DOMINOS ANTHRAGONIENS

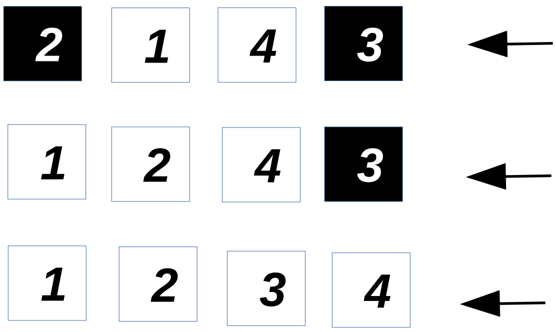
Année 2018 - 2019

<u>Élèves de 4ème</u> : Suzie BAUER, Maya HENZSEL, Alyssa KCHOK, Camille ROUSSEAU.
<u>Établissement</u> : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
<u>Enseignants</u> : Florence Ferry et Claudie Asselain.
<u>Chercheur</u> : Raphaël Tinarrage.

<u>Le sujet</u> : Les règles du jeu des dominos anthragoniens sont très simples. Dans un jeu complet, il y a quatre dominos numérotés de un à quatre, avec chacun une face blanche et une autre noire. A partir d’un arrangement initial proposé par un joueur, son adversaire doit mettre en moins de treize coups les quatre dominos dans l’ordre et avec leur face blanche visible. A chaque coup on doit :
- permuter deux dominos adjacents
- et, en même temps, retourner un de ces dominos.
Si l’on n’y parvient pas en moins de treize coups, on a perdu.
Quels sont les arrangements initiaux qui permettent de gagner ?

I – Exemples de jeux

Exemple 1 :

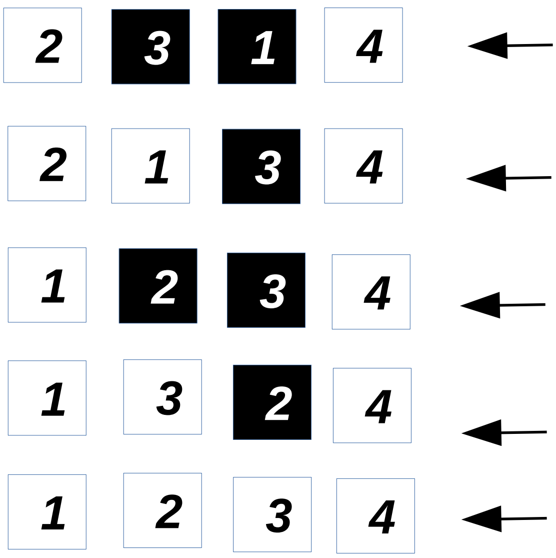


Combinaison donnée au départ.

On permute les dominos 1 et 2 et on retourne le 2.

On permute les dominos 3 et 4 et on retourne le 3.
On gagne en 2 étapes.

Exemple 2 :



Combinaison donnée au départ.

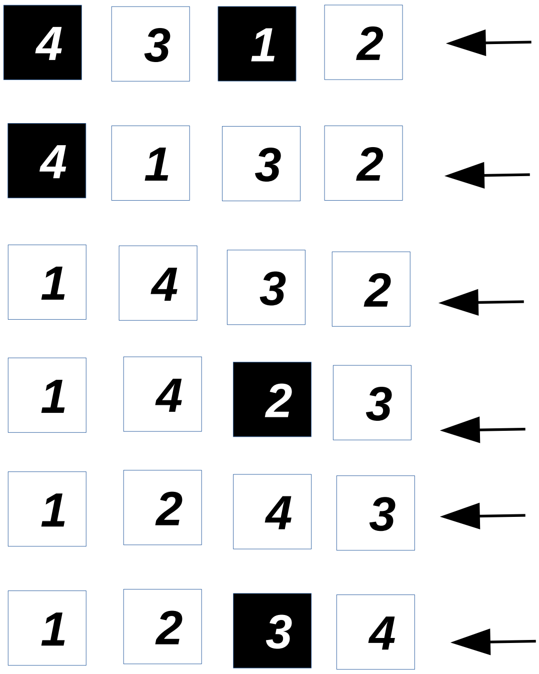
On permute les dominos 1 et 3 et on retourne le 1.

On permute les dominos 1 et 2 et on retourne le 2.

On permute les dominos 2 et 3 et on retourne le 3.

On permute les dominos 2 et 3 et on retourne le 2.
On gagne en 4 étapes.

Exemple 3 :



Combinaison donnée au départ.

On permute les dominos 1 et 3 et on retourne le 1.

On permute les dominos 1 et 4 et on retourne le 4.

On permute les dominos 2 et 3 et on retourne le 2.

On permute les dominos 2 et 4 et on retourne le 2.

On permute les dominos 3 et 4 et on retourne le 3.

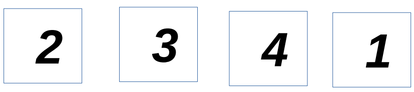
Impossible de gagner ici ! [1]

Remarque : dans nos nombreux essais effectués, soit on arrive à la combinaison gagnante et c’est en moins de treize coups, soit on y arrive jamais. Mais comment savoir dès le départ si la combinaison est gagnante ou non ?

II – Parité : un début d’explication

1 - Remarque sur les couleurs
Lorsqu'à une étape on a un certain nombre de dominos noirs, à l'étape suivante ce nombre va augmenter ou diminuer de un (ce raisonnement fonctionne également pour le nombre de blancs).
On va donc alterner, à chaque coup joué, entre un nombre de dominos noirs pair et impair.
Pour gagner, il nous faut zéro domino noir, donc un nombre pair de dominos noirs. Donc, si le nombre de dominos noirs est pair au départ, alors il faudra un nombre pair de coups pour espérer gagner. En revanche, si le nombre de dominos noirs est impair au départ, il faudra un nombre impair de coups pour potentiellement arriver à la combinaison souhaitée. [2]

2 - Remarque sur l’ordre
Ici, on ne tient pas compte des couleurs.
Regardons un exemple où seul le 1 est mal placé :



Pour remettre le 1 à sa place il va nous falloir 3 étapes minimum (ou 5 ou 7… si on fait des coups inutiles). 3 est impair donc avec la remarque précédente, si on met un nombre impair de dominos noirs au début, comme il faut un nombre impair d’étapes pour revenir à quatre dominos blancs, on peut espérer gagner. Mais, si on met un nombre pair de dominos noirs au début, nous ne pourrons jamais y arriver. En effet, il faut un nombre pair d’étapes pour avoir les bonnes couleurs et un nombre impair d’étapes pour remettre les nombres dans l’ordre.
Nous avons un raisonnement similaire si seul le 1 est mal placé mais est en troisième position : il faudra un nombre pair de coups pour le remettre à sa place ; il faudra donc que la combinaison de départ ait un nombre pair de dominos pour espérer gagner.

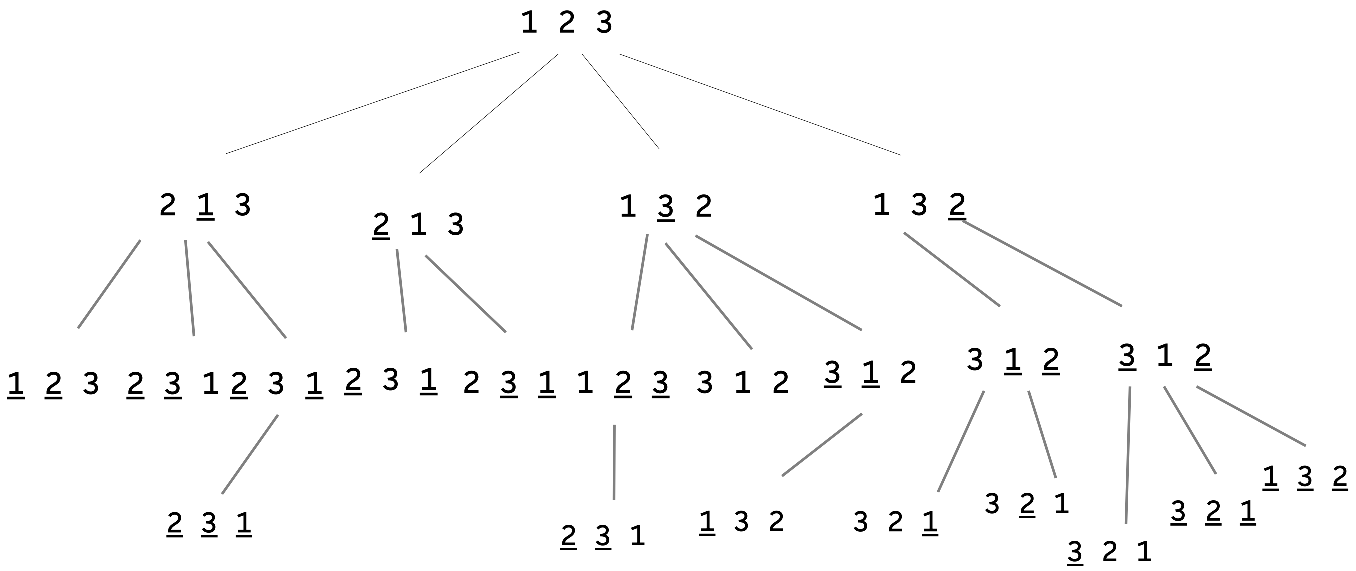
Nous comprenons avec ces remarques pourquoi certaines combinaisons sont perdantes.
Mais nous devons encore comprendre comment, dès le départ, savoir si une combinaison est gagnante et qu'elle l'est en moins de treize coups.

III – Travail avec trois dominos

Nous avons commencé par réduire le nombre de dominos à 3 et nous avons noté toutes les combinaisons possibles. Dans la suite de l'article nous noterons les jeux par une suite de nombres, les dominos noirs étant représentés par des nombres soulignés.

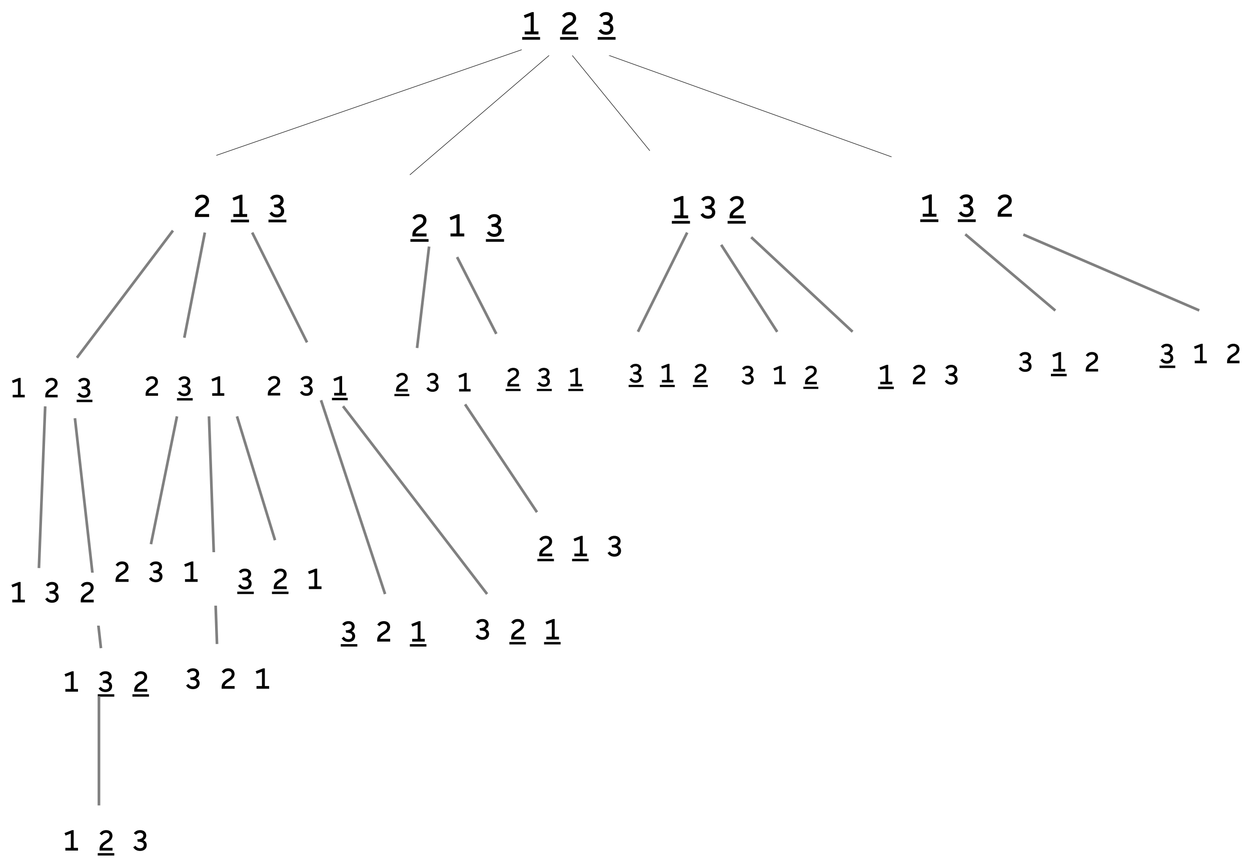
Il y a 6 façons de placer les nombres 1, 2 et 3 (le 1 a trois positions possibles, il n'en reste plus que deux pour le 2 et une seule pour le 3 ; ce qui fait un total de 6).
Pour une combinaison donnée, nous avons 8 façons de mettre les couleurs (2*2*2 = 8).
Nous avons donc au total 6*8 = 48 possibilités de combinaisons différentes.

Nous sommes ensuite parties de la combinaison gagnante pour étudier toutes celles qu'on pourra atteindre. Nous avons obtenu un arbre de toutes les possibilités. Pour chaque combinaison, nous avons quatre choix possibles pour le coup suivant, donc normalement 4 branches . Mais chaque fois que l'on trouve une combinaison déjà écrite dans l'arbre, on ne la remet pas.
Voici l'arbre obtenu : [3]



Nous remarquons que l'on atteint 23 combinaisons à partir de la combinaison 1 2 3. Depuis ces 23 combinaisons, on peut atteindre la combinaison gagnante 1 2 3 (puisque les flèches dont réversibles). Il manque 24 combinaisons, qui ne permettront donc pas d'atteindre la combinaison gagnante.
De plus, la combinaison gagnante est atteinte en un maximum de quatre coups (le plus long chemin sur l'arbre).

La combinaison **1 2 3** n’apparaît pas dans l’arbre précédent donc nous en avons refait un à partir de **1 2 3**. Voici cet arbre :



Nous remarquons que cet arbre contient les 24 autres combinaisons.
Une combinaison rencontrée dans un arbre ne peut pas atteindre une combinaison de l’autre. Si on compare les combinaison des 2 arbres, elles sont « opposées » : c’est à dire que l’ordre des nombres est le même mais les couleurs sont inversées. Par exemple, si dans le premier arbre on trouve la combinaison **1 3 2** , la combinaison « opposée » **1 3 2** se trouvera dans l’autre arbre.

Nous pouvons donc savoir dès le départ, si la combinaison est gagnante ou non : il suffit de regarder à quel arbre elle appartient. Nous reprenons donc notre jeu de quatre dominos.

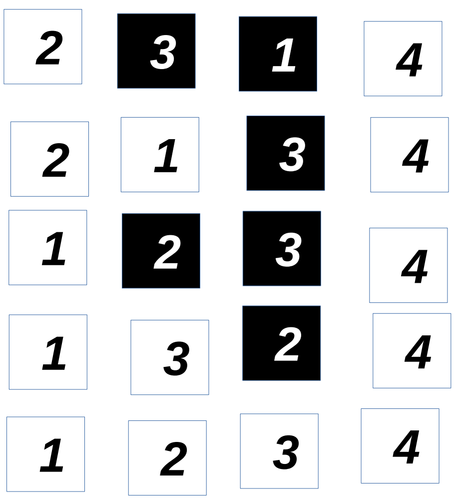
IV – Résolution du problème

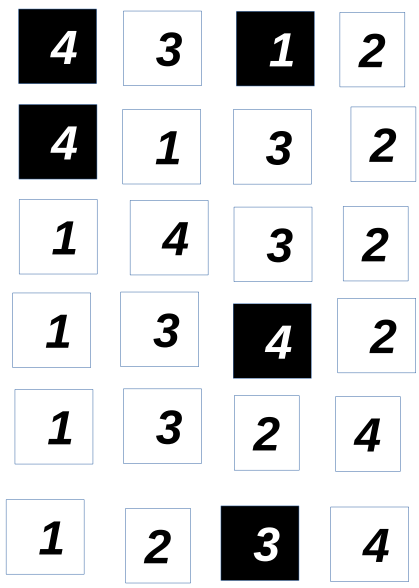
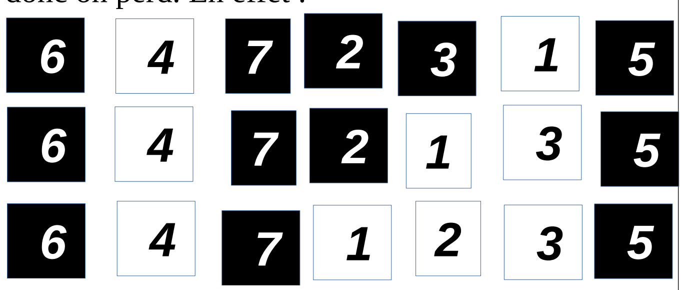
Nous allons essayer de faire un raisonnement identique à la partie III pour quatre dominos.
Nombre de choix possibles pour placer les nombres 1, 2, 3 et 4 : 4*3*2*1 = 24.
Pour chacun de ces choix il y a 16 façons différentes de mettre les couleurs.
Ce qui nous donne au total : 16*24 = 384 possibilités de combinaisons.
Nous avons tenté de faire un arbre à partir de la combinaison **1 2 3 4** mais il était vraiment trop grand et nous n’avons pas réussi.
Nous sommes donc revenues au problème avec trois dominos pour essayer de comprendre ce que les combinaisons d’un arbre ont en commun et nous avons repris nos remarques sur la parité vues dans le I.

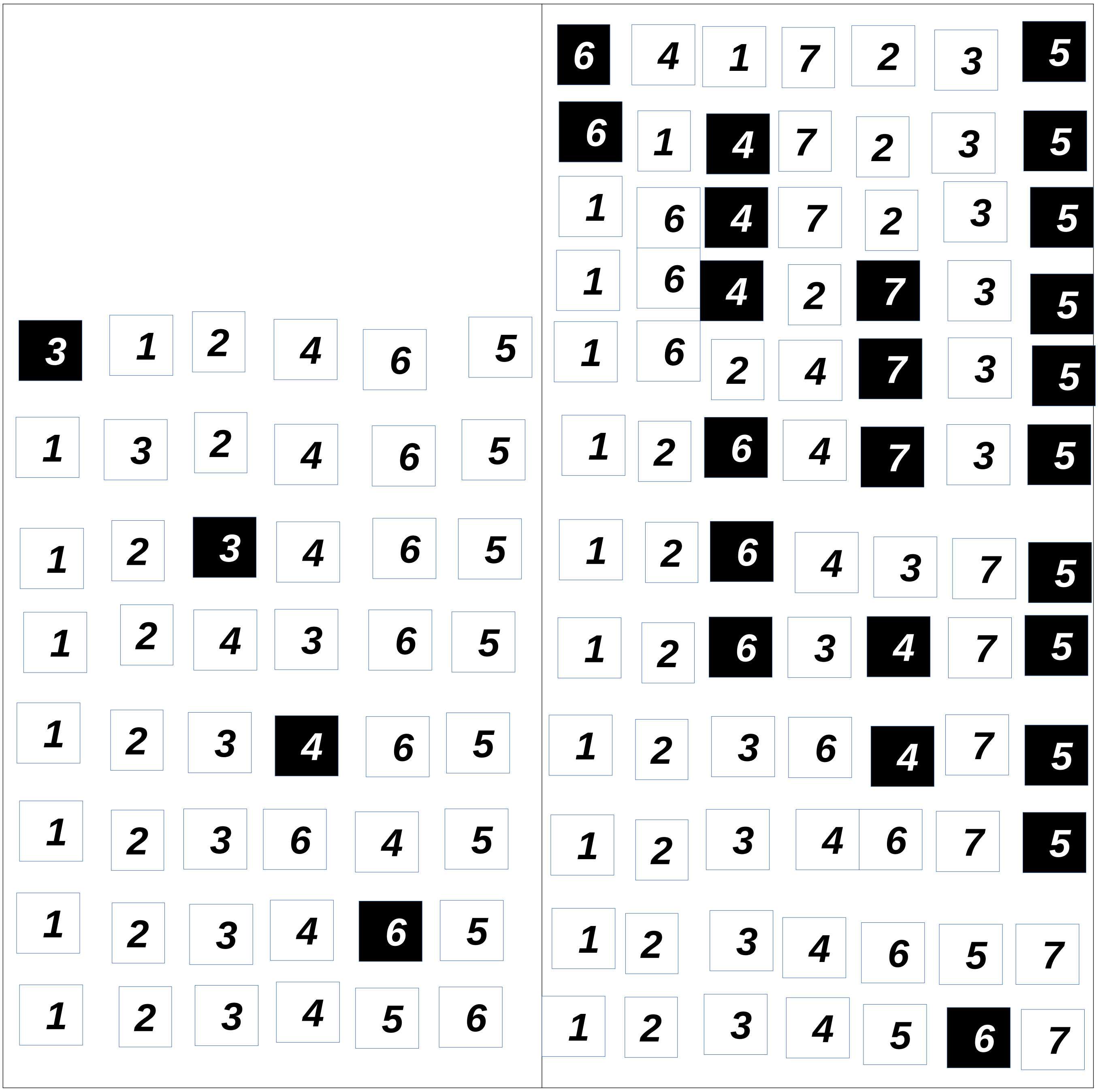
Dans une combinaison, on va regarder deux quantités :
- Le nombre de dominos noirs appelé N.
- Le nombre de numéros positionnés à gauche d'un numéro et plus grand que ce dernier, nommé P.

Par exemple dans la combinaison 3 1 2 le 1 a un numéro plus grand que lui à sa gauche (le 3), le 2 aussi et le 3 n'en a pas ce qui fait P = 1 + 1 = 2. Lorsque le numéro d'un domino a un numéro plus grand sur sa gauche, il faudra forcément 1 échange entre eux pour bien les positionner.
Si ces deux nombres N et P ont la même parité, la combinaison se trouve dans l'arbre « **1 2 3** » et est gagnante sinon elle est perdante.
Voici des exemples de combinaisons de l'arbre « 1 2 3 » :
<u>2</u> <u>3</u> 1 :   P = 2 et N = 2
3 1 2 :   P = 2 et N = 0
1 <u>2</u> <u>3</u> :   P = 0 et N = 2
<u>3</u> <u>2</u> <u>1</u> :   P = 3 et N = 3
Pour ces combinaisons et toutes celles trouvées dans cet arbre, la parité de P et N est la même tandis que dans l'autre arbre la parité de P et N est différente. On peut donc savoir, dès le départ, si on va gagner ou perdre.
Nous avons appliqué cette recherche de parité avec le jeu de quatre dominos et même au-delà. Nous avons constaté sur tous nos essais qu'une même parité entre N et P au départ nous fait gagner et ce, en moins de 13 coups pour un jeu de quatre dominos. Si la parité est différente, on perd. Cette conjecture nous semble encore vraie lorsqu'on prend 5, 6 … dominos. Cela rejoint notre remarque du paragraphe II. Le nombre N décrit le nombre d'échanges de couleur à effectuer. Le nombre P décrit le nombre de coups nécessaires pour remettre les cartes dans le bon ordre : N et P doivent avoir la même parité.

Terminons par des exemples détaillés.

<table>
<tr>
<td>Combinaison de départ : 2 <u>**3**</u> <u>**1**</u> 4
N = 2 et P = 4
N et P sont de même parité donc on doit gagner.
Voici une solution :
</td>
<td>Combinaison de départ : <u>**4**</u> 3 <u>**1**</u> 2
N = 2 et P = 5

N et P n'ont pas la même parité donc on perd.
En effet :
</td>
</tr>
<tr>
<td>Combinaison de départ : <u>**3**</u> 1 2 4 6 5
N = 1 et P = 3 ; N et P sont de même parité donc on doit gagner. Voici une solution :</td>
<td>Combinaison de départ : <u>**6**</u> **4** <u>**7**</u> <u>**2**</u> <u>**3**</u> 1 <u>**5**</u>
N = 5 et P = 14 ; N et P n'ont pas la même parité donc on perd. En effet :
</td>
</tr>
</table>



Notes d'édition :

[1] Conclusion juste, mais pas entièrement évidente.

[2] Ce qui est montré est une condition nécessaire : si le nombre de dominos noirs est impair, alors il faut un nombre impair de coups pour y arriver. Il n’est pas entièrement évident qu’on arrivera à le réaliser.

[3] L’arbre réalisé contient quelques erreurs, même si le principe de construction est parfaitement correct : il ne contient que 23 combinaisons (pas 24) ; de plus certaines combinaisons se retrouvent plusieurs fois, et d’autres ne devraient pas se trouver dans cet arbre.
Ce sera un excellent exercice pour le lecteur consciencieux de refaire ce tableau.