé que

$$W_n^0 = F_{n+1}$$

où F_{n+1} représente le $(n+1)$-ième nombre de la suite de Fibonacci. La suite de Fibonacci est définie comme tel : $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Chaque nombre de la suite est la somme des 2 précédents. Les premiers termes sont : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$. Nous avons prouvé cette égalité par récurrence : d'abord, on montre que l'égalité est vraie pour un petit nombre (c'est l'induction [1]), ensuite on montre que si c'est vrai pour un nombre, c'est aussi vrai pour le nombre suivant (c'est la récurrence). [2]

a) induction :
$W_0 = 0 \Rightarrow W_0^0 = 1 = F_1$
$W_1 = 01 \Rightarrow W_1^0 = 1 = F_2$

b) récurrence :
si $W_k^0 = F_{k+1}$ et $W_{k+1}^0 = F_{k+2}$, montrons que $W_{k+2}^0 = F_{k+3}$.
On a prouvé plus haut que $W_{k+1}^1 = W_k^0 = F_{k+1}$.
Comme la suite n'est faite que de 0 et 1, il y a $W_{k+1}^1 + W_{k+1}^0 = F_{k+1} + F_{k+2} = F_{k+3}$ nombres dans W_{k+1}, et donc $W_{k+2}^0 = |W_{k+1}| = F_{k+3}$.

De cette égalité, on peux déduire que $\boxed{|W_n| = W_{n+1}^0 = F_{n+1+1} = F_{n+2}}$. On peut aussi en déduire que $\boxed{W_n^1 = W_{n-1}^0 = F_{n-1+1} = F_n}$.

$\lvert W_n\rvert$	W_n^0	W_n^1
$\lvert W_n\rvert$	$\lvert W_{n-1}\rvert$	$\lvert W_{n-2}\rvert$
F_{n+2}	F_{n+1}	F_n

Grâce à ces égalités, on peut répondre à la question :

Il y a $F_{n+1} - 1$ angles droits et F_n angles plats dans la n-ième courbe.

4 Réponse à la question 2

Comment passer graphiquement d'une courbe à la suivante ?

Nous avons découvert que W_n était égal à W_{n-1} et W_{n-2} concaténé (c'est-à-dire mis bout à bout). Nous avons décidé de symboliser la concaténation de W_{n-1} et W_{n-2} par $W_{n-1} \circ W_{n-2}$. Notons W', la suite définie comme suit : $W'_0 = 0$, $W'_1 = 01$ et $W'_n = W'_{n-1} \circ W'_{n-2}$. Nous devons prouver que $W = W'$. Nous allons le prouver par récurrence.

a) induction :
$W_0 = 0 = W'_0$.
$W_1 = 01 = W'_1$.
$W_2 = 010 = W'_0 \circ W'_1 = W'_2$.
b) récurrence :
Si $W_m = W'_m$,$\forall m < n$, montrons que $W_n = W'_n$:

$$\begin{aligned}
W_n &= \varphi(W_{n-1}) \\
&= \varphi(W'_{n-1}) \\
&= \varphi(W'_{n-2} \circ W'_{n-3}) \\
&= \varphi(W'_{n-2}) \circ \varphi(W'_{n-3}) \\
&= \varphi(W_{n-2}) \circ \varphi(W_{n-3}) \\
&= W_{n-1} \circ W_{n-2} \\
&= W'_{n-1} \circ W'_{n-2} \\
&= W'_n
\end{aligned}$$

Comme $W_n = W_{n-1} \circ W_{n-2}$, la courbe associée à W_n sera composée de W_{n-1} et W_{n-2}.
Pour passer de la courbe associée à W_n à la courbe W_{n+1}, on prend la courbe W_n puis on y ajoute la courbe W_{n-1} avec :
— une rotation vers la droite si $|W_n|$ est paire.
— une rotation vers la gauche et une symétrie orthogonale si $|W_n|$ est impaire.
La rotation apparait à cause du premier 0 de W_{n-1} qui, à la place d'être un simple segment horizontal, devient un segment avec une rotation

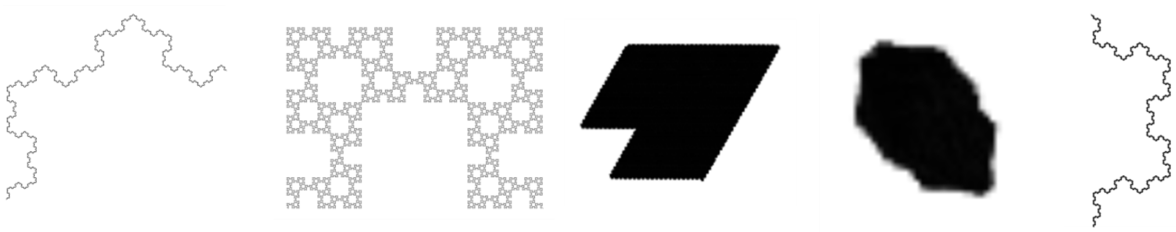
— vers la droite si la position du 0 est pair donc si $|W_n|$ est paire. En effet, la position du dernier chiffre de W_n sera $|W_n| - 1$ comme la position du premier 0 est 0. Le premier chiffre de W_{n-1} sera en position $|W_n| - 1 + 1 = |W_n|$.

— vers la gauche si la position du 0 est impair donc si $|W_n|$ est impaire.

La symétrie orthogonale apparait lorsque $|W_n|$ est impaire car la position de tous les 0 de W_{n-1} a changé de parité, donc tout les 0 formeront des angles dans l'autre sens que dans W_{n-1}. L'axe de symétrie est la droite passant par le premier segment de W_{n-1}.

5 Réponse à la question 3

Malheureusement, nous n'avons rien prouvé de très concret pour répondre à cette question. Nous pouvons juste conjecturer que c'est une fractale et qu'elle ne s'intersectera jamais. Une fractale est une figure géométrique qui, lorsque l'on zoom dessus donne exactement la même figure.
Nous avons aussi remarqué en changeant l'amplitude des angles formés par le chiffre 0 que cela faisait aussi une fractale lorsque l'angle était compris entre $-90°$ et $90°$. En revanche, quand l'angle était compris entre $90°$ et $270°$, cela s'intersectait. Voici quelques courbes dépendant de l'amplitude des angles formé par les 0 :



60° 90° 120° 220° 300°

6 Quelques propriétés intéressantes

Au cours de l'année, nous avons fait d'autres découvertes à propos de ces courbes mais qui sortent du cadre de nos questions initiales. En voici quelques unes :

6.1 Deux 1 ne peuvent pas être consécutifs

En effet, comme $\varphi(0) = 01$ et $\varphi(1) = 0$, à chaque fois qu'il y a un 1 , un 0 le précède.

6.2 Trois 0 ne peuvent pas être consécutifs

Comme $\varphi(0) = 01$ et $\varphi(1) = 0$, le seul moyen d'avoir trois 0 consécutifs est d'avoir $\varphi(110)$ ou $\varphi(111)$, ce qui, comme montré ci-dessus, est impossible.

6.3 W_n se termine par 0 si n est pair et par 1 si n est impair

On peut le prouver facilement par récurrence :
a) induction :
W_0 finit par 0 and W_1 finit par 1.
b) récurrence :

- Si W_k finit par 0 et k est pair, $k+1$ est alors impair et $\varphi(0) = 01$, ce qui entraîne que W_{k+1} finit par 1.
  $k+2$ est alors pair et $\varphi(\varphi(0)) = 010$, et donc W_{k+2} se termine par 0.
- Si W_k finit par 1 et k est impair, $k+1$ est alors pair et $\varphi(1) = 0$, et donc W_{k+1} finit par 0.
  $k+2$ est impair et $\varphi(\varphi(1)) = 01$. Donc W_{k+2} se termine par 1.

6.4 Deux 0 ne peuvent pas terminer un nombre de la série

A part W_0, toutes les séries paires se terminent par 10 comme $\varphi(\varphi(0)) = 010$.

6.5 Chaque nombre commence par 0

a) induction :
$W_0 = 0$
b) récurrence :
si $W_k = 0...$, comme $\varphi(0) = 01$, $W_{k+1} = 01....$

7 Conclusion et remerciements

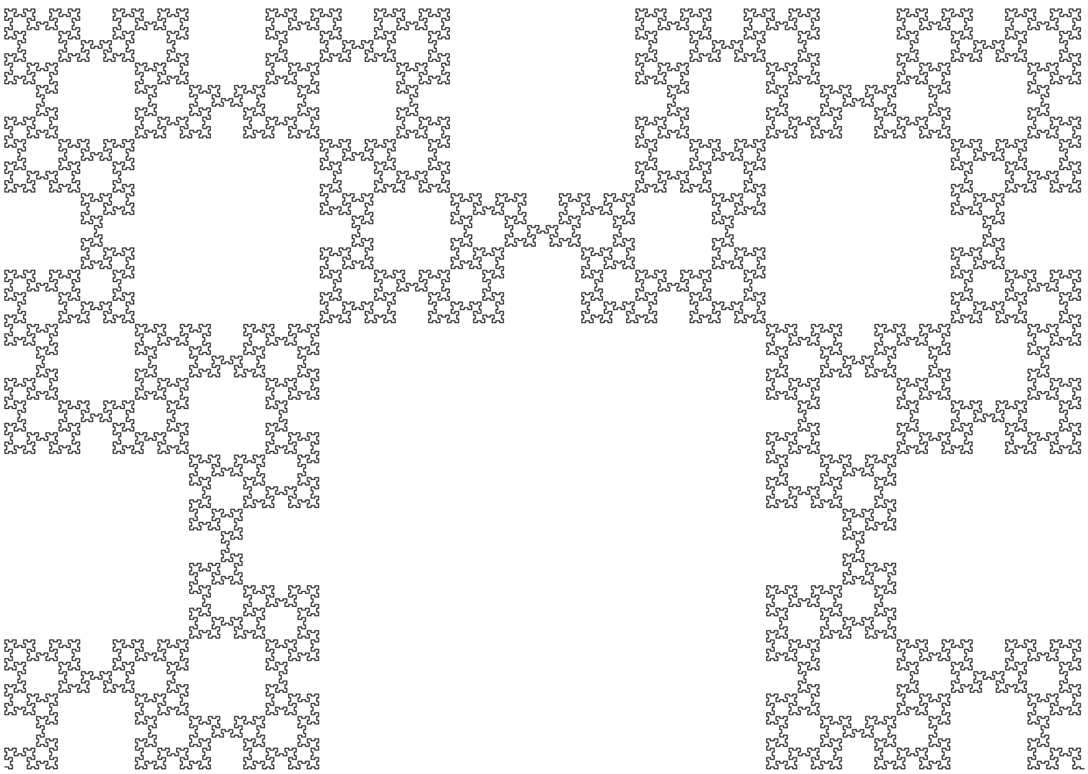
Lors de cette année, nous avons pu trouver beaucoup de propriétés relatives à ce sujet. Il a été déjà travaillé par des mathématiciens , ces courbes portent les noms de fractales de Fibonacci et les nombres celui de mots de Fibonacci.

Cette année, nous étions en partenariat avec le Collège National de Iasi, Roumanie. Nous étions en groupe avec Otilia Casuneanu, Larisa Cioata, Stefan Gherghel et Tudor Ungureanu. Nous avons communiqué avec eux en anglais. Nous avons pu vivre cet échange grâce à Erasmus+ que nous tenons à remercier.

Nous tenons aussi à remercier nos professeurs du Collège Sainte-Véronique : Mme GERARD Sophie, Mme GURDAL Pascaline, Mr HANSEN Dylan, Mr KIRSH Sébastien, Mme LACROIX Anne, Mme LEBEL Céline et Mme SCHIERES Sandrine et du Collège national : Mrs ZANOSCHI Gabriela Elena qui nous ont aidés chaque semaine au cours de cette année. Nous aimerions aussi remercier Mme AERTS Stéphanie, Mme ERNST Marie, Mr LEROY Julien et Mme VANDERMEER Marion du département de Mathématiques de l'université de Liège et Dr VOLF Claudiu de l'université de Iasi qui nous ont épaulés au cours de cette année et nous ont proposé ce sujet.

Enfin nous tenons à remercier les membres du projet MATh.en.JEANS sans lequel rien de tout ceci n'aurait été possible.

Pour finir cet article en beauté, voici la courbe associée à W_{23} : [3]



8 Notes d'édition

[1] Cette étape du raisonnement par récurrence est en général plutôt appelée "étape d'initialisation".

[2] Précisons un peu le raisonnement des auteurs :
On note $|W_n|$ le nombre de chiffres de W_n, et on note W_n^0 et W_n^1 les nombres de 0 et de 1 dans W_n. On a bien sûr : $|W_n| = W_n^0 + W_n^1$.
Par ailleurs les auteurs prouvent que $W_n^0 = |W_{n-1}|$ et $W_n^1 = |W_{n-2}|$. On en déduit $|W_n| = |W_{n-1}| + |W_{n-2}|$.
Comme par ailleurs, les auteurs remarquent que $|W_0| = 1 = F_2$ et $|W_1| = 2 = F_3$, ils en déduisent par un raisonnement par récurrence que pour tout entier n, on a $|W_n| = F_{n+2}$.

[3] Dommage que les auteurs n'aient pas indiqué ici l'algorithme qui leur a permis de dessiner cette belle courbe !